



Φυσική των αστέρων

Μάθημα 5

α.ε. 2023-24

Αστρικές ατμόσφαιρες

- Το φως που παίρνουμε από ένα άστρο έρχεται από την ατμόσφαιρα του άστρου, δηλ. τα στρώματα του αερίου που βρίσκονται πάνω από το αδιαφανές εσωτερικό του άστρου.
- Ένας τεράστιος αριθμός από φωτόνια διαπερνάει αυτά τα επίπεδα, απελευθερώνοντας την ενέργεια που παράγεται στο εσωτερικό του άστρου (θα μιλήσουμε για αυτό σε επόμενα κεφάλαια).
- Η θερμοκρασία, η πυκνότητα και η χημική σύσταση των ατμοσφαιρικών στρωμάτων, τα οποία τα φωτόνια αυτά διαπερνούν, καθορίζουν τα χαρακτηριστικά του φάσματος του άστρου (παραδείγματα τέτοιων φασμάτων είδαμε στο προηγούμενο μάθημα και στο εργαστήριο φασματοσκοπίας)
- Προκειμένου να ερμηνεύσουμε σωστά τις παρατηρούμενες φασματικές γραμμές, πρέπει να περιγράψουμε πώς μεταβάλλεται η ενεργειακή κατανομή των φωτονίων που προέρχονται από το εντελώς αδιαφανές εσωτερικό του άστρου (Bv) καθώς αυτά διαδίδονται μέσα από το αέριο που συνιστά την αστρική ατμόσφαιρα → δηλ. να λύσουμε **την εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας μέσα από την αστρική ατμόσφαιρα.**

Έννοιες που θα χρειαστούμε

Περίληψη βασικών εννοιών που έχουμε ήδη συναντήσει

➤ Η Ειδική Ένταση

$$dE = I_\nu \cos \theta d\nu d\Omega dA dt \Rightarrow I_\nu = \frac{dE}{\cos \theta d\nu d\Omega dA dt}$$

(ή με λ αντί ν)

➤ Ένταση

$$I = \int I_\nu d\nu$$

➤ Μέση ειδική Ένταση

$$J_\nu \equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\nu \sin \theta d\theta d\phi$$

(= I_ν για ισοτροπικό πεδίο)

➤ Μέση ένταση $J \equiv \frac{1}{4\pi} \int I d\Omega$

(στο βιβλίο C&O συμβολίζεται με $\langle I \rangle$)

➤ Ειδική πυκνότητα ενέργειας

$$u_\nu d\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\nu d\Omega$$

➤ Πυκνότητα ενέργειας

$$u = \frac{1}{c} \int I d\Omega = \frac{4\pi}{c} J$$

➤ Ροή ακτινοβολίας

$$f = \int I \cos \theta d\Omega$$

➤ Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας

$$\frac{dI_\nu}{(\alpha_\nu + \sigma_\nu) ds} = S_\nu - I_\nu \quad (*)$$

➤ Αδιαφάνεια – opacity $\kappa_\nu \rightarrow \alpha_\nu = \rho \kappa_\nu$

Προσοχή οι C & O ορίζουν $d\tau_\nu = -\alpha_\nu ds = -\rho \kappa_\nu ds$ (εμείς το έχουμε ορίσει με +), οπότε γράφουν τη ΕΔΑ $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -S_\nu + I_\nu$. Για να αποφύγουμε λάθη, θα χρησιμοποιήσουμε τη μορφή (*) της Ε.Δ.Α.

Υπενθύμιση: Πίεση ακτινοβολίας

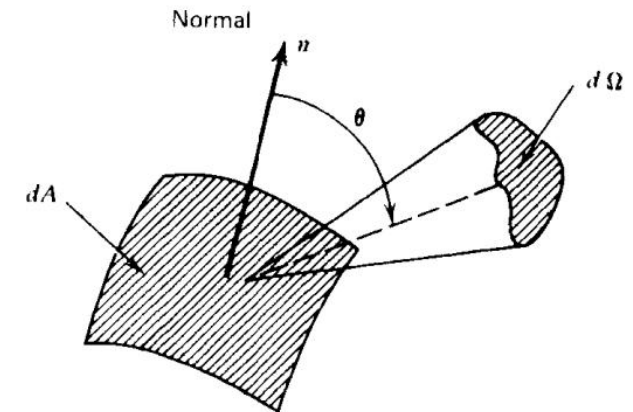
- Ορμή φωτονίου $p = E/c$
- Πίεση ακτινοβολίας είναι η ροή της ορμής της ακτινοβολίας (δηλ. ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ορμή από τα φωτόνια ανά μονάδα επιφάνειας → δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας).
- Η πίεση κάθετα στη στοιχειώδη επιφάνεια είναι

$$dP_{\perp} = \frac{dp}{dt dA} \cos \theta = \frac{dE}{cdt dA} \cos \theta = \left(\frac{1}{c}\right) I \cos^2 \theta d\Omega$$

$$P_{\perp} = \left(\frac{1}{c}\right) \int_{4\pi} I \cos^2 \theta d\Omega$$

Για ισοτροπική ακτινοβολία

$$P_{\perp} = \frac{4\pi}{3c} I = \frac{u}{3}$$



Η έννοια της τοπικής θερμοδυναμικής ισορροπίας (Local Thermodynamic Equilibrium – LTE)

- Στα προηγούμενα μαθήματα είδαμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο Boltzmann και την εξίσωση Saha για να εξάγουμε συμπεράσματα για την θερμοκρασία, την πίεση ηλεκτρονίων κλπ.
- Η βασική προϋπόθεση για να εφαρμόσουμε τους νόμους αυτούς είναι να είναι το αέριο σε **θερμοδυναμική ισορροπία**. Κάτι τέτοιο δεν μπορεί να συμβαίνει σε όλη την έκταση της ατμόσφαιρας ενός άστρου.
- Αν όμως η κλίμακα ύψους της θερμοκρασίας (Temperature scale height), $H_T = T/|dT/dr|$ είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μέση ελεύθερη διαδρομή \bar{l} των σωματιδίων που απαρτίζουν το αέριο, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε μέσα σε αυτό το χαρακτηριστικό μήκος $\Theta_l \rightarrow$ **Τοπική Θ.Ι. (LTE)**
- Για άστρα της Κύριας Ακολουθίας (όπως ο ήλιος) η συνθήκη αυτή γενικά ικανοποιείται και μπορούμε να υποθέσουμε ότι τοπικά έχουμε Θ_l .

Βλ. παράδειγμα 6.2.1 από C&O.

Η εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας σε αστρικές ατμόσφαιρες

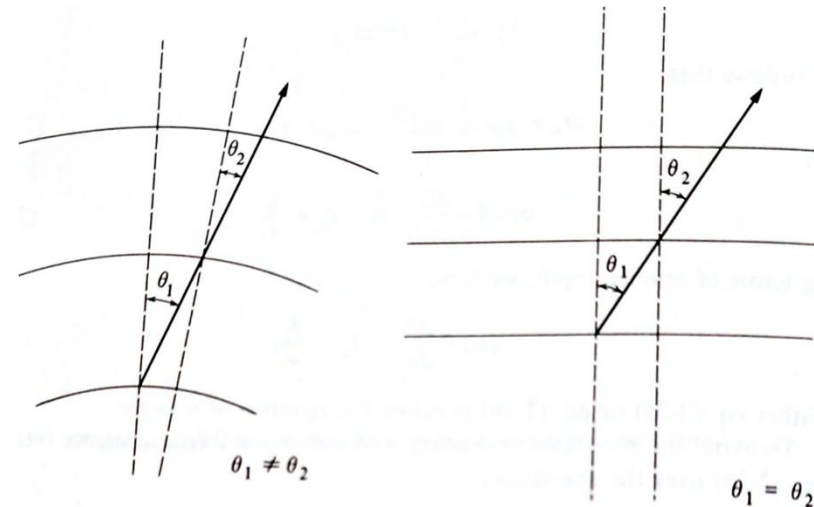
➤ Έχουμε δει ότι η Ε.Δ.Α έχει τη γενική μορφή

$$\frac{dI_\nu}{(\alpha_\nu + \sigma_\nu) ds} = S_\nu - I_\nu (*)$$

➤ Θα υποθέσουμε ότι οι ιδιότητες του υλικού εξαρτώνται μόνο από το βάθος μέσα στο μέσο. Αυτή είναι η λεγόμενη προσέγγιση της **παραλληλεπίπεδης ατμόσφαιρας (plane-parallel atmosphere approximation)**.

➤ Η ατμόσφαιρα ενός άστρου στη Κύρια Ακολουθία είναι πολύ λεπτή σε σχέση με την ακτίνα του άστρου, δηλ. η ακτίνα καμπυλότητας είναι πολύ μεγαλύτερη από το πάχος d , οπότε μπορούμε να τη προσεγγίσουμε με ένα παραλληλεπίπεδο.

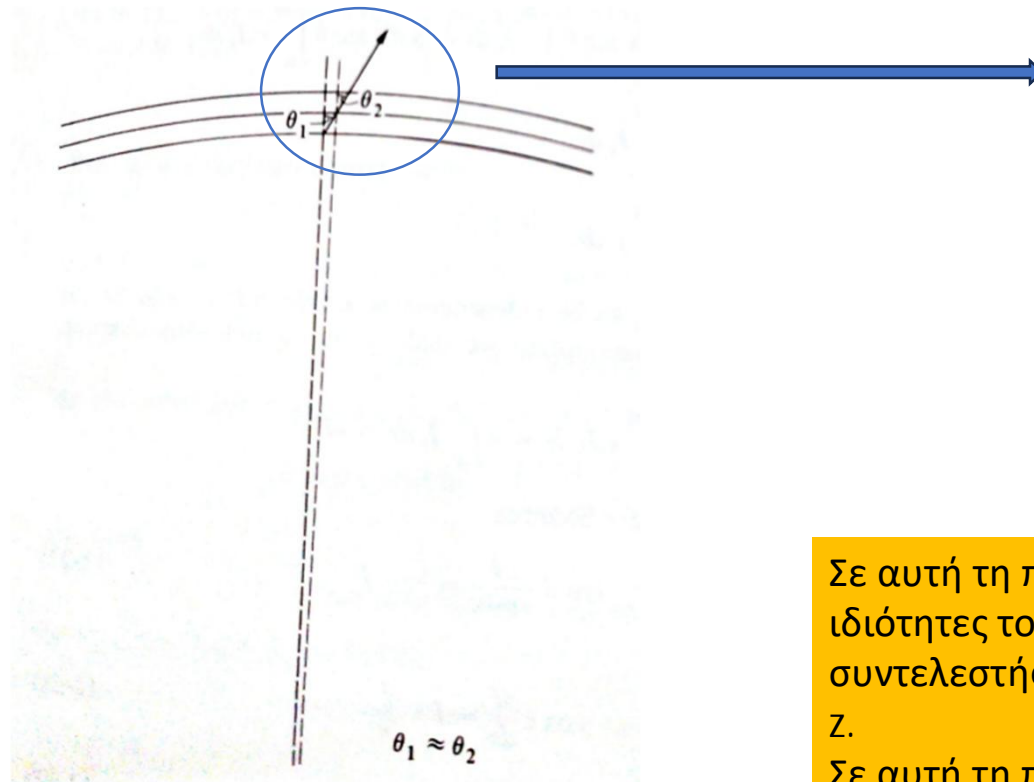
➤ Με αυτό τον τρόπο το πρόβλημα μετατρέπεται σε μονοδιάστατο πρόβλημα.



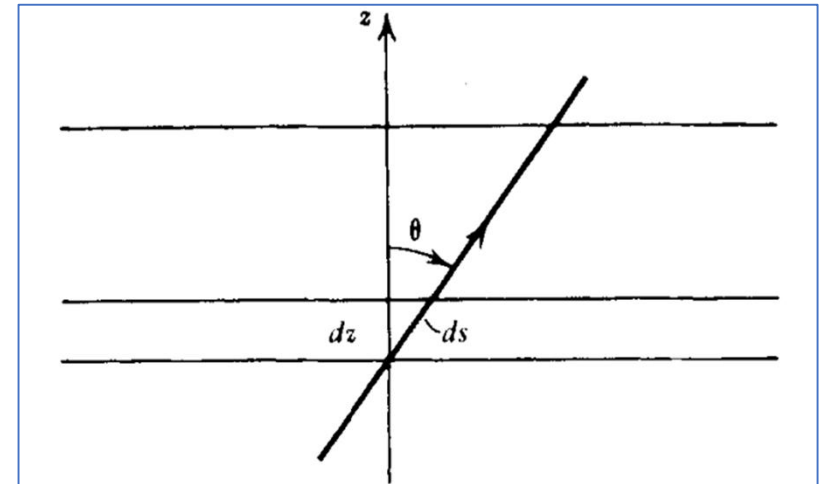
Σχήμα από Novotny Introduction to Stellar Atmospheres and Interiors

- Σε μια ατμόσφαιρα μεγάλου βάθους (σχ. στα αριστερά) η γωνία θ μεταξύ της ακτίνας και της καθέτου (ακτίνας της σφαίρας) δεν είναι σταθερή.
- Σε μια λεπτή ατμόσφαιρα (σχ. στα δεξιά) – plane parallel approximation μπορούμε να υποθέσουμε ότι η γωνία είναι σταθερή.

Plane parallel atmosphere approximation



Σχήμα από Novotny Introduction to Stellar Atmospheres and Interiors



Σε αυτή τη προσέγγιση έχουμε στην ουσία υποθέσει ότι οι ιδιότητες του υλικού (της ατμόσφαιρας), όπως η θερμοκρασία, ο συντελεστής απορρόφησης κλπ, εξαρτώνται μόνο από το βάθος, Z .

Σε αυτή τη περίπτωση, λόγω συμμετρίας, η ένταση μπορεί να εξαρτάται μόνο από τη γωνία θ που δίνει τη διεύθυνση της φωτεινής ακτίνας σε σχέση με την διεύθυνση που είναι κάθετη στα επίπεδα με σταθερές ιδιότητες.

➤ Η Ε.Δ.Α (*) γράφεται (χρησιμοποιώντας το $ds = \frac{dz}{\mu}$)

$$\frac{\mu dI_\nu}{(\alpha_\nu + \sigma_\nu) dz} = S_\nu - I_\nu \Rightarrow I_\nu(z, \mu) = S_\nu - \frac{\mu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial z}$$

(η ένταση είναι και συνάρτηση της γωνίας θ)

➤ Σαν μία πολύ χοντρική προσέγγιση («μηδενικής τάξης») μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\frac{\partial I_\nu}{\partial z} \cong 0$, που σημαίνει ότι είμαστε αρκετά βαθιά μέσα στην ατμόσφαιρα.

$$\text{Τότε, } I_\nu^{(0)}(z, \mu) \cong S_\nu^{(0)}(T)$$

Εφόσον αυτό είναι ανεξάρτητο της γωνίας (άρα και του μ) η μέση ένταση μηδενικής τάξης προσέγγισης είναι

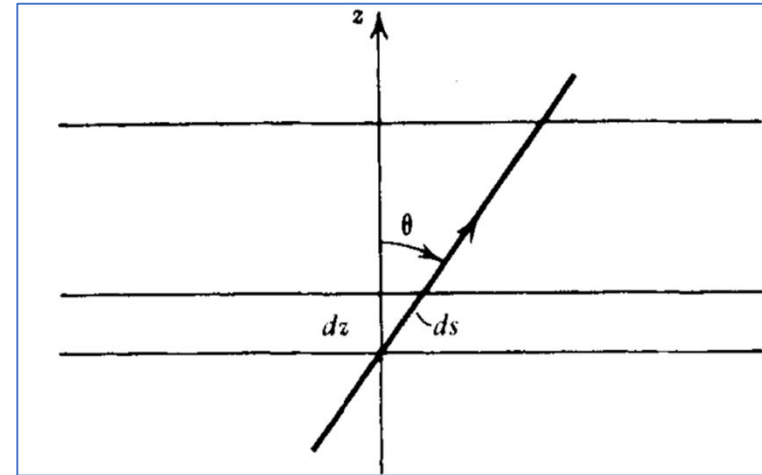
$$J_\nu^{(0)} = S_\nu^{(0)}$$

Από τη σχέση $S_\nu = \frac{\alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}$ προκύπτει ότι σε αυτή τη προσέγγιση έχουμε:

$$I_\nu^{(0)} = S_\nu^{(0)} = B_\nu$$

➤ Τώρα μπορούμε να κάνουμε μία καλύτερη προσέγγιση («πρώτης τάξης») παίρνοντας $I_\nu^{(0)} = B_\nu$, οπότε

$$I_\nu^{(1)}(z, \mu) \approx B_\nu(T) - \frac{\mu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial z}$$



Σχήμα από Rybicky & Lightman

$$dz = \cos\theta ds \Rightarrow ds = \frac{dz}{\mu},$$

όπου $\mu = \cos\theta$

Τώρα θα υπολογίσουμε την (μονοχρωματική) ροή για αυτή τη προσέγγιση της ειδικής έντασης:

$$f_\nu(z) = \int I_\nu^{(1)}(z, \mu) \cos \theta d\Omega = \iint I_\nu^{(1)}(z, \mu) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\nu^{(1)}(z, \mu) \mu d\mu$$

$$\text{όπου } I_\nu^{(1)}(z, \mu) \approx B_\nu(T) - \frac{\mu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial z}$$

Το $B_\nu(T)$ δεν εξαρτάται από το μ , και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα είναι 0.

Οπότε, τελικά, για τη μονοχρωματική ροή έχουμε

$$f_\nu(z) = -\frac{2\pi}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial z} \int_{-1}^{+1} \mu^2 d\mu \\ = -\frac{4\pi}{3(\alpha_\nu + \sigma_\nu)} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial z} \\ = -\frac{4\pi}{3(\alpha_\nu + \sigma_\nu)} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z}$$

Για τη βολομετρική ροή προκύπτει:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^\infty f_\nu(z) d\nu \\ &= -\frac{4\pi}{3} \frac{\partial T}{\partial z} \int_0^\infty (\alpha_\nu + \sigma_\nu)^{-1} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \end{aligned}$$

Μπορούμε να γράψουμε αυτή τη σχέση πιο βολικά, ως εξής:

$$f(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_R} \frac{\partial T}{\partial z}$$

Προσέγγιση Roseland για τη ροή ακτινοβολίας

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό

$$\frac{1}{\alpha_R} \equiv \frac{\int_0^\infty (\alpha_\nu + \sigma_\nu)^{-1} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}$$

$$\text{και το ότι } \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu = \frac{\partial}{\partial T} \int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{\partial B(T)}{\partial T} = \frac{4\sigma T^3}{\pi}$$

όπου σ η σταθερά Stefan-Boltzmann

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{1}{\alpha_R} \equiv \frac{\int_0^\infty (\alpha_\nu + \sigma_\nu)^{-1} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} \Rightarrow \frac{1}{\rho \bar{\kappa}_R} \equiv \frac{\int_0^\infty [\rho(\alpha_\nu + \sigma_\nu)]^{-1} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\bar{\kappa}_R} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}$$

που είναι η λεγόμενη μέση αδιαφάνεια Rosseland

Η μέση αδιαφάνεια Rosseland εξαρτάται μόνο από τη **χημική σύσταση**, την **πυκνότητα** και τη **θερμοκρασία** της ατμόσφαιρας.

Η μέση αδιαφάνεια Rosseland είναι ο σταθμισμένος αρμονικός μέσος της αδιαφάνειας σε διαφορετικές συχνότητες (δίνοντας έτσι μεγαλύτερο βάρος στις χαμηλότερες τιμές της αδιαφάνειας) με στατιστικό βάρος τον ρυθμό με τον οποίο το φάσμα του μέλανος σώματος μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία στη συγκεκριμένη συχνότητα.

Η χημική σύσταση μιας αστρικής ατμόσφαιρας

- Η χημική σύσταση της ατμόσφαιρας ενός άστρου παίζει σημαντικό ρόλο στη διάδοση της ακτινοβολίας μέσα από αυτήν και επομένως στη τελική διαμόρφωση του φάσματος που λαμβάνουμε.
- Η χημική σύσταση μιας αστρικής ατμόσφαιρας καθορίζεται από τη χημική σύσταση του μοριακού νέφους από το οποίο δημιουργήθηκε το άστρο (αυτό ισχύει για άστρα της ΚΑ και για τις περισσότερες εξελικτικές φάσεις των άστρων. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που θα συζητήσουμε αργότερα που υλικό από το εσωτερικό του άστρου –προϊόν θερμοπυρηνικών αντιδράσεων- καταλήγει στην ατμόσφαιρα μέσω ρευμάτων μεταφοράς).
- Ορίζουμε ως **X** το λόγο της μάζας του υδρογόνου ενός άστρου προς τη συνολική μάζα του άστρου
- ως **Y** τον λόγο της μάζας του ηλίου ενός άστρου προς τη συνολική μάζα του άστρου
- ως **Z** τον λόγο της μάζας όλων των στοιχείων που είναι βαρύτερα από το ήλιο «μέταλλα») προς τη συνολική μάζα του άστρου
- Προφανώς $X+Y+Z=1$

Πηγές αδιαφάνειας στις αστρικές ατμόσφαιρες

(α) bound-bound transitions: παράγουν φασματικές γραμμές. Στις ψηλές θερμοκρασίες που συναντάμε στο εσωτερικό των άστρων, είναι αμελητέες, αλλά στις ψυχρότερες περιοχές (ατμόσφαιρα) μπορεί να είναι σημαντικές. Ακόμα και σε ψηλές θερμοκρασίες (10^6K), όπου ο ιονισμός είναι υψηλός και αναμένονται λίγες διακριτές μεταβάσεις, σε κάποιες πυκνότητες μπορεί το κ_{bb} μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το κ_{ff} . Δεν υπάρχουν αναλυτικοί τύποι για το κ_{bb} .

(β) bound-free transitions: (φωτοϊονισμός): η απλούστερη περίπτωση είναι ο ιονισμός του ατόμου του υδρογόνου ($\rightarrow p + e^-$). Ο Kramers χρησιμοποιώντας κλασική φυσική υπολόγισε τον συντελεστή απορρόφησης για bf transitions για το H και για ιόντα με ένα μόνο e^- . Κατά προσέγγιση, ο ίδιος τύπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πιο πολύπλοκα συστήματα (όπου χρησιμοποιείται μία τιμή ενεργού πυρηνικού φορτίου Z' για να λάβει έστω μερικά υπόψη το electron screening). Αργότερα, ο Gaunt υπολόγισε κβαντομηχανικές διορθώσεις g_{bf} (~ 1).

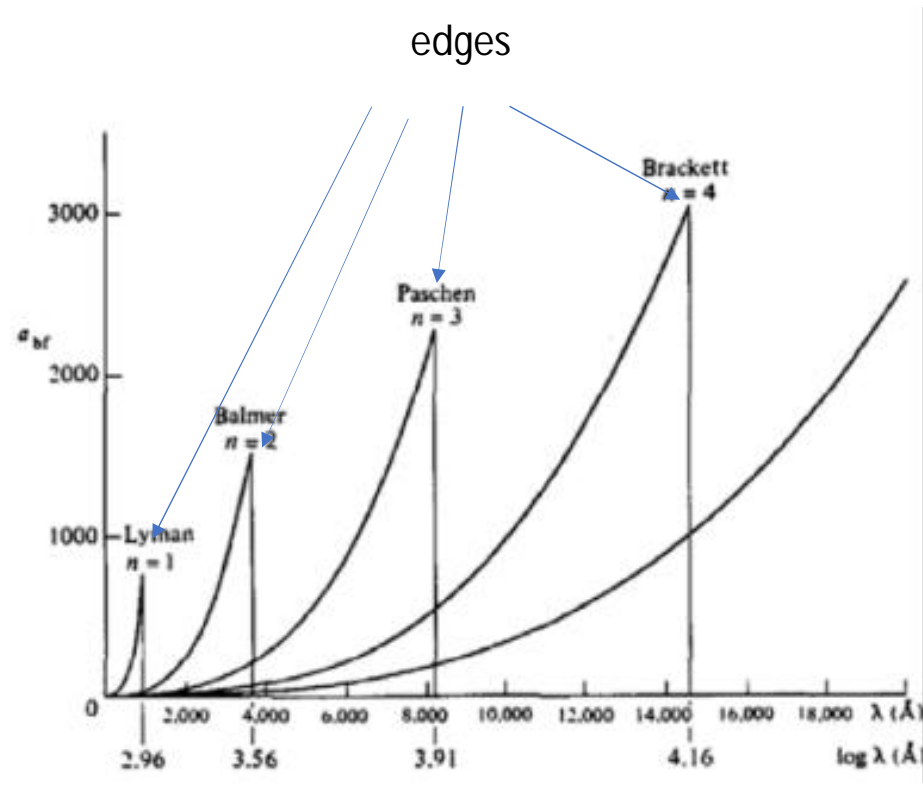
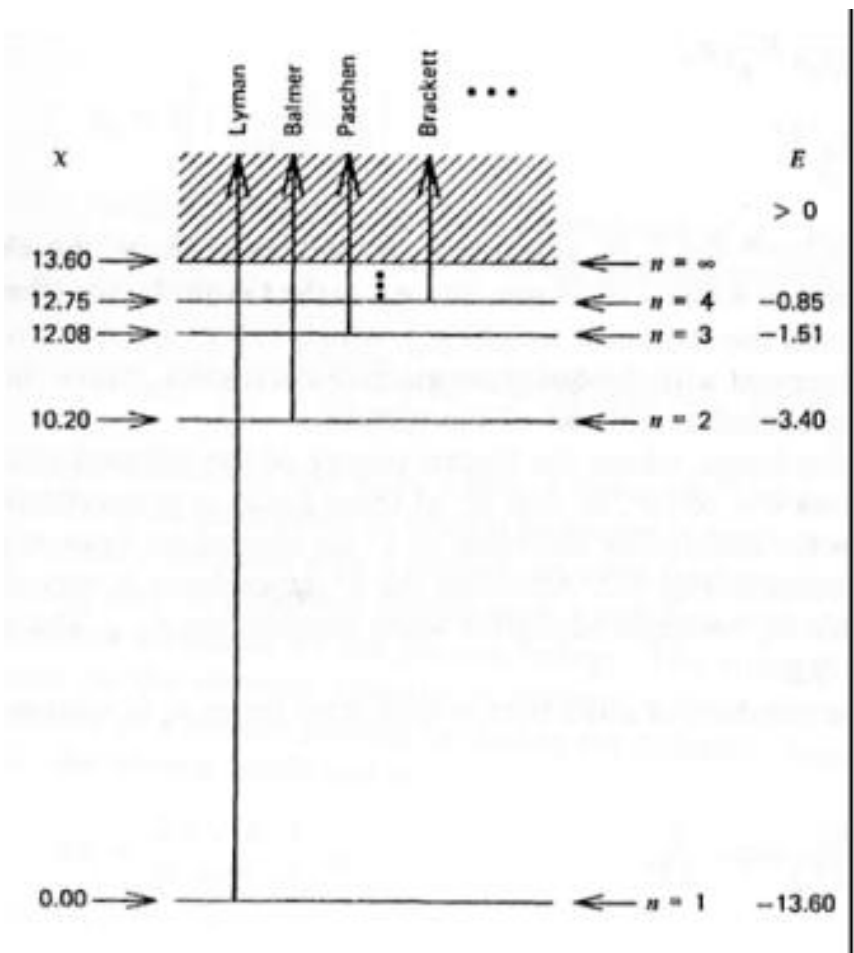
Τελικά, ο συντελεστής απορρόφησης είναι

$$\alpha_{bf} = \frac{64\pi^4 m e^{10}}{3\sqrt{3} c^4 h^6} Z'^4 \frac{g_{bf}}{n^5} \lambda^3 \propto \lambda^3 n^{-5} (\lambda < \lambda_n)$$

$$\text{όπου } \lambda_n = \frac{ch^3 n^2}{2\pi^2 m e^4 Z'^2}$$

είναι το μ.κ. του φωτονίου που έχει την ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για ιονισμό από το επίπεδο διέγερσης n .

Συντελεστής α_{bf} για υδρογονοειδή άτομα



Από Novotny Introduction to stellar atmospheres and stellar interiors

Πως θα υπολογίσουμε την αδιαφάνεια κ_{bf} από τον συντελεστή απορρόφησης:

Για να την υπολογίσουμε, χρειαζόμαστε τα:

$$\left(\frac{N_{i,n}}{N_i}\right)_{z'}, \left(\frac{N_i}{\sum N_i}\right)_{z'}, \frac{1}{A_{z'} m_H}, X_{z'}, \text{ όπου}$$

$$\left(\frac{N_{i,n}}{N_i}\right)_{z'} = \frac{\text{αρ.ατομων με βαθμο ιονισμού } i \text{ και σε κατάσταση διεγερσης } n}{\text{αρ.ατομων με βαθμο ιονισμού } i \text{ (δηλ.αθροισμα για όλες τις } n)}$$



Εξ. Boltzmann

$$\left(\frac{N_i}{\sum N_i}\right)_{z'} = \frac{\text{αρ.ατομων με βαθμο ιονισμού } i}{\text{αρ.ατομων (δηλ.αθροισμα για όλα τα } i)}$$



Εξ. Saha (διαδοχική χρήση της)

$$\frac{1}{A_{z'} m_H} = \frac{1}{\text{μαζικός αριθμός του ατομου } z' \times \text{μάζα του ατομου του H (=μάζα ατόμου του στοιχείου } z')}$$

$$X_{z'} = \frac{\text{συνολικη μαζα του στοιχειου } z'}{\text{συνολικη αστρικη μαζα}}$$



Χημική σύσταση του άστρου

Το γινόμενο των παραγόντων αυτών δίνει τον αριθμό των ατόμων με βαθμό ιονισμού i και σε κατάσταση διεγερσης n ανά μονάδα μάζας του άστρου.

Για να βρούμε την αδιαφάνεια, πρέπει να αθροίσουμε το παραπάνω γινόμενο για όλες τις καταστάσεις διέγερσης και για όλα τα στοιχεία Z' .

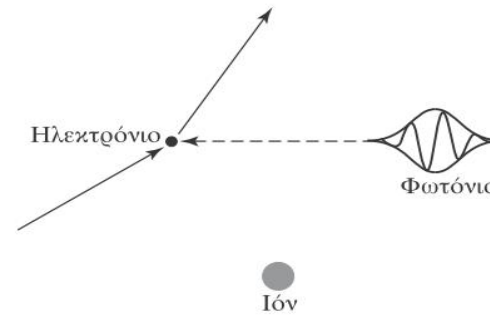
$$\kappa_{\text{bf}}(\lambda) = \sum_{Z'} \sum_n a_{\text{bf}}(\lambda, Z', n) \left(\frac{N_{i,n}}{N_i} \right)_{Z'} \left(\frac{N_i}{\sum N_i} \right)_{Z'} \frac{1}{A_{Z'} m_H} X_{Z'}$$

Μία άλλη σημαντική πηγή απορρόφησης στις αστρικές ατμόσφαιρες είναι το αρνητικό ιόν υδρογόνου H^-

Αυτό έχει μόνο μία δέσμια κατάσταση. Το επιπλέον e είναι δεσμευμένο στο άτομο του H με ενέργεια 0.754eV και το ιονίζον φωτόνιο πρέπει να έχει τουλάχιστον τόση ενέργεια (που αντιστοιχεί σε 16500\AA)

Στις ψυχρότερες αστρικές ατμόσφαιρες παίζουν σημαντικό ρόλο οι μοριακές μεταβάσεις. Επίσης, η φωτοδιάσπαση μορίων (photodissociation) σε πλανητικές ατμόσφαιρες.

(γ) free-free transitions (ελεύθερο e που περνά κοντά από ένα ιόν εκπέμπει ή απορροφά ενέργεια)



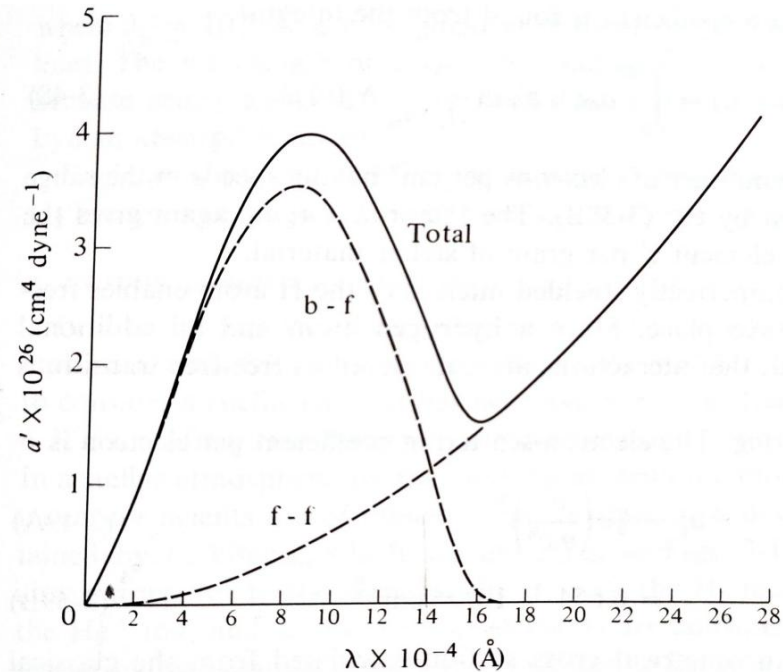
Η διαδικασία αυτή συμβαίνει όσο το e είναι κοντά στο ιόν. Ο συντελεστής απορρόφησης για ένα e με ταχύτητα ως προς τον πυρήνα μεταξύ ν και $\nu + d\nu$ είναι

$a_{ff}(\lambda, z', \nu) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e^6}{c^4 h m^2} z'^2 \frac{g_{ff}}{\nu} \lambda^3$, όπου g_{ff} ο παράγοντας Gaunt για free-free transitions.

Η αδιαφάνεια υπολογίζεται ολοκληρώνοντας για όλες τις ταχύτητες.

Οπότε $\kappa_{ff}(\lambda, z') = \int_0^\infty a_{ff}(\lambda, z', \nu) \frac{X_{z'}}{A_{z'} m_H} N_e(\nu) d\nu$

όπου $N_e(\nu) d\nu$ ο αριθμός e ανά μονάδα όγκου με ταχύτητες μεταξύ ν και $\nu + d\nu$ **ΕΔΩ**



Από Novotny Introduction to stellar atmospheres and stellar interiors

(δ) σκέδαση e (Thomson scattering)

(έχει υπολογιστεί σε άλλα μαθήματα)

Ο συντελεστής σκέδασης ανά e είναι $\alpha_e = \frac{8}{3}\pi \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 6.654 \times 10^{-29} m^2$

(ανεξάρτητο του μ.κ.).

Η αντίστοιχη αδιαφάνεια είναι κ_e (ή σ_e) = $6.654 \times 10^{-29} m^2 \frac{N_e}{\rho}$

(ε) σκέδαση Rayleigh

Αυτού του τύπου η σκέδαση παράγεται από την εξαναγκασμένη ταλάντωση τροχιακών ηλεκτρονίων λόγω του ηλεκτρικού πεδίου του προσπίπτοντος ΗΜ κύματος μήκους κύματος \gg από το μ.κ. μιας φασματικής γραμμής

κ_R (ή σ_R) = $\kappa_e \left(\frac{\lambda_L}{\lambda}\right)^4$, $\lambda_L = 1026 \text{ \AA}$ (σταθμισμένη μέση τιμή των γραμμών Lyman \rightarrow n=1)

Συζητήσαμε την αδιαφάνεια συναρτήσει του μ.κ. (ή της συχνότητας). Με βάση αυτές τις σχέσεις υπολογίζουμε τη μέση αδιαφάνεια Rosseland για κάθε είδος αδιαφάνειας.

Κατά προσέγγιση βρίσκεται ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\bar{\kappa}_{\text{bf}} = 4.34 \times 10^{21} \frac{\bar{g}_{\text{bf}}}{t} Z(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$$

όπου t ο «παράγοντας γκιλοτίνας», που περιγράφει το ότι όταν το άτομο είναι ιονιστεί πλήρως, παύει πια να συμμετέχει στις μεταβάσεις bf. Το t έχει τυπικές τιμές μεταξύ 1 και 100.

$$\bar{\kappa}_{\text{ff}} = 3.68 \times 10^{18} \bar{g}_{\text{ff}} (1 - Z)(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$$

$$\bar{\kappa}_{\text{H}^-} \approx 7.9 \times 10^{-34} (Z/0.02) \rho^{1/2} T^9 \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$$

$$\bar{\kappa}_{\text{es}} = 0.02(1 + X) \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$$

ρ η πυκνότητα μάζας του αστρικού υλικού και T η θερμοκρασία

Τελικά

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{\text{bb}} + \bar{\kappa}_{\text{bf}} + \bar{\kappa}_{\text{ff}} + \bar{\kappa}_{\text{e}} + \bar{\kappa}_{\text{H}^-}$$

Σχόλια

1. Τα $\bar{\kappa}_{bf}$ και $\bar{\kappa}_{ff}$ εξαρτώνται από το $\rho/T^{3.5} \rightarrow$ νόμος αδιαφάνειας Kramer
οπότε $\bar{\kappa} = \kappa_0 \rho/T^{3.5}$ για συγκεκριμένη χημική σύσταση
2. Το $\bar{\kappa}_{bf}$ εξαρτάται από το Z (άτομα με μεγάλο Z διατηρούν κάποια ηλεκτρόνια δεσμευμένα ακόμα και σε ψηλές θερμοκρασίες)
3. Το $\bar{\kappa}_{ff}$ εξαρτάται κυρίως από τα άτομα H+He ($\rightarrow X + Y = 1 - Z$), δηλ. αμελούμε τα βαρύτερα στοιχεία. Αυτή η προσέγγιση είναι δικαιολογημένη διότι η ff transition είναι σημαντική για μικρό Z . Επίσης για μεγάλα Z το $\bar{\kappa}_{bf}$ είναι πιο σημαντικό από το $\bar{\kappa}_{ff}$.
4. Η σκέδαση e γίνεται η πιο σημαντική πηγή αδιαφάνειας σε χαμηλή πυκνότητα ή/και ψηλή θερμοκρασία.
5. Θα δούμε ότι ο όρος $1+X$ που εμφανίζεται και στις δυο σχέσεις της προηγούμενης διαφάνειας, είναι η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων N_e
Υποθέτουμε ότι το H και το He είναι ιονισμένα. Τότε κάθε άτομο H ($A=1$) δίνει 1 e και κάθε άτομο He ($A=4$) δίνει 2 e .

Ο αριθμός ηλεκτρονίων ανά μονάδα μάζας του αστρικού υλικού είναι $\frac{N_e}{\rho} = \sum Z \frac{X_Z}{A_Z m_H} \Rightarrow$

$$N_e = \frac{\rho}{m_H} \left(X + \frac{2}{4} Y + \left(\sim \frac{1}{2} \right) Z \right) \text{ αλλά επίσης } X + Y + Z = 1, \text{ οπότε } N_e = \frac{\rho}{2m_H} (1 + X)$$

Έχοντας τώρα βρει τη μέση αδιαφάνεια (και το αντίστοιχο κατακόρυφο οπτικό βάθος) μπορούμε να γράψουμε την Ε.Δ.Α. για γκρίζα παραλληλεπίπεδη ατμόσφαιρα ολοκληρώνοντας την

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \text{ για όλα τα } \nu \text{ (ή } \lambda), \text{ οπότε}$$

$$\cos\theta \frac{dI}{d\tau_\nu} = S - I, \text{ όπου } I = \int I_\nu d\nu \text{ και } S = \int S_\nu d\nu$$