

Φυσική των αστέρων

Μάθημα 23

Μελανές οπές

Carroll & Ostlie Κεφ. 12 (17 στην αγγλική έκδοση)

Σημειώσεις Α. Μαστιχιάδη-έγγραφα-eclass

Σύγχρονη Θεωρητική Μηχανική Κ. Τσίγκανου, κεφ. 13

Μετρική του Schwarzschild

➤ Επίπεδος χώρος – χώρος **Minkowski**

(βλ. μάθημα Ειδικής ΘΣ)

Μετρική: $ds^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2]$ (σε σφαιρικές συντεταγμένες για το χωρικό κομμάτι)

➤ Αν έχουμε μία σφαιρικά συμμετρική μάζα M στο σημείο $r = 0$, ο χώρος παραμορφώνεται και η μετρική περιγράφεται από τη σχέση

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]$$

μετρική του **Schwarzschild**

Προφανώς για $M \rightarrow 0$ ή $r \rightarrow \infty$, η μετρική Schwarzschild τείνει στη μετρική Minkowski

Πως μετράμε αποστάσεις σε χώρο που περιγράφεται από τέτοια μετρική;

Η καμπύλωση του χώρου εξ αιτίας της μάζας φαίνεται από την ακτινική συνιστώσα της μετρικής.

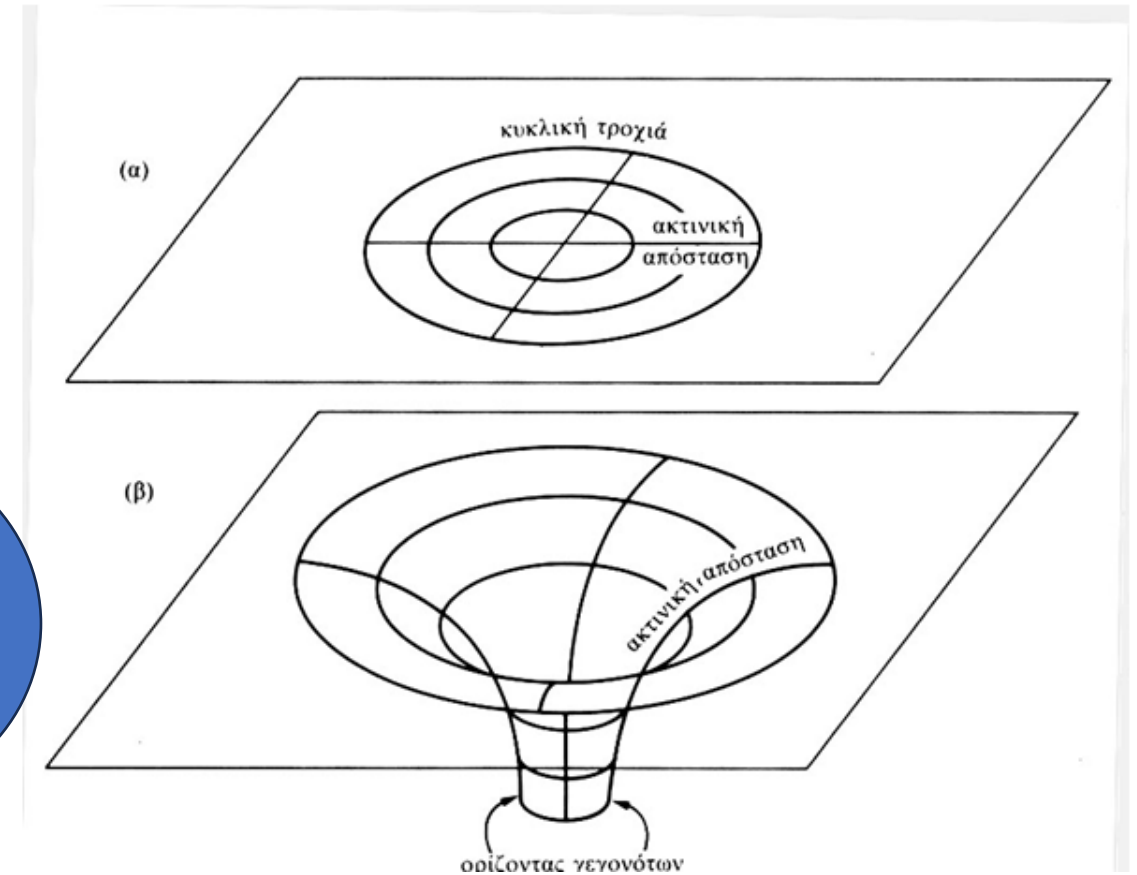
Η ακτινική (χωρική) απόσταση dx δύο γεγονότων ίδιου συντεταγμένου χώρου ($dt=0$) κατά μήκος της r -συντεταγμένης ($d\theta=d\phi=0$) δίνεται, από τη σχέση

$$dx = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr$$

Δηλ. όσο μικραίνει το r τόσο μεγαλώνει το dx

και αν ολοκληρώσουμε μεταξύ δύο ακτινών, βρίσκουμε

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-\frac{1}{2}} > r_2 - r_1$$



Κυκλικές τροχιές (α) σε ευκλείδεια και (β) μη ευκλείδεια γεωμετρία. Η ύπαρξη μάζας καμπυλώνει τον χωρόχρονο με αποτέλεσμα κυκλικές τροχιές της ίδιας διαμέτρου να μην αντιστοιχούν στην ίδια ακτινική απόσταση για τις δύο περιπτώσεις.

→ η τιμή της r-συντεταγμένης σε κάποιο σημείο **δεν μετράει την απόσταση του σημείου από το κέντρο**, όπως στον επίπεδο χώρο.

→ αυτό που μπορούμε να μετρήσουμε σωστά με την βοήθεια της συντεταγμένης r είναι αποστάσεις κάθετα σε αυτήν

$$r(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)^{\frac{1}{2}}.$$

→ Συνεπώς ένας τρόπος να προσδιορίσουμε την τιμή της r-συντεταγμένης του σημείου που βρισκόμαστε είναι να διαγράψουμε μία περιφέρεια γύρω από το κέντρο και να μετρήσουμε το μήκος της. Το μήκος που θα βρούμε θα συνδέεται με την r μέσω της σχέσης $C=2\pi r$.

Η καμπυλότητα του χώρου

- Στην περίπτωση ενός καμπύλου ισοτροπικού χώρου η μετρική της χωρικής συνιστώσας γράφεται (Διαφορική Γεωμετρία)

$$\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

όπου K η καμπυλότητα του χώρου.

- Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την μετρική του Schwarzschild συνάγουμε ότι $K = \frac{2GM}{c^2 r^3}$
- Αυτή η σχέση δείχνει ότι η καμπυλότητα K τείνει στο μηδέν όταν το r τείνει στο άπειρο και ότι το K είναι ανάλογο της μάζας M .
- Εάν θέσουμε $K = \frac{1}{R^2}$ όπου R η ακτίνα καμπυλότητας τότε έχουμε ότι ο λόγος $\frac{r^2}{R^2} = \frac{2GM}{rc^2}$ αποτελεί ένα μέτρο της καμπύλωσης του χώρου σε απόσταση r από αντικείμενο μάζας M .

Παραδείγματα

Στην επιφάνεια του Ηλίου

$$2GM/c^2r = 2GM_{\odot}/c^2R_{\odot} \approx 4 \times 10^{-6}$$

Στην επιφάνεια της Γης

$$2GM/c^2r = 2GM_{\oplus}/c^2R_{\oplus} \approx 1.4 \times 10^{-8}$$

Στην επιφάνεια ενός αστέρα νετρονίων

$$2GM/c^2r = 2GM_{NS}/c^2R_{NS} \approx 0.3$$

Βαρυτική ερυθρομετατόπιση

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]$$

➤ Εάν ένας παρατηρητής βρίσκεται σε κάποια ακτίνα r , τότε ο χρόνος $d\tau$ που αυτός μετράει (δηλαδή ο ιδιόχρονος) συνδέεται με τον χρόνο dt που μετράει παρατηρητής ευρισκόμενος στο άπειρο με τη σχέση

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (dr = 0, d\varphi = 0, d\theta = 0)$$

→ ο χρόνος κυλάει πιο αργά κοντά στη μάζα M ($d\tau < dt$)

→ Εάν συνδέσουμε χρονικά διαστήματα και συχνότητες δια μέσου των σχέσεων $dt \simeq \Delta t = \frac{1}{\nu}$ (εάν υποθέσουμε δηλαδή ότι το Δt_0 αντιστοιχεί στην περίοδο ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που εκπέμπονται στο σημείο r), τότε

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} = \frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\nu_\infty < \nu_0) \quad \text{Βαρυτική ερυθρομετατόπιση}$$

Ακτίνα Schwarzschild – Ορίζοντας γεγονότων

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]$$

Όταν η ακτίνα r γίνει ίση με την ακτίνα

$r_g = \frac{2GM}{c^2}$ βαρυτική ακτίνα ή ακτίνα Schwarzschild του αστέρα

τότε

$$1 - \frac{2GM}{rc^2} \rightarrow 0 \text{ και } \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \rightarrow \infty$$

Παρατηρείστε ότι για $r = r_g$ η συχνότητα $\frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$

Δηλ. ο παρατηρητής έξω από την Μ.Ο. δεν θα δει καθόλου το φως.

Τροχιές γύρω από μια κεντρική μάζα

- Νευτώνεια βαρύτητα

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = E, \text{ όπου } h = \frac{J}{m} \text{ η στροφορμή ανά μονάδα μάζας και } E \text{ η ολική ενέργεια.}$$

- Γενική Σχετικότητα

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} - \frac{2GMh^2}{r^3 c^2} = c^2(A - 1), \text{ όπου } A = \frac{E^2}{m^2 c^4}$$

↓
παραγωγή ως προς τον ιδιόχρονο τ

↓
επιπλέον ελκτικός όρος που γίνεται σημαντικός σε μικρά r

Σχόλια

- Αποδεικνύεται (άσκηση) ότι υπάρχει μία τελευταία ευσταθής κυκλική τροχιά σε ακτίνα $r = 3r_g$ (βλ. άσκηση)
- Εάν το υλικό σημείο βρεθεί μέσα από αυτήν την ακτίνα θα κινηθεί προς το κέντρο.
- Κατά την πτώση του υλικού σημείου προς το κέντρο τα συμπεράσματα που συνάγει παρατηρητής που μετέχει της κίνησης διαφέρουν ριζικά από αυτά μακρινού παρατηρητή.
- Ας υποθέσουμε ότι $h = 0$ (ακτινική κίνηση στο περιβάλλον MO)
- Τότε η εξίσωση κίνησης γίνεται $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2GM}{r}$
- ο ιδιόχρονος που απαιτείται για να φτάσει το υλικό σημείο στο κέντρο, από το σημείο r_1 , είναι

$\Delta\tau = \left(\frac{2}{9GM}\right)^{\frac{1}{2}} (r_1)^{\frac{3}{2}} \rightarrow$ ο παρατηρητής που μετέχει της κίνησης θεωρεί ότι φτάνει στο κέντρο σε κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα

Ο παρατηρητής στο άπειρο (για κίνηση κατά μήκος της ακτίνας) μετράει στις συντεταγμένες της μετρικής

