Φυσική των αστέρων
Μάθημα 7

α.ε. 2023-24

Παραδείγματα- Ενδεικτικές Ασκήσεις
Στο μάθημα λύθηκαν οι ασκήσεις

1. Δείξτε πως προκύπτει η συνάρτηση B_λ εκφρασμένη συναρτήσει του μήκους κύματος, ξεκινώντας από τη B_ν .

   Υπόδειξη: $B_\nu d\nu = B_\lambda d\lambda$

2. (α) Βρείτε μία έκφραση για την $n_\lambda d\lambda$, δηλ. την αριθμητική πυκνότητα των φωτονίων μέλανος σώματος (τον αριθμό των φωτονίων μέλανος σώματος ανά m^3) με μήκος κύματος μεταξύ λ και $\lambda + d\lambda$.

   (β) Βρείτε τον συνολικό αριθμό των φωτονίων μέσα σε έναν φούρνο κουζίνας σε θερμοκρασία 200° C, υποθέτοντας έναν όγκο $0{,}5 m^3$.

   Δίνεται ότι $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2{,}404$

   Απάντηση: (α) $n = 2{,}404 \frac{8\pi k^3 T^3}{h^3 c^3}$, (β) $N \approx 1{,}1 \times 10^{15}$ φωτόνια

3. (α) Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης για να βρείτε τη συνολική αριθμητική πυκνότητα n φωτονίων μέλανος σώματος σε όλα τα μήκη κύματος. Δείξτε επίσης ότι η μέση ενέργεια ανά φωτόνιο u/n είναι

$$\frac{u}{n} = \frac{\pi^4 kT}{15(2.404)} = 2.70kT$$

(β) Βρείτε τη μέση ενέργεια ανά φωτόνιο μέλανος σώματος στο κέντρο του Ήλιου, όπου T = 1.57 × 107 K και στην ηλιακή φωτόσφαιρα, όπου T=5777K. Εκφράστε τις απαντήσεις σας σε eV.

(Απάντηση: 3.65keV, 1.34eV)

4. Χρησιμοποιώντας την ενεργό ταχύτητα υ_{rms} , εκτιμήστε τη μέση ελεύθερη διαδρομή για τα μόρια αζώτου στο αμφιθέατρό σας σε θερμοκρασία δωματίου (300 K). Ποιος είναι ο μέσος χρόνος μεταξύ των κρούσεων;

Λάβετε την ακτίνα ενός μορίου αζώτου να είναι 0.1 nm και την πυκνότητα του αέρα να είναι 1.2 kg m^{-3}. Ένα μόριο αζώτου περιέχει 28 νουκλεόνια (πρωτόνια και νετρόνια).

Απάντηση: $\bar{l} = 3{,}10 \times 10^{-7}\mathrm{m}$

$\bar{\tau} \approx 6 \times 10^{-10}\mathrm{s}$

5. Σύμφωνα με ένα μοντέλο για τον Ήλιο, η κεντρική πυκνότητα είναι 1.53 × 10 5 kg m –3 και η μέση αδιαφάνεια Rosseland στο κέντρο είναι 0.217 m 2 kg –1 .

(α) Υπολογίστε τη μέση ελεύθερη διαδρομή ενός φωτονίου στο κέντρο του Ήλιου.

(β) Υπολογίστε τον μέσο χρόνο που χρειάζεται ένα φωτόνιο για να διαφύγει από τον Ήλιο εάν η μέση ελεύθερη διαδρομή παρέμενε σταθερή για το ταξίδι του φωτονίου προς την επιφάνεια. (Αγνοήστε το γεγονός ότι συγκεκριμένα φωτόνια συνεχώς καταστρέφονται και δημιουργούνται μέσω απορρόφησης, σκέδασης και εκπομπής).

