
Φυσική των αστέρων
Μάθημα 11
(εσωτερικό των αστέρων-συνέχεια)
α.ε. 2023-24

Διάδοση ενέργειας στο εσωτερικό των αστέρων

Θα βρούμε τη διαφορική εξίσωση (δ.ε.) που συνδέει τη θερμοκρασία με την απόσταση από το κέντρο του άστρου (έχουμε βρει μέχρι τώρα τις αντίστοιχες δ.ε. για την πίεση, τη μάζα και τη φωτεινότητα-luminosity).

Η βαθμίδα της θερμοκρασίας συνδέεται με τη διάδοση της ενέργειας μέσα στο άστρο.

Τρεις είναι οι μηχανισμοί διάδοσης ενέργειας στο εσωτερικό των άστρων:

- διάδοση με ακτινοβολία (radiative transfer) – ο ρόλος της αδιαφάνειας
- διάδοση με μεταφορά –convection (δηλ. με θερμά αναδυόμενα στοιχεία μάζας που μεταφέρουν θερμότητα προς τα εξωτερικά στρώματα του άστρου, και ψυχρότερα στοιχεία μάζας που μετακινούνται προς το θερμότερο εσωτερικό – ρεύματα μεταφοράς)
- διάδοση με αγωγή – conduction (μεταφορά θερμότητας μέσω κρούσεων μεταξύ σωματιδίων – δεν είναι συνήθως σημαντική στο εσωτερικό των άστρων)

Διάδοση με ακτινοβολία - Radiative transfer

Έχουμε δει ότι η βαθμίδα της πίεσης ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\overline{\kappa}\rho}{c} f \qquad (1)$$

όπου

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 \qquad (2)$$

$\bar{\kappa}$ η μέση αδιαφάνεια, ρ η πυκνότητα και f η ροή ακτινοβολίας.

Παραγωγίζοντας ως προς r την (2) και αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{\overline{\kappa}\rho}{T^3} f \qquad (3)$$

Αλλά από τον ορισμό της ροής έχουμε ότι:

$$f = \frac{L_r}{4\pi r^2} \qquad (4)$$

Οπότε από τις (3) και (4) προκύπτει ότι η βαθμίδα της θερμοκρασίας για τη μεταφορά της ισχύος που παράγεται μέσα από την ακτίνα r του άστρου προς τα έξω δια ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{\overline{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2}}$$

(5) 4^{η} εξίσωση αστρικής δομής (για διάδοση με ακτινοβολία)

Διάδοση με μεταφορά - Convection

Σχόλιο για την εξ. $\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2}$: Καθώς η ροή ή η αδιαφάνεια αυξάνονται, η βαθμίδα θερμοκρασίας πρέπει να γίνεται όλο και πιο απότομη (πιο αρνητική) για να μπορεί να μεταφέρει την παραγόμενη ισχύ προς τα έξω. Αν η βαθμίδα θερμοκρασίας γίνει πολύ απότομη (πολύ αρνητική) μπορεί να προκληθεί αστάθεια μεταφοράς (convection instability).

Ως φυσικός μηχανισμός, η μεταφορά είναι ένα τρισδιάστατο πρόβλημα (εξ. Navier-Stokes). Εδώ θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα μονοδιάστατα (ακτινικά μόνο). Στους κώδικες αστρικής δομής αντιμετωπίζεται σαν μονοδιάστατο πρόβλημα → ακτινική μεταφορά

Η Κλίμακα Ύψους της Πίεσης

Χαρακτηριστική κλίμακα μήκους για την μεταφορά, ή κλίμακα ύψους πίεσης, H_P :

$\frac{1}{H_P} \equiv -\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}$ (6)

Αν H_P = σταθερό, τότε από την (6) προκύπτει ότι $P = P_0 e^{-r/H_P}$ (7) , δηλ. H_P είναι η απόσταση στην οποία η πίεση μεταβάλλεται κατά e.

Από την εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας, έχουμε ότι

$dP/dr = -\rho g$ όπου $g = GM_r/r^2$

Οπότε από την (6) προκύπτει ότι $H_P = \frac{P}{\rho g}$ (7)

Για τη περίπτωση του ήλιου, προσεγγίζουμε τη μέση πίεση με το μισό της κεντρικής πίεσης, $\bar{P} = P_c/2$ και τη μέση επιτάχυνση της βαρύτητας από τη σχέση $\bar{g} = \frac{G(M_\odot/2)}{(R_\odot/2)^2}$,

οπότε προκύπτει ότι $H_P \simeq 1.8 \times 10^8 \mathrm{m} \sim R_\odot/4$ (πιο ακριβείς υπολογισμοί δίνουν $R_\odot/10$)

Υπενθύμιση βασικών σχέσεων από τη θερμοδυναμική

- Εσωτερική ενέργεια U (καταστατική συνάρτηση, εξαρτάται μόνο από την κατάσταση του αερίου)

  Για τέλειο μονοατομικό αέριο $U = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{\mu m_H}\right)T = \frac{3}{2}nRT$ (8)

- Q, W (δεν είναι καταστατικές συναρτήσεις, δηλ. η τιμή τους εξαρτάται από τη διαδικασία που ακολουθήθηκε)
- 1ος νόμος θερμοδυναμικής $dU = dQ - dW$ (9)
- Θερμοχωρητικότητα $C_P \equiv \left.\frac{\partial Q}{\partial T}\right|_P$ (10) και $C_V \equiv \left.\frac{\partial Q}{\partial T}\right|_V$ (11)
- Λόγος θερμοχωρητικοτήτων $\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V}$ (12)

  Ιδανικό αέριο $C_P = C_V + nR$ (13) (με $nR = \frac{k}{\mu m_H}$), $C_V = \frac{3}{2}nR$ (14),

  $\gamma = 5/3$ (15)

- Αδιαβατικές μεταβολές ($dQ = 0$) $\gamma\frac{dV}{V} = -\gamma\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dP}{P}$ (16)

  Νόμος αδιαβατικού αερίου $PV^\gamma = K$ (σταθερά) (17), $P = K'\, T^{\gamma/(\gamma-1)}$ (18)

Η αδιαβατική βαθμίδα θερμοκρασίας

Θεωρούμε μία φυσαλίδα αερίου που μεταβαίνει αδιαβατικά από μία αρχική θέση i σε ακτινική απόσταση r από το κέντρο, σε μία τελική θέση f σε απόσταση $r + dr$. Στη τελική αυτή θέση, το υλικό στη φυσαλίδα έχει πυκνότητα ρ^*,γενικά διαφορετική από την πυκνότητα της περιβάλλουσας αστρικής ύλης, $\rho(r + dr)$. Η ρ^* προκύπτει από την εφαρμογή του αδιαβατικού νόμου.

$$\rho^* = \rho + d\rho = \rho + \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{\mathrm{P}}\left(\frac{dP}{dr}\right)dr \quad (19)$$

Αν $\rho^* > \rho(r + dr)$ το αέριο στη φυσαλίδα είναι πυκνότερο από το περιβάλλον υλικό και θα «πέσει» στην αρχική του θέση υπό την επίδραση της βαρύτητας (ευστάθεια).