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2$$

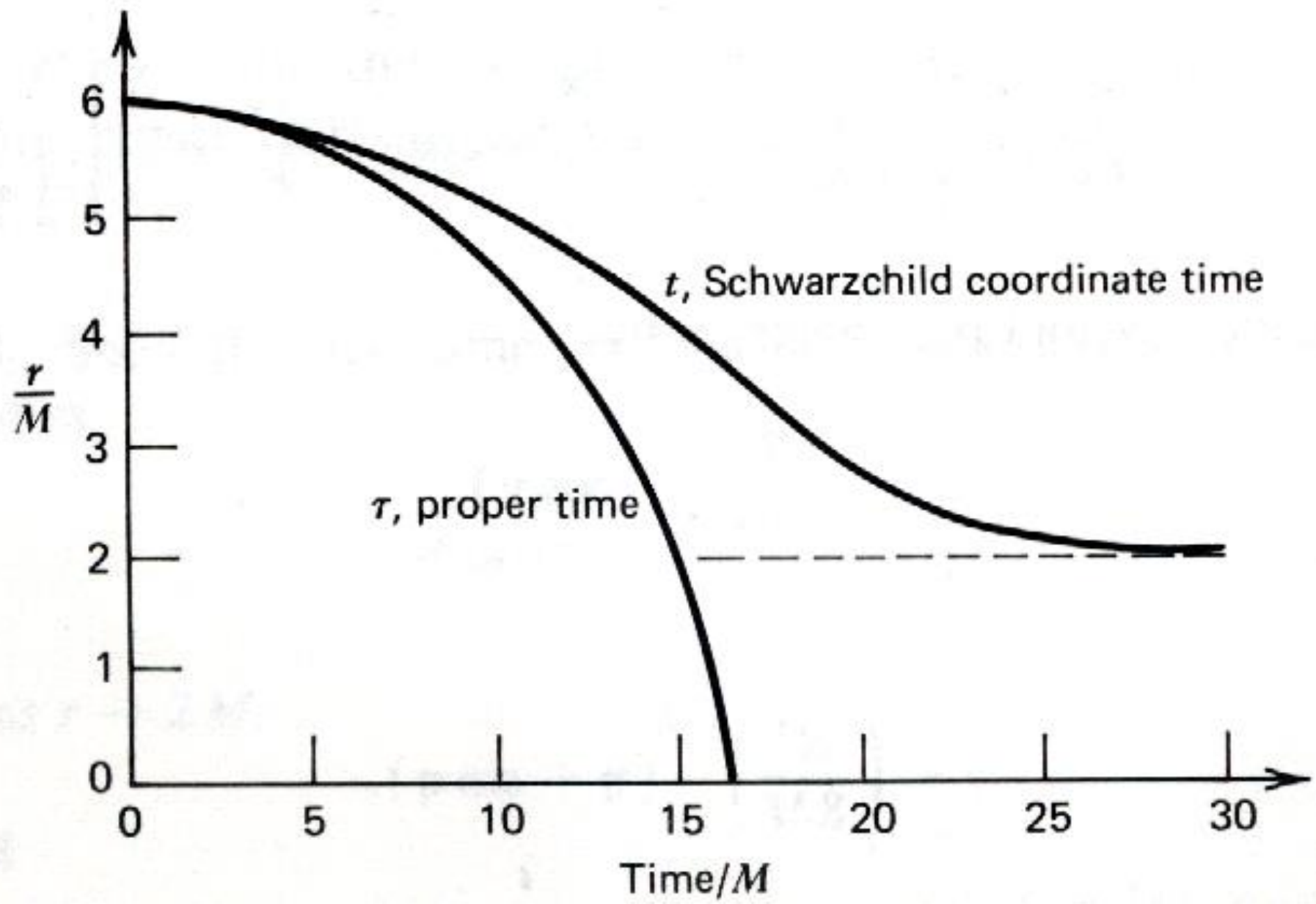
Θέτουμε $ds=c dt$, χρησιμοποιούμε το ότι $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2GM}{r}$ και καταλήγουμε στη σχέση

$$dt = - \frac{dr}{c \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)}$$

η οποία όταν ολοκληρωθεί μεταξύ δύο τυχαίων σημείων 1 και 2 δίνει

$$t_2 - t_1 = - \frac{1}{cr_g^{1/2}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{3/2} dr}{r - r_g} \rightarrow \infty \text{ όταν το } r \rightarrow r_g,$$

δηλαδή το υλικό σημείο μοιάζει να μην φτάνει ποτέ στην ακτίνα του Schwarzschild



➤ Είδαμε επίσης ότι φωτεινά σήματα που πιθανόν να εκπέμπει το υλικό σημείο υπόκεινται σε όλο και μεγαλύτερη ερυθρομετατόπιση καθώς το τείνει στο και τελικά η συχνότητά τους μηδενίζεται όταν το υλικό σημείο φτάνει εκεί. → ο μακρινός παρατηρητής δεν πρόκειται ποτέ να δει το σώμα να φτάνει την ακτίνα r_g .

➤ Για φωτόνια, $ds = 0$, οπότε

$$0 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \rightarrow 0 \text{ όταν } r \rightarrow r_g$$

δηλαδή το φως πράγματι φαίνεται να `παγώνει` στην ακτίνα του Schwarzschild

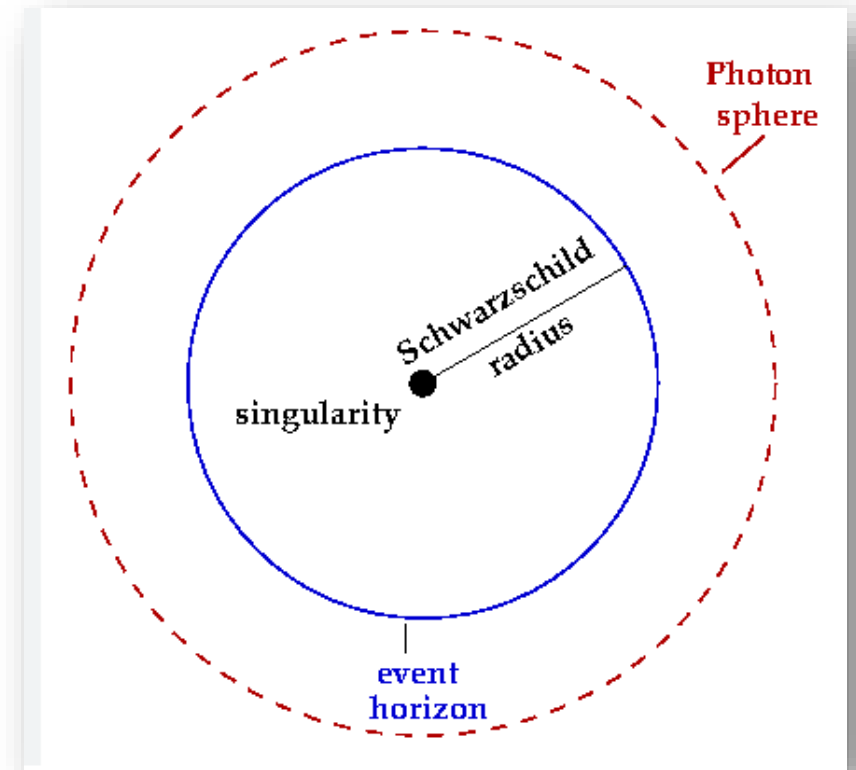
➤ Επίσης ο μακρινός παρατηρητής δεν μπορεί να παρατηρήσει φωτεινά σήματα που προέρχονται μέσα από την ακτίνα Schwarzschild .