Απάντηση: (α) $\bar{l} = 3 \times 10^{-5}\mathrm{m}$, (β) $\bar{\tau} \approx 1.5 \times 10^{6}\mathrm{y}$

ΜΕΧΡΙ ΕΔΩ!
τα υπόλοιπα τη ΔΕ 6/11

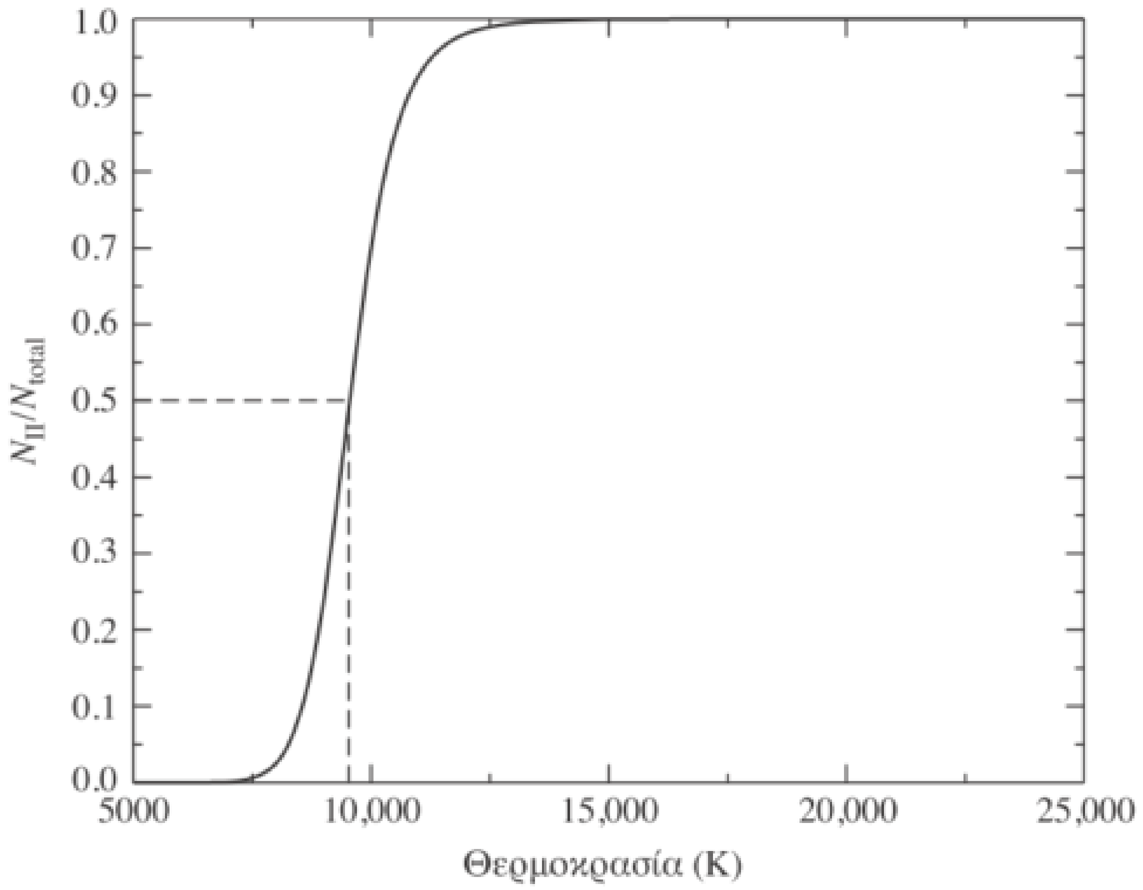
6. Θεωρήστε ένα κουτί με ηλεκτρικά ουδέτερα άτομα αερίου υδρογόνου το οποίο διατηρείται σε σταθερό όγκο V. Σε αυτή την απλή περίπτωση, ο αριθμός των ελεύθερων ηλεκτρονίων πρέπει να είναι ίσος μετον αριθμό των ιόντων HII : $n_e V = N_{\mathrm{II}}$. Επίσης, ο συνολικός αριθμός των ατόμων του υδρογόνου (τόσο ουδέτερων όσο και ιονισμένων) N_t σχετίζεται με την πυκνότητα του αερίου μέσω της $N_t = \rho V/\left(m_p + m_e\right) \simeq \rho V/m_p$, όπου m_p είναι η μάζα του πρωτονίου. Έστω ότι η πυκνότητα του αερίου είναι $10^{-6}\mathrm{kgm}^{-3}$, που είναι η τυπική τιμή για τη φωτόσφαιρα ενός άστρου A0.