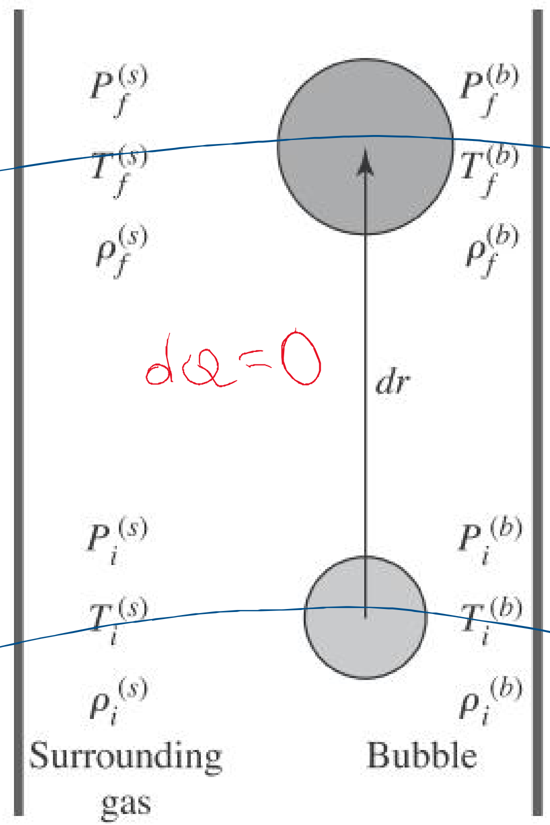
Αν $\rho^* < \rho(r + dr)$ η φυσαλίδα θα συνεχίσει να ανεβαίνει υπό την επίδραση της άνωσης (αστάθεια).

Αλλά $\rho(r + dr) = \rho + \frac{d\rho}{dr}dr$ (20)

Από (19) και (20) προκύπτει η συνθήκη ευστάθειας για μεταφορά $\boxed{\frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{\mathrm{P}}\left(\frac{dP}{dr}\right) > \frac{d\rho}{dr}}$

f (final)
τελική θέση

r+dr



r

i: initial
(αρχική θέση)

Απόδειξη της σχέσης (19):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\rho}{\rho} = \dfrac{d\left(\frac{m}{V}\right)}{m/V} = \dfrac{-\frac{m}{V^2}dV}{m/V} = -\dfrac{dV}{V} \\[2ex] \gamma\dfrac{dV}{V} = -\dfrac{dP}{P} \end{array}\right\} \quad -\gamma\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dP}{P} \Rightarrow d\rho = \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{P}dP = \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{P}\frac{dP}{dr}dr$$

και $\dfrac{d\rho}{dr} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\rho}{P}\dfrac{dP}{dr}$

Μπορούμε να εκφράσουμε τη συνθήκη ευστάθειας συναρτήσει τα βαθμίδας θερμοκρασίας.

Είναι κατανοητό ότι όταν $\rho^* > \rho(r+dr)$ θα πρέπει $T^* < T(r+dr)$

(από νόμο ιδανικού αερίου)

Δηλ. η θερμοκρασία πρέπει να μειωθεί περισσότερο από ότι συμβαίνει στο γύρω αστρικό υλικό, άρα,

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{star}} < \left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{ad}}$$ για ευστάθεια

Εύρεση του $\left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{ad}}$:

Από τον νόμο ιδανικού αερίου, $P_{gas} = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \xRightarrow[\mu=\sigma\tau\alpha\theta]{} \frac{d\mathrm{P}}{dr} = \frac{\rho k}{\mu m_H}\frac{d\mathrm{T}}{dr} + \frac{kT}{\mu m_H}\frac{d\rho}{dr} \Rightarrow$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mathrm{P}}{T}\frac{d\mathrm{T}}{dr} + \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dr}$$

Για αδιαβατικές μεταβολές $\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{\mathrm{P}}\frac{dP}{dr}$

$$\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{dP}{dr} = \frac{\mathrm{P}}{T}\frac{d\mathrm{T}}{dr} \Rightarrow \left.\frac{d\mathrm{T}}{dr}\right|_{ad} = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{TdP}{Pdr}$$

Οπότε η **συνθήκη ευστάθειας** γίνεται, αν και οι δύο βαθμίδες θερμοκρασίας είναι αρνητικές,

$$\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{TdP}{Pdr} < \left.\frac{dT}{dr}\right|_{star} \Rightarrow \frac{T}{P}\left(\frac{dT}{dr}\right)^{-1}\frac{dP}{dr} > \frac{\gamma}{\gamma-1} \quad (dT/dr < 0) \Rightarrow \boxed{\frac{dlnP}{dlnT} > \frac{\gamma}{\gamma-1}} = 2.5$$ (για ιδανικό μονοατομικό αέριο)

Το όριο για αστάθεια μεταφοράς, περιορίζει την ισχύ (φωτεινότητα) που μπορεί να μεταφερθεί με ακτινοβολία.

Είδαμε ότι $\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{\overline{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2}$

Άρα για να έχουμε ευστάθεια μεταφοράς, θα πρέπει

$$\frac{d\mathrm{T}}{dr} > \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{Td\mathrm{P}}{Pdr} \Rightarrow -\frac{3}{4ac}\frac{\overline{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} > \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{Td\mathrm{P}}{Pdr}$$

Από την εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας έχουμε: $\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r\rho}{r^2}$

$$\boxed{L_r < \frac{16\pi acG}{3\overline{\kappa}}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T^4}{P}M_r}$$

Δηλαδή αν η φωτεινότητα που απαιτείται για να διατηρηθεί η ενεργειακή ισορροπία ξεπεράσει το παραπάνω όριο, τότε η ενέργεια (ή μέρος της) θα μεταφερθεί με ρεύματα μεταφοράς.

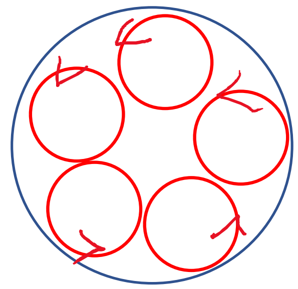
Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι όταν η αδιαφάνεια αυξηθεί αρκετά, μπορεί να προκληθεί αστάθεια μεταφοράς → ρεύματα μεταφοράς.

Επίσης, αστάθεια μεταφοράς μπορεί να προκύψει σε μια περιοχή όπου συμβαίνει ιονισμός, διότι μέρος της ενέργειας ξοδεύεται για να ιονίσει το αέριο αντί να το θερμάνει, οδηγώντας σε μεγάλη θερμοχωρητικότητα και μικρή αδιαβατική βαθμίδα θερμοκρασίας

Αστάθεια μπορεί επίσης να προκύψει όταν υπάρχει μεγάλη η εξάρτηση από τη θερμοκρασία της παραγωγής πυρηνικής ενέργειας, προκαλώντας μια απότομη βαθμίδα στη ροή της ακτινοβολίας και μια μεγάλη βαθμίδα θερμοκρασίας.

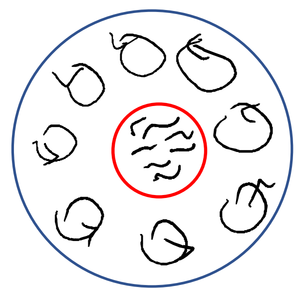
Μικρής μάζας άστροι (~0.2–0.3 $M_\odot$)

Fully convective



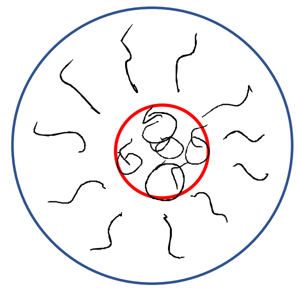
Άστροι μάζας ~1–1.5 $M_\odot$

Radiative core



Άστρα μεγάλης μάζας

Convective core



Εξισώσεις αστρικής δομής

Εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r\rho}{r^2}$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2\rho$$

Εξίσωση βαθμίδας φωτεινότητας (luminosity)

$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2\rho\varepsilon$ (γενικά $\varepsilon = \varepsilon_{nuclear} + \varepsilon_{gravity}$) $\longrightarrow$

$\varepsilon_{gravity} > 0$ συστολή άστρου

$\varepsilon_{gravity} < 0$ διαστολή άστρου

Χρονική εξάρτηση των εξισώσεων

Εξίσωση βαθμίδας θερμοκρασίας

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{\bar{\kappa}\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} \qquad \alpha\kappa\tau\iota\nu o\beta o\lambda\iota\alpha$$

$$= -\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\mu m_H}{k}\frac{GM_r}{r^2} \qquad \alpha\delta\iota\alpha\beta\alpha\tau\iota\kappa\eta\ \mu\varepsilon\tau\alpha\varphi o\rho\alpha$$

(όπου ο δεύτερος κλάδος ισχύει όταν $\frac{dlnP}{dlnT} > \frac{\gamma}{\gamma-1}$)

Επίλυση εξισώσεων αστρικής δομής

- Εκτός από τις 4 εξισώσεις αστρικής δομής χρειάζονται επίσης:
  - Η καταστατική εξίσωση
  - Η αδιαφάνεια συναρτήσει της πυκνότητας, θερμοκρασίας και χημικής σύστασης
  - Η παραγόμενη ισχύς ανά μονάδα μάζας, ε, συναρτήσει της πυκνότητας, θερμοκρασίας και χημικής σύστασης

- Αριθμητική επίλυση
- Συνοριακές συνθήκες

$$\left.\begin{array}{lcl} M_r & \rightarrow & 0 \\ L_r & \rightarrow & 0 \end{array}\right\} \text{καθώς} \rightarrow 0$$

$$\left.\begin{array}{lcl} T & \rightarrow & 0 \\ P & \rightarrow & 0 \\ \rho & \rightarrow & 0 \end{array}\right\} \text{καθώς } r \rightarrow R_\star \,.$$

Λύθηκαν στο μάθημα οι ακόλουθες ασκήσεις (από C&O ελληνική έκδοση)

7.1 Δείξτε ότι η Εξ. (7.6) της υδροστατικής ισορροπίας μπορεί επίσης να γραφεί με όρους του οπτικού βάθους τ, ως

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\kappa}.$$

Αυτή η μορφή της εξίσωσης είναι χρήσιμη συχνά στην κατασκευή μοντέλων αστρικών ατμοσφαιρών.

7.11 Ξεκινώντας με την Εξ. (7.62) και γράφοντας τον ρυθμό παραγωγής ενέργειας στη μορφή

$$\epsilon(T) = \epsilon'' T_8^{\alpha},$$

δείξτε ότι η εξάρτηση από τη θερμοκρασία για τη διαδικασία των τριών άλφα που δίνεται από την Εξ. (7.63), είναι σωστή. Η ϵ'' είναι μια συνάρτηση που δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία. *Υπόδειξη*: Πάρτε πρώτα τον φυσικό λογάριθμο και των δύο μελών της Εξ. (7.62) και έπειτα παραγωγίστε ως προς την $\ln T_8$. Ακολουθήστε την ίδια διαδικασία με τη μορφή σας του νόμου δύναμης της εξίσωσης και συγκρίνετε τα αποτελέσματα. Μπορεί να θελήσετε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση

$$\frac{d\ln\epsilon}{d\ln T_8} = \frac{d\ln\epsilon}{\frac{1}{T_8}dT_8} = T_8\frac{d\ln\epsilon}{dT_8}.$$

7.12 Η τιμή Q μιας αντίδρασης είναι το ποσό της ενέργειας που απελευθερώνεται (ή απορροφιέται) κατά την αντίδραση. Υπολογίστε την τιμή Q για κάθε βήμα της αλυσίδας αντιδράσεων PP I (Εξ. 7.37-7.39). Εκφράστε τις απαντήσεις σας σε MeV. Οι μάζες των ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ και ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ είναι 2.0141 u και 3.0160 u αντίστοιχα.

7.14 Συμπληρώστε τις επόμενες ακολουθίες αντιδράσεων. Προσέξτε να συμπεριλάβετε οποιαδήποτε τυχόν απαραίτητα λεπτόνια.

(α) ${}^{27}_{14}\mathrm{Si} \rightarrow {}^{?}_{13}\mathrm{Al} + e^{+} + \underline{?}$

(β) ${}^{?}_{13}\mathrm{Al} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{4}_{?}\underline{?}$

(γ) ${}^{35}_{17}\mathrm{Cl} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{36}_{18}\mathrm{Ar} + \underline{?}$