➤ Η σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα την ακτίνα Schwarzschild είναι ο λεγόμενος **ορίζοντας γεγονότων (event horizon)**

Ό,τι υπάρχει μέσα σε αυτόν τον ορίζοντα ονομάζεται **μελανή οπή**

Μελανές οπές Schwarzschild

- Είναι η απλούστερη δυνατή περίπτωση μελανής οπής, (αυτή που συζητήσαμε μέχρι τώρα) μιας σφαιρικής ΜΟ χωρίς περιστροφή.
- Οι μελανές οπές του Schwarzschild χαρακτηρίζονται μόνον από την ακτίνα τους η οποία, με τη σειρά της, εξαρτάται μόνον από τη μάζα τους M .
- Στο κέντρο της ΜΟ υπάρχει ένα σημείο άπειρης πυκνότητας που ονομάζεται σημειακή ανωμαλία (singularity), όπου είναι συγκεντρωμένη όλη η μάζα της ΜΟ
- Έξω από τον ορίζοντα γεγονότων υπάρχει η σφαίρα φωτονίων όπου τα φωτόνια κινούνται γύρω από τη ΜΟ σε ασταθείς κυκλικές τροχιές.



Άσκηση 1. η τελευταία ευσταθής κυκλική τροχιά γύρω από ΜΟ Schwarzschild

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} - \frac{2GMh^2}{r^3c^2} = c^2(A - 1), \text{ όπου } A = \frac{E^2}{m^2c^4}$$

$$\rightarrow \frac{E}{m} - c^2 = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{r_g h^2}{2r^3} = \frac{\dot{r}^2}{2} + V'(r), \text{ όπου}$$

$$V'(r) = \frac{h^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{GM}{r} = \frac{h^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{r_g c^2}{2r}$$

Ακρότατα όταν

$$\left. \frac{dV'(r)}{dr} \right|_{r_{\pm}} = \frac{h^2}{2r^4} \left(\frac{c^2 r_g}{h^2} r^2 - 2r + 3r_g \right) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{1 - \frac{3c^2 r_g^2}{h^2}} = 2\lambda^2$$

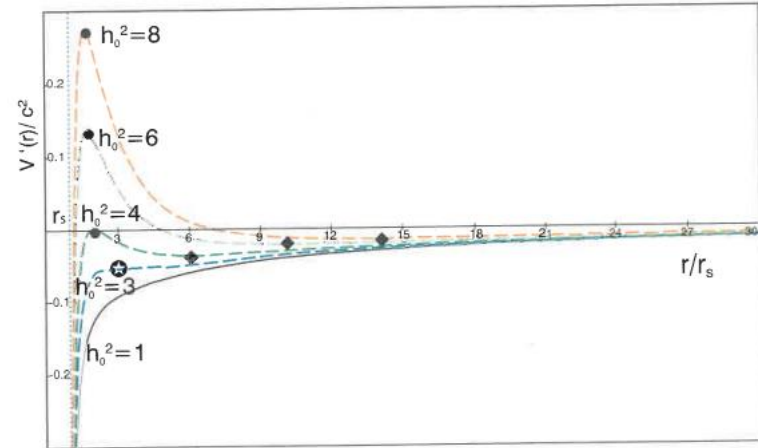
Όταν $\Delta > 0$, δηλ. $h^2 > 3c^2 r_g^2$

$$r_- = \frac{h^2}{c^2 r_g} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3c^2 r_g^2}{h^2}} \right) = \frac{h^2}{c^2 r_g} (1 - \lambda^2),$$

$$r_+ = \frac{h^2}{c^2 r_g} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3c^2 r_g^2}{h^2}} \right) = \frac{h^2}{c^2 r_g} (1 + \lambda^2).$$

Το είδος των ακρότατων προσδιορίζεται από τη 2^η παράγωγο

$$\left. \frac{d^2 V'(r)}{dr^2} \right|_{r_{\pm}} = \frac{h^2}{r^5} (r - 3r_g)$$



Για $h^2 > 3c^2 r_g^2$

$$r < 3r_g, \left. \frac{d^2 V'(r)}{dr^2} \right|_{r_-} < 0 \Rightarrow V'(r_-) = V_{\max}$$

ασταθής τροχιά

$$r > 3r_g, \left. \frac{d^2 V'(r)}{dr^2} \right|_{r_+} > 0 \Rightarrow V'(r_+) = V_{\min}$$

ευσταθής τροχιά

Δηλ. ένα σωματίδιο μπορεί να έχει ευσταθή κυκλική τροχιά μόνο όταν $r > 3r_g$

Άσκηση 2 η σφαίρα φωτονίων

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα με την άσκηση 1 αλλά για φωτόνια.

Τώρα θεωρούμε φωτοειδείς γεωδαισιακές ($ds^2 = 0$)

Όμοια με πριν, βρίσκουμε το «ενεργό» δυναμικό

$V'(r) = V_{\text{photon}}(r) = \frac{h^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$ το οποίο εύκολα διαπιστώνουμε ότι έχει ακρότατο για

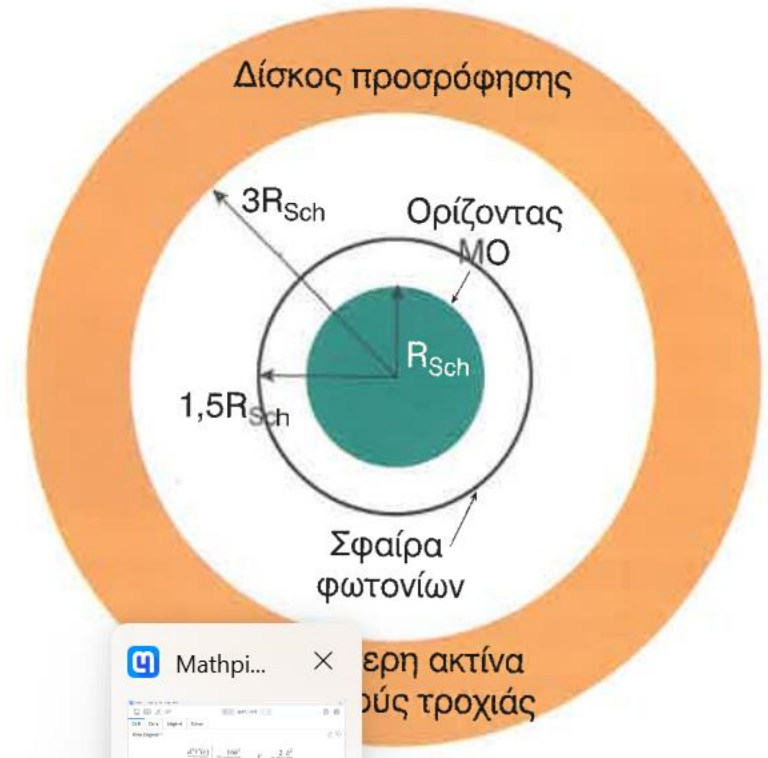
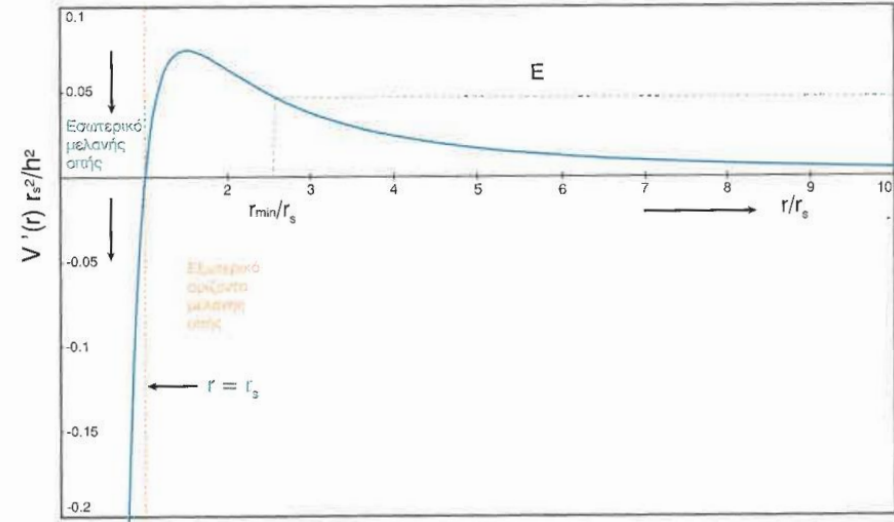
$$\frac{dV'(r)}{dr} = -\frac{h^2}{r^3} + \frac{3h^2 r_g}{2r^4} = -\frac{h^2}{r^4} \left(r - \frac{3}{2}r_g\right) = 0 \text{ δηλ. σε ακτίνα}$$

$$r = r_c = \left(\frac{3}{2}\right)r_g$$

που είναι μέγιστο αφού $\left. \frac{d^2V'(r)}{dr^2} \right|_{r_c} = -\frac{16h^2}{81r_s^4} < 0$, $V_{max} = \frac{2}{27} \frac{h^2}{r_g^2}$

Έτσι στο $1.5r_g$ αντιστοιχεί ασταθής κυκλική τροχιά για τα φωτόνια.

Αυτή η τροχιά δίνει τη λεγόμενη σφαίρα φωτονίων. Μέσα από τη τροχιά αυτή τα φωτόνια καταλήγουν σπειροειδώς στο κέντρο. Έξω από αυτήν διαφεύγουν.



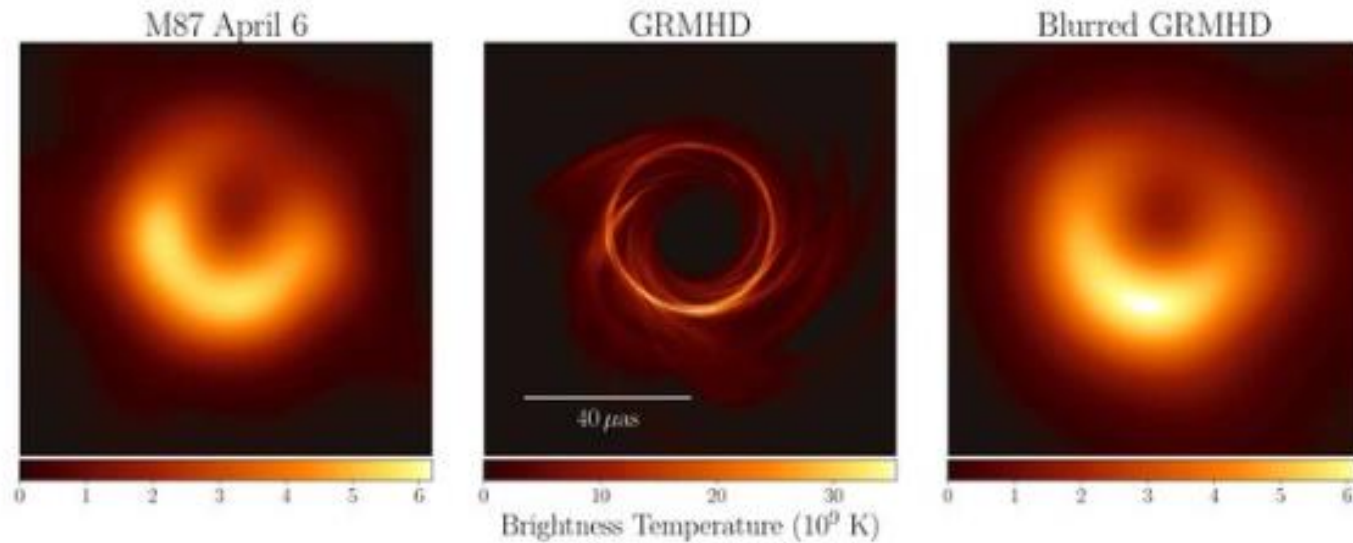
Άσκηση 3 Η «σκιά» μιας MO Schwarzschild

(Από Μηχανική 1, σκέδαση από ελκτικό πεδίο)

$$E = \frac{v_{\infty}^2}{2} = \frac{h^2}{2b^2} < V_{max} = \frac{2}{27} \frac{h^2}{r_g^2} \rightarrow b > \sqrt{\frac{27}{4}} r_g \approx 2,6r_g$$



Event Horizon Telescope – radio interferometric images around Supermassive BHs



Figure

Caption

Figure 3: Left: An Event Horizon Telescope image of M87's event horizon from Paper I of the discovery series. Middle: A simulated image based on a GRMHD model. Right: The model image convolved with a 20 μ as FWHM Gaussian beam. Although the most evident features of the model and data are similar, fine features in the model are not resolved by EHT. From Event Horizon Telescope Collaboration et al. (2019).

This figure was uploaded by [Tyrone E. Woods](#)

M87*



Sgr A*



Μελανές οπές Kerr (περιστρεφόμενες)

- Οι μελανές οπές εκτός από μάζα μπορούν να έχουν και στροφορμή
- Τότε χαρακτηρίζονται από δύο μεγέθη, τη μάζα τους M και την στροφορμή τους J .
- Η βαρυτική ακτίνα δίνεται από τον τύπο

$$r_{g,Kerr} = \frac{GM}{c^2} + \left[\left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 - \left(\frac{J}{Mc} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$J_{max} = \frac{GM^2}{c}$$

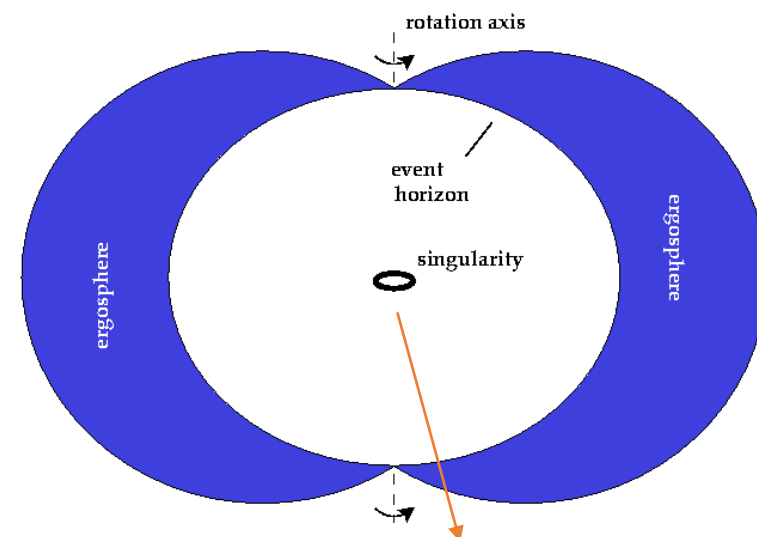
- Άλλη μία ακτίνα με ενδιαφέρουσες ιδιότητες:

$$r_{stat} = \frac{GM}{c^2} + \left[\left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 - \left(\frac{J}{Mc} \right)^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} \quad (\text{stat: static limit})$$

όπου θ η πολική γωνία ως προς τον άξονα περιστροφής

- Ισχύει $r_{g,Kerr} \leq r_{stat}$. Η περιοχή ανάμεσα σε αυτές τις δύο ακτίνες λέγεται **εργόσφαιρα**

- Μέσα σε αυτή την περιοχή κανένα σώματιο δεν μπορεί να παραμείνει ακίνητο, αλλά περιστρέφεται όπως και η μελανή οπή.



Η περιστροφή παραμορφώνει την κεντρική ανωμαλία από σημειακή σε επίπεδο δακτύλιο

Example 17.3.2. The maximum angular momentum for a solar-mass black hole is

$$J_{max} = \frac{GM_{\odot}^2}{c} = 8.81 \times 10^{41} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

By comparison, the angular momentum of the Sun (assuming uniform rotation) is $1.63 \times 10^{41} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, about 18% of J_{max} . We should expect that many stars will have angular momenta that are comparable to J_{max} , and so vigorous (if not maximal) rotation ought to be common for stellar-mass black holes.

Η εργόσφαιρα

- *Πως προκύπτει:*
- Καθώς η Μ.Ο. περιστρέφεται, επάγει περιστροφή στο κοντινό χωρόχρονο → frame dragging
- Κοντά στη Μ.Ο. το frame dragging είναι τόσο σημαντικό που υπάρχει μία περιοχή έξω από τον ορίζοντα γεγονότων (η περιοχή της εργόσφαιρας) όπου οποιοδήποτε σωματίδιο πρέπει να κινείται στην κατεύθυνση περιστροφής της Μ.Ο. Για να μείνει ένα σωματίδιο στην ίδια γωνιακή συντεταγμένη στο περιστρεφόμενο χωρόχρονο θα έπρεπε να έχει ταχύτητα μεγαλύτερη από του φωτός

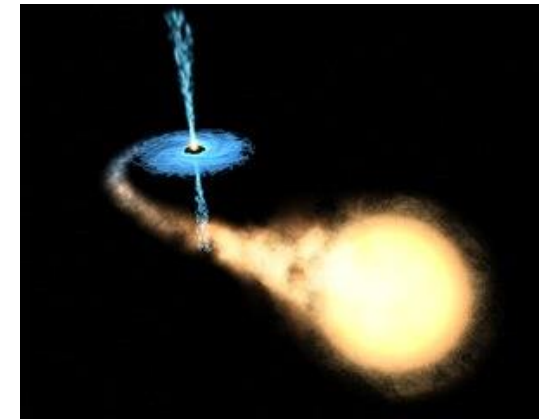
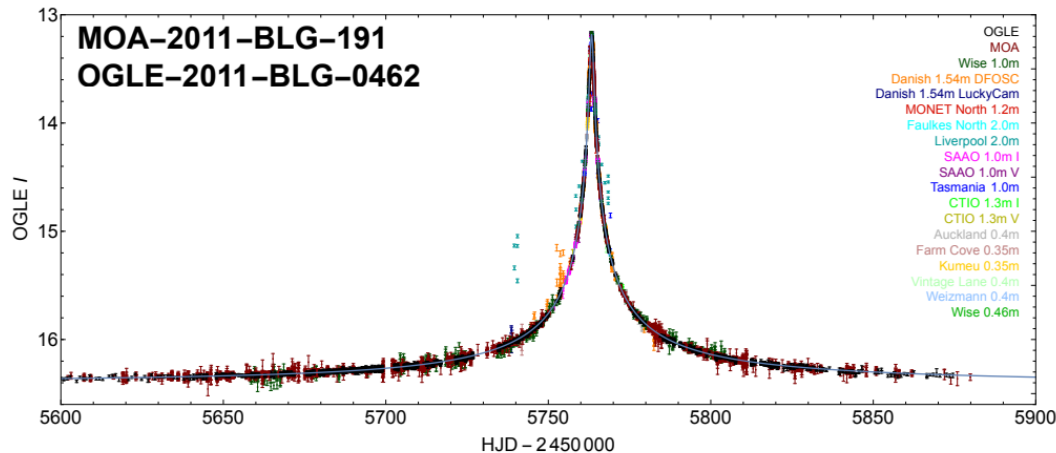
Παρατηρήσεις

- Αστρικές Μ.Ο. σε διπλά συστήματα (βλ. επόμενο μάθημα)

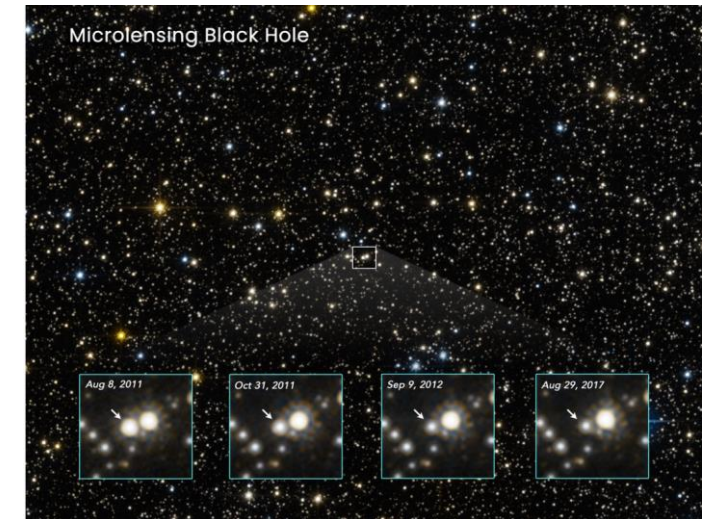
~25, μάζες ~5-20 M_{\odot}

- Απομονωμένες (μοναχικές) Αστρικές Μ.Ο. με μικροεστίαση (microlensing) (1, 7.1\pm 1.3 M_{\odot})

lightcurve + parallax



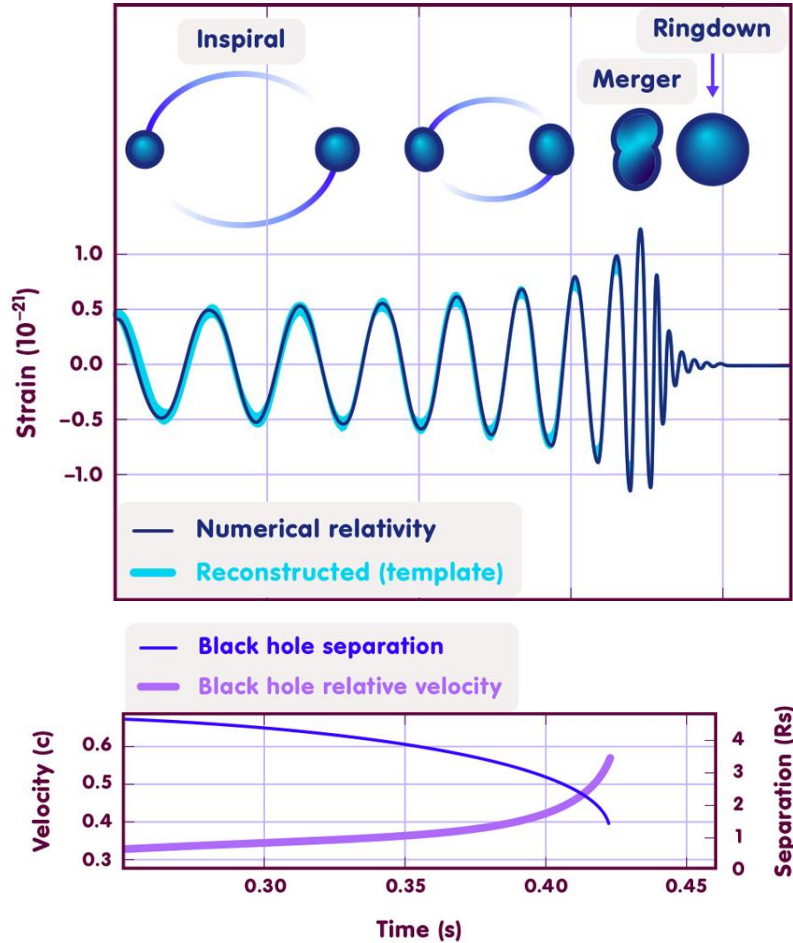
M33 X-7 X-ray binary 15.7 M_{\odot} black hole.



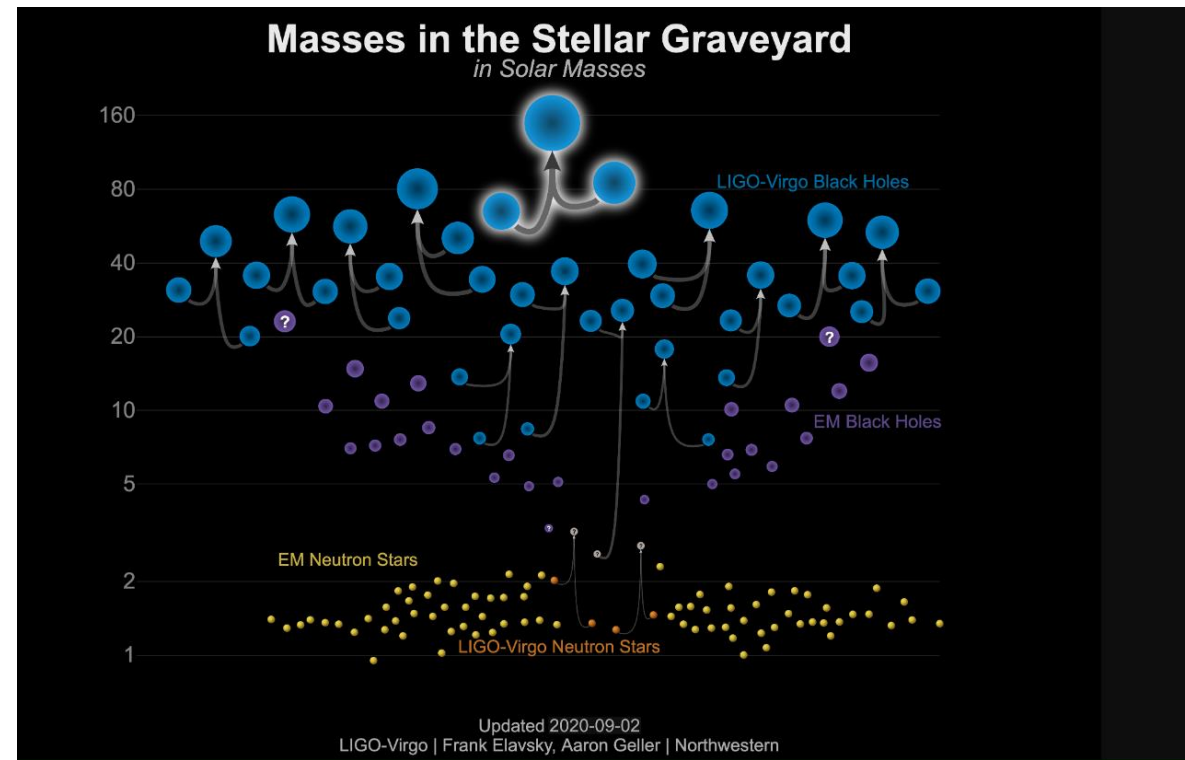
Foreground BH found via Microlensing – HST
Sahu et al. 2022

Παρατηρήσεις

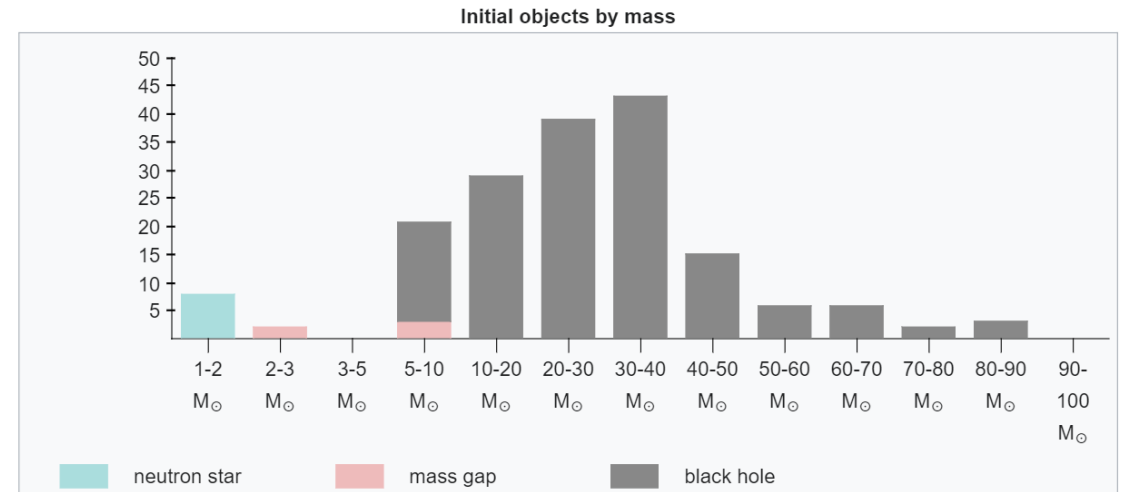
- Βαρυτικά κύματα ($5-85 M_{\odot}$)
- Συγχώνευση δύο M.O., ή M.O. και A.N.



[Image: LIGO / Redesign: Daniela Leitner]



<https://www.ligo.caltech.edu/>



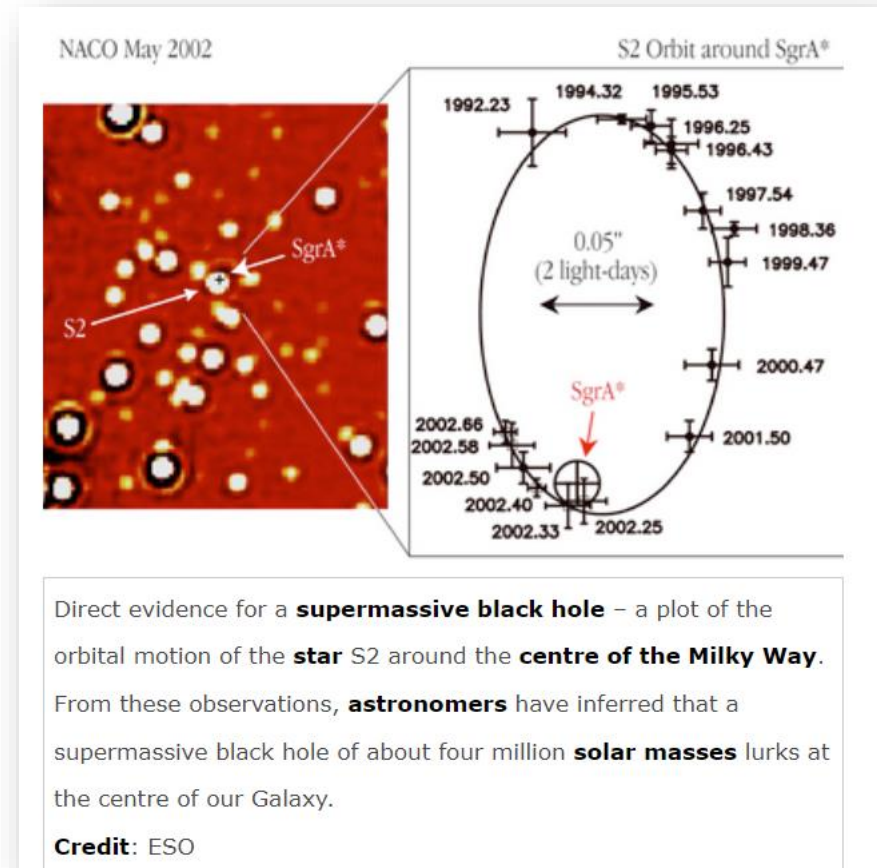
List of binary merger events^{[11][12]}

Παρατηρήσεις

- Υπερμαζικές μελανές οπές σε γαλαξίες
~150 επιβεβαιωμένες SMBH $10^5 - 10^9 M_{\odot}$
 - AGN
 - Μετρήσεις κινήσεων – Sag A
 - Event Horizon Telescope



Πίδακας στον M87 – δίσκος προσαύξησης
μάζας σε SMBH **Credit:** NASA/GSFC



Intermediate mass BHs ($100-10^5 M_{\text{solar}}$)

- Not yet observed
- IMBHs may be the seeds for supermassive black holes in the early universe.
- As a result, IMBHs are predicted to exist in the local universe in dwarf galaxies, as well as wandering in more massive galaxy halos.
- these environments are not conducive to the accretion events or dynamical signatures that allow us to detect IMBHs.
- The idea of IMBHs as SMBH seeds is appealing because of the sheer difficulty in creating a $10^9 M$ SMBH in less than one billion years, as seen with observations of high redshift quasars (e.g. Banados et al. 2018).
- A stellar-mass black hole can only achieve such large mass if it accretes \sim at the Eddington limit for its entire life up to that point (Haiman & Loeb 2001).
- In contrast, a more massive IMBH seed gives black holes a head start, allowing them to grow to supermassive sizes much more quickly (Haiman & Loeb 2001; Volonteri et al. 2003).
- The primary theoretical models for creating such objects invoke the remnants of Population III stars, direct collapse of massive pristine gas clouds, and the runaway collision of objects in dense star clusters. Regardless of which (if any) of these mechanisms is responsible for seed SMBHs, any/all of them can create IMBHs, and there may be multiple pathways to IMBH formation