(α) Εξάγετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού για το κλάσμα των ιονισμένων ατόμων, ξεκινώντας από την εξίσωση Saha:

$$\left(\frac{N_{\mathrm{II}}}{N_t}\right)^2 + \left(\frac{N_{\mathrm{II}}}{N_t}\right)\left(\frac{m_p}{\rho}\right)\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_{\mathrm{I}}/kT} - \left(\frac{m_p}{\rho}\right)\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_{\mathrm{I}}/kT} = 0.$$

(β) Λύστε την εξίσωση δευτέρου βαθμού του μέρους (α) ως προς το κλάσμα του ιονισμένου υδρογόνου

$\frac{N_{\mathrm{II}}}{N_t}$, για ένα εύρος θερμοκρασιών μεταξύ 5000 K και 25,000 K. Σχεδιάστε μια γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων σας και συγκρίνετε με το παρακάτω σχήμα (C&O)



1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
N_{II}/N_{total}
5000
10,000
15,000
20,000
25,000
Θερμοκρασία (K)

$$\frac{N_{\mathrm{II}}}{N_t} = \frac{N_{\mathrm{II}}}{N_{\mathrm{I}} + N_{\mathrm{II}}} = \frac{N_{\mathrm{II}}/N_{\mathrm{I}}}{1 + N_{\mathrm{II}}/N_{\mathrm{I}}}, \Rightarrow$$

$$\frac{N_{\mathrm{II}}}{N_t}\left(1 + \frac{N_{\mathrm{II}}}{N_{\mathrm{I}}}\right) = \frac{N_{\mathrm{II}}}{N_{\mathrm{I}}}.$$

Εξίσωση Saha

$$\frac{N_{\mathrm{II}}}{N_{\mathrm{I}}} = \frac{2Z_{\mathrm{II}}}{n_e Z_{\mathrm{I}}}\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_{\mathrm{I}}/kT}.$$

$$n_e = N_{\mathrm{II}}/V$$

$$N_t = \rho V/(m_p + m_e) \simeq \rho V/m_p$$

$$n_e = \frac{N_{\mathrm{II}}\rho}{N_t m_p}$$

$$\frac{N_{\mathrm{II}}}{N_{\mathrm{I}}} = \frac{N_t}{N_{\mathrm{II}}}\frac{m_p}{\rho}\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_{\mathrm{I}}/kT}$$

$$\frac{N_{II}}{N_t}\left(1+\frac{N_{II}}{N_I}\right)=\frac{N_{II}}{N_I}.$$

$$\frac{N_{II}}{N_I}=\frac{N_t}{N_{II}}\frac{m_p}{\rho}\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2}e^{-\chi_I/kT}$$

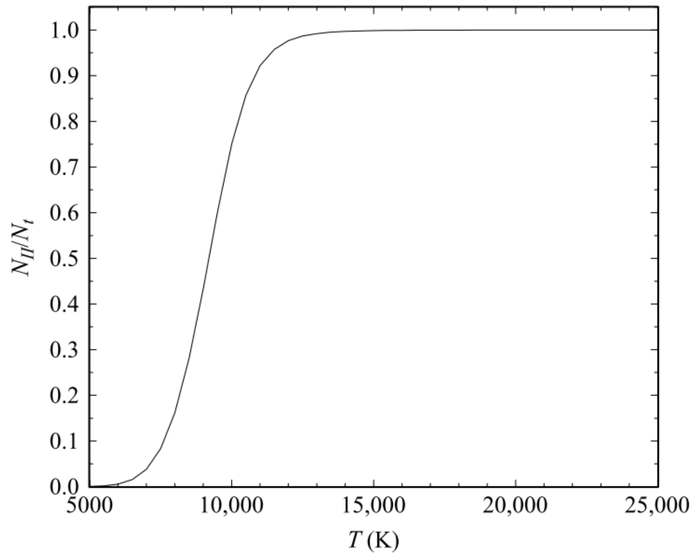
$$\frac{N_{II}}{N_t}\left(1+\frac{N_I}{N_I}\right)=\frac{N_{II}}{N_t}\left[1+\frac{N_t}{N_{II}}\frac{m_P}{\rho}\left(\frac{2nm_e kT}{h^2}\right)^{-3/2}e^{-x_I/kT}\right]=\frac{N_t}{N_{II}}\frac{m_P}{\rho}\left(\frac{2nm_e kT}{h^2}\right)^{-3/2}e^{-x_I/kT}$$

Πολ/ζουμε με N_{II}/N_t

$$\Rightarrow \left(\frac{N_{II}}{N_t}\right)^2+\left(\frac{N_{II}}{N_t}\right)\left(\frac{m_p}{\rho}\right)\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2}e^{-\chi_I/kT}-\left(\frac{m_p}{\rho}\right)\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2}e^{-\chi_I/kT}=0.$$

β) τριώνυμο της μορφής $ax^2 + bx + c = 0$

με



$$a = 1$$

$$b = \frac{m_p}{\rho}\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_1/kT}$$

$$c = -b.$$

Οπότε η λύση γραφεται: $$\frac{N_{\rm II}}{N_t} = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) = \frac{b}{2}\left(\sqrt{1 + 4/b} - 1\right)$$

7. Βρείτε τον αριθμό των ατόμων νατρίου πάνω από κάθε τετραγωνικό μέτρο της φωτόσφαιρας του Ήλιου από μετρήσεις των γραμμών απορρόφησης 330.238 nm και 588.997 nm του νατρίου. Οι τιμές $T = 5800\,K$ και $P_e = 1 Nm^{-2}$ χρησιμοποιήθηκαν για τη θερμοκρασία και την πίεση των ηλεκτρονίων αντίστοιχα, για να κατασκευαστεί η καμπύλη ανάπτυξης που ακολουθεί στην επόμενη διαφάνεια και θα τις χρησιμοποιήσετε και στους υπολογισμούς σας.

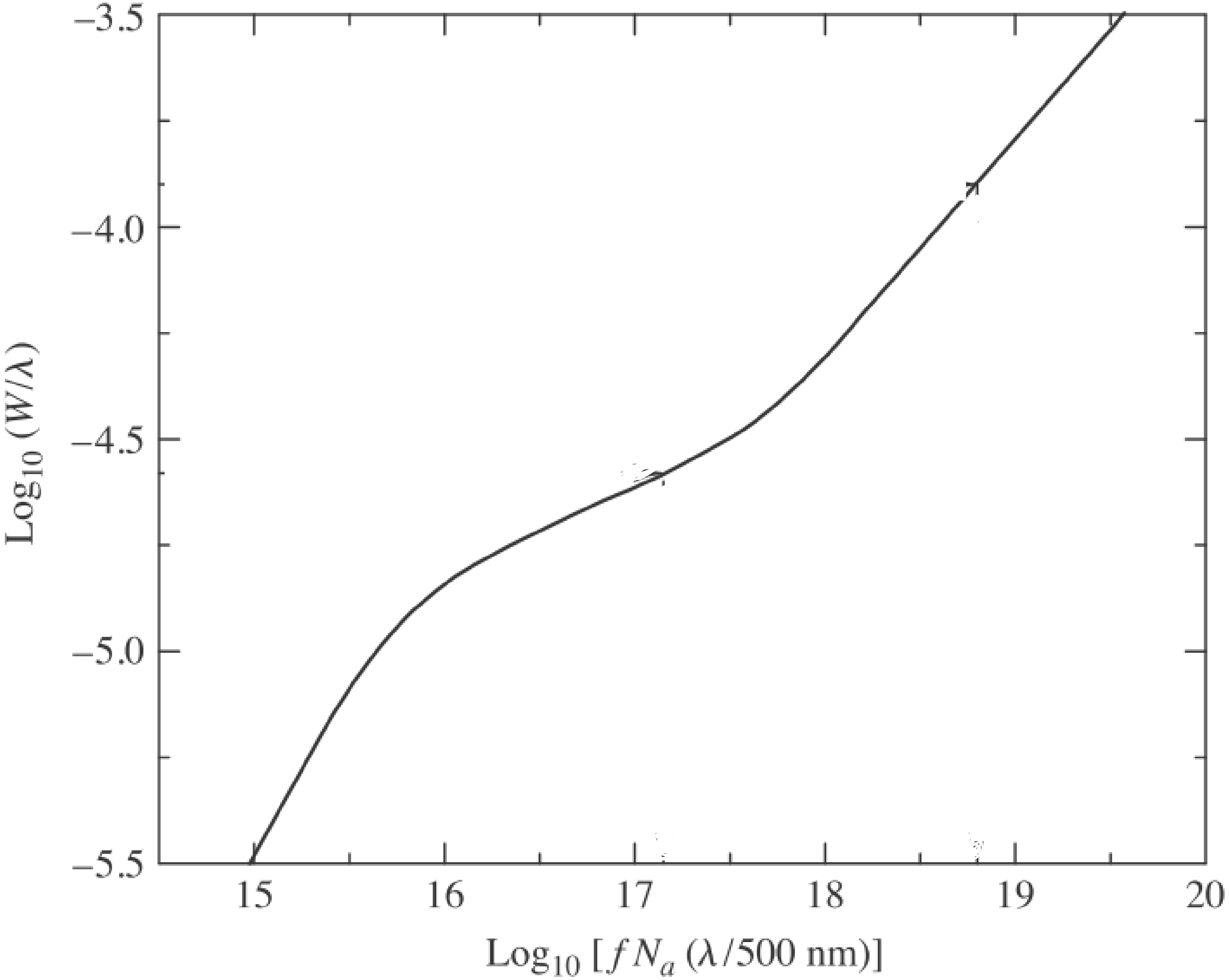
Δίνονται οι εξής πληροφορίες:

λ (nm)	W (nm)	f	$\log_{10}(W/\lambda)$	$\log_{10}[f(\lambda/500\text{ nm})]$
330.238	0.0088	0.0214	−4.58	−1.85
588.997	0.0730	0.645	−3.90	−0.12

Οι συναρτήσεις επιμερισμού για ουδέτερο και μονά ιονισμένο άτομο Na είναι $Z_I = 2.4, Z_{II} = 1.0$

Απάντηση: $\log N_a \approx 18{,}96$

Μια γενική καμπύλη ανάπτυξης για τον Ήλιο.



βλ. παράδειγμα 6.5.5
C & O

Σχήμα από Carroll & Ostlie

8. Η πλάτυνση πίεσης (λόγω της παρουσίας των ηλεκτρικών πεδίων των γειτονικών ιόντων) είναι ασυνήθιστα αποδοτική στις φασματικές γραμμές του υδρογόνου. Χρησιμοποιώντας τη γενική καμπύλη ανάπτυξης για τον Ήλιο με αυτές τις πλατιές γραμμές απορρόφησης του υδρογόνου θα έχει ως αποτέλεσμα μια υπερεκτίμηση του ποσού του διαθέσιμου υδρογόνου. Ο επόμενος υπολογισμός, παρ' όλα αυτά, δείχνει πόσο πολύ άφθονο είναι το υδρογόνο στον Ήλιο.

Θα χρησιμοποιηθούν δύο γραμμές απορρόφησης υδρογόνου, στο ηλιακό φάσμα, της σειράς Paschen.

λ (nm)	W (nm)	f
1093.8 (Paγ)	0.22	0.0554
1004.9 (Paδ)	0.16	0.0269

(α) Χρησιμοποιώντας τη γενική καμπύλη ανάπτυξης για τον Ήλιο της προηγούμενης άσκησης, βρείτε τον αριθμό των απορροφούντων ατόμων υδρογόνου ανά μονάδα επιφάνειας της φωτόσφαιρας (αυτά με τα ηλεκτρόνια να βρίσκονται αρχικά στο τροχιακό $n = 3$).

(β) Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις Boltzmann και Saha για να υπολογίσετε τον συνολικό αριθμό των ατόμων υδρογόνου πