Φυσική των αστέρων
Μάθημα 3

α.ε. 2023-24

Συντελεστές Einstein

$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu$ νόμος του Kirchhoff → σχέση μεταξύ απορρόφησης και εκπομπής για θερμικό πομπό→ σε μικροσκοπικό επίπεδο → συντελεστές Einstein

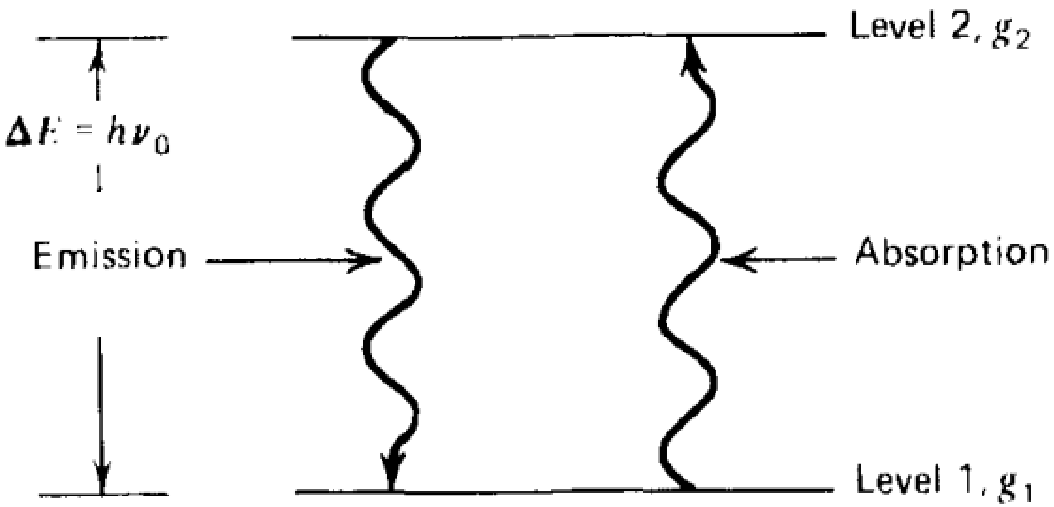
- Απλή περίπτωση δύο διακριτών ενεργειακών επιπέδων, το πρώτο με ενέργεια E και στατιστικό βάρος g_1 και το δεύτερο με ενέργεια $E + h\nu_o$, και στατιστικό βάρος g_2
- Το σύστημα μεταβαίνει από το επίπεδο 1 στο 2 απορροφώντας ένα φωτόνιο ενέργειας $h\nu_o$, ενώ όταν η μετάβαση είναι από το 2 στο 1, ένα φωτόνιο ενέργειας $h\nu_o$ εκπέμπεται.
- Ο Einstein αναγνώρισε τρεις διαδικασίες: αυθόρμητη εκπομπή, απορρόφηση και εξαναγκασμένη εκπομπή.

1. Αυθόρμητη Εκπομπή

- Συμβαίνει όταν το σύστημα είναι στο επίπεδο 2 και μεταβαίνει στο επίπεδο 1 εκπέμποντας ένα φωτόνιο, ακόμα και αν δεν υπάρχει πεδίο ακτινοβολίας.
- Ο A-συντελεστής Einstein A_{21} δίνει τη πιθανότητα να συμβεί αυτή η μετάβαση ανά μονάδα χρόνου (s^{-1}).

2. Απορρόφηση

- Συμβαίνει παρουσία πεδίου ακτινοβολίας: το σύστημα από το επίπεδο 1 μεταβαίνει στο επίπεδο 2 απορροφώντας ένα φωτόνιο $h\nu_o$.
- Περιμένουμε ότι αυτή η πιθανότητα θα είναι ανάλογη της αριθμητικής πυκνότητας φωτονίων (ή τη μέση ένταση) συχνότητας ν_o.

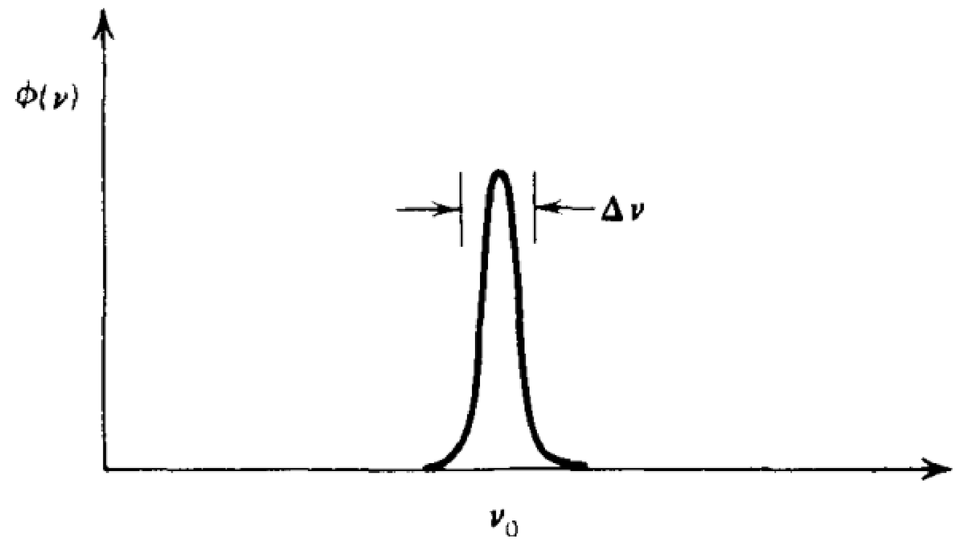


Rybicki and Lightman, Radiative processes in Astrophysics

- Η διαφορά ενέργειας ανάμεσα στα δυο επίπεδα δεν περιγράφεται στη πραγματικότητα από μια συνάρτηση δ (δηλ. δεν είναι άπειρα αιχμηρή) αλλά από μία συνάρτηση «προφίλ» $\varphi(\nu)$ (line profile) που έχει αιχμηρό μέγιστο στο $\nu = \nu_o$.
- Θεωρούμε ότι η συνάρτηση είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα, δηλ.

$$\int_0^\infty \phi(\nu)d\nu = 1$$

Οι μηχανισμοί που καθορίζουν τη συνάρτηση αυτή θα συζητηθούν αργότερα.



Άρα η πιθανότητα να συμβεί αυτή η μετάβαση (απορρόφηση) ανά μονάδα χρόνου θα δίνεται από το γινόμενο του λεγόμενου B-συντελεστή Einstein B_{12} και της μέσης έντασης, $\bar{J}$:

$B_{12}\bar{J}$ (σε s^{-1}), όπου $\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu h\nu_o \phi(\nu)d\nu$

υπενθύμιση $J_\nu = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{I}_\nu d\Omega$

3. Εξαναγκασμένη εκπομπή

- Ο Einstein βρήκε ότι για να καταλήξει στον νόμο του Planck, έπρεπε να θεωρήσει άλλη μια διαδικασία εκπομπής, την εξαναγκασμένη εκπομπή. Για να συμβεί αυτή απαιτείται η ύπαρξη πεδίου ακτινοβολίας όπως για την απορρόφηση.
- η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου να συμβεί εξαναγκασμένη εκπομπή ανά μονάδα χρόνου δίνεται από το $B_{21}\bar{J}$ (σε s^{-1})

4. Σχέσεις μεταξύ των συντελεστών Einstein A_{21}, B_{12}, B_{21}

- Σε θερμοδυναμική ισορροπία, ο αριθμός των μεταβάσεων ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου από την κατάσταση 1 στην 2 θα ισούται με τον αριθμό των μεταβάσεων από την 2 στην 1. Έστω n_1 και n_2 η αριθμητική πυκνότητα ατόμων στο επίπεδο 1 και στο επίπεδο 2 αντίστοιχα.
- Τότε $n_1 B_{12}\bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21}\bar{J} \Rightarrow \bar{J} = \dfrac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21})-1}$
- Σε θερμοδυναμική ισορροπία ισχύει ότι **(από ΣΦ. Δείτε και επόμενο μάθημα)**

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp(-E/kT)}{g_2 \exp[-(E+h\nu_0)/kT]} = \frac{g_1}{g_2}\exp(h\nu_0/kT)$$

Άρα

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21})\exp(h\nu_0/kT)-1}$$

- Σε θερμοδυναμική ισορροπία έχουμε δει ότι $J_\nu = B_\nu$ (*). Επίσης $\bar{J} = B_\nu$ διότι το B_ν μεταβάλλεται αργά στη κλίμακα του $\Delta\nu$.

(*) Είδαμε ότι σε ΘΙ $I_\nu = B_\nu$. Επίσης, για ισοτροπικό πεδίο $J = I$, οπότε τελικά $J_\nu = B_\nu$

$$B_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21})\exp(h\nu_0/kT)-1}$$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

για να ταυτίζεται με τη συνάρτηση Planck θα πρέπει

Παρόλο που για να βγάλουμε τις σχέσεις αυτές υποθέσαμε ΘΙ, δεν υπάρχει τελικά εξάρτηση από το Τ και μπορώ να τις χρησιμοποιήσω και εκτός ΘΙ

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}$$

σχέσεις Einstein

Αν έχω εκπομπή θα έχω και απορρόφηση

- Αυτές οι σχέσεις συνδέουν μεταξύ τους ατομικές ιδιότητες (A_{21}, B_{12}, B_{21}) , χωρίς αναφορά στη θερμοκρασία (αντίθετα από το νόμο του Kirchhoff).
- Θα πρέπει λοιπόν να ισχύουν ανεξάρτητα αν τα άτομα βρίσκονται σε Θ.Ι. ή όχι. Τέτοιου είδους εξισώσεις λέγονται συνθήκες λεπτομερούς ισορροπίας και συνδέουν μία μικροσκοπική διαδικασία με την αντίστροφή της (εδώ εκπομπή και απορρόφηση) .
- Αν βρούμε τον ένα από τους συντελεστές Einstein, μπορούμε να υπολογίσουμε τους άλλους δύο με τις σχέσεις αυτές. **ΕΔΩ**

Συντελεστές εκπομπής και απορρόφησης συναρτήσει των συντελεστών Einstein

(α) συντελεστής εκπομπής

- Για να υπολογίσουμε το j_ν πρέπει να υποθέσουμε την κατανομή της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας ως προς τη συχνότητα κατά την αυθόρμητη μετάβαση από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 1.
- Η απλούστερη υπόθεση είναι ότι αυτή η κατανομή ταυτίζεται με το αντίστοιχο προφίλ που περιγράφει την απορρόφηση, $\varphi(\nu)$.
- Η ενέργεια που εκπέμπεται ανά στοιχειώδη όγκο dV, στοιχειώδη περιοχή συχνοτήτων $d\nu$, στοιχειώδη χρόνο dt, στοιχειώδη στερεά γωνία dΩ είναι εξ ορισμού $j_\nu dV d\Omega d\nu dt$
- Σε μικροσκοπικό επίπεδο η εκπεμπόμενη ενέργεια θα είναι ο αριθμός των ατόμω ν στην κατάσταση 2, $n_2 dV$, επί την πιθανότητα εκπομπής που είναι ίση με $A_{21} dt$, επί dΩ/4π για ισοτροπική εκπομπή, επί την ενέργεια ανά μετάβαση που δίνεται από την κανονικοποιημένη συνάρτηση προφίλ $\phi(\nu)$ επί $h\nu_o$, που αντιστοιχεί στο κέντρο της γραμμής, δηλ. $(h\nu_0/4\pi)\phi(\nu)n_2 A_{21} dV d\Omega d\nu dt$
- *Άρα*

$$\boxed{j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu)}$$

(β) συντελεστής απορρόφησης

- Η πιθανότητα μετάβασης από το επίπεδο 1 στο 2 (απορρόφηση) είναι ίση με $B_{12}\bar{J}$, όπου $\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu, \kappa\alpha\iota\; J_\nu = \frac{1}{4\pi}\int I_\nu d\Omega$

- Η ενέργεια που απορροφάται σε χρόνο dt, όγκο dV, συχνότητα dν και στερεά γωνία dΩ θα είναι

$$n_1 dV B_{12}\bar{J} dt = dV dt\, n_1 B_{12}\,(4\pi)^{-1}\int\int d\Omega d\nu h\nu_0 \phi(\nu) I_\nu =$$
$$\mathrm{d}V dt\, n_1 B_{12}(4\pi)^{-1}\int d\Omega \int h\nu_0 d\nu\, \phi(\nu) I_\nu$$

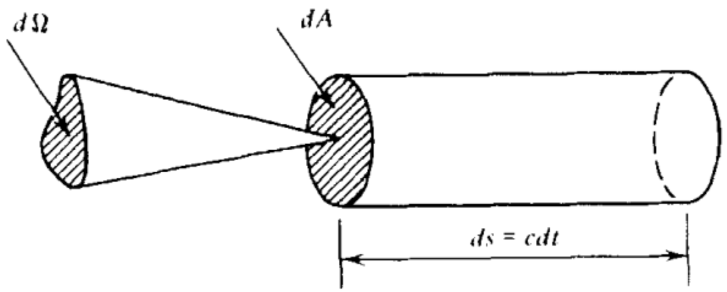
- Άρα, η στοιχειώδης ενέργεια που απορροφάται από τη δέσμη ανά dν και dΩ θα είναι («πετάω» τα ολοκληρώματα) $dE\alpha\pi o\rho = dV\, dt\, d\Omega\, d\nu\, \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12}\phi(\nu) I_\nu =$
$dA\; ds dt d\Omega d\nu \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12}\phi(\nu) I_\nu$

(όπου $dV = dA\, ds$)

Συγκρίνοντας με τις $dE = I_\nu dA dt d\Omega d\nu$

$\kappa\alpha\iota\; dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds \quad dV = dA\, ds$

προκύπτει $\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12}\phi(\nu)$



- Στις παραπάνω σχέσεις δεν λάβαμε υπόψη την εξαναγκασμένη εκπομπή. Παρόλο που είναι *εκπομπή*, είναι *ανάλογη της έντασης* όπως και η απορρόφηση και επηρεάζει μόνο φωτόνια κατά μήκος μιας δεδομένης δέσμης, οπότε την **χειριζόμαστε σαν αρνητική απορρόφηση.**
- Η εξαναγκασμένη εκπομπή αναμένουμε να είναι ανάλογη με την πυκνότητα ατόμων στη κατάσταση 2, n_2, και με τη πιθανότητα να συμβεί (ανά μονάδα χρόνου) που είναι ίση με $B_{21}\bar{J}$
- Οπότε, ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν, καταλήγουμε στο ότι ο συντελεστής απορρόφησης μπορεί να γραφεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει και την εξαναγκασμένη εκπομπή, ως εξής:

$$\boxed{\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu)(n_1 B_{12} - n_2 B_{21})}$$

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας με τους συντελεστές Einstein

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \rightarrow \frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu) - \frac{h\nu}{4\pi}(n_1 B_{12} - n_2 B_{21})\phi(\nu) I_\nu$$

Η συνάρτηση πηγής θα είναι ίση με $S_\nu = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Einstein

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}$$

μπορούμε να γράψουμε τον συντελεστή απορρόφησης και τη συνάρτηση πηγής ως εξής:

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} (1 - g_1 n_2 / g_2 n_1) \phi(\nu)$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1}$$

Γενικευμένος νόμος του Kirchhoff

Ειδικές περιπτώσεις

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} (1 - g_1 n_2 / g_2 n_1) \phi(\nu)$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1}$$

1. <u>Θερμοδυναμική ισορροπία</u>

Αν η ύλη είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία (όχι απαραίτητα και με την ακτινοβολία) τότε ξέρουμε ότι ισχύει (n_1 σωμάτια στη κατάσταση 1 και n_2 σωμάτια στη κατάσταση 2, με $\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1 = h\nu$)

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \Rightarrow \frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Αντικαθιστώντας στις ★ βρίσκουμε:

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \left[1 - \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right)\right] \phi(\nu)$$

Local thermodynamic equilibrium
LTE

$$S_\nu = B_\nu(T)$$

Η δεύτερη σχέση απλά εκφράζει τον ν. του Kirchhoff $j_\nu = \alpha_\nu \mathrm{B}_\nu(T)$

Προσέξτε όμως τον διορθωτικό παράγοντα στον συντελεστή απορρόφησης, που οφείλεται στην εξαναγκασμένη εκπομπή

Ειδικές περιπτώσεις

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12}(1 - g_1 n_2/g_2 n_1)\phi(\nu)$$
$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1\right)^{-1}$$

2. Μη Θερμική εκπομπή

$$\frac{n_1}{n_2} \neq \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Σε ένα πλάσμα, για παράδειγμα, αυτό θα συνέβαινε αν τα σωματίδια που ακτινοβολούν δεν ακολουθούν μια κατανομή ταχυτήτων Maxwell, ή αν οι ατομικοί πληθυσμοί δεν ικανοποιούν τον νόμο κατανομής Maxwell-Boltzmann.

Ο όρος επίσης χρησιμοποιείται όταν έχουμε και σκέδαση.

Ειδικές περιπτώσεις

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12}(1 - g_1 n_2/g_2 n_1)\phi(\nu)$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1\right)^{-1}$$

3. Αντιστροφή πληθυσμών – maser/laser

Για ένα σύστημα σε Θ.Ι. έχουμε ότι

$$\frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} = \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right) < 1 \Rightarrow \frac{n_1}{g_1} > \frac{n_2}{g_2}$$

Αλλά και εκτός ΘΙ συνήθως ικανοποιείται αυτή η ανισότητα. Τέτοιοι πληθυσμοί είναι «κανονικοί».

Όταν όμως $\frac{n_1}{g_1} < \frac{n_2}{g_2}$ τότε λέμε ότι έχουμε αντιστροφή πληθυσμών

Τότε α_ν<0 και η δέσμη πάντα ενισχύεται καθώς διαδίδεται.

Αυτή η ενίσχυση μπορεί να είναι πολύ μεγάλη (ο εκθέτης θετικός $I_\nu(s) = I_\nu(s_0)\exp\left[-\int_{s_0}^{s} \alpha_\nu(s')ds'\right]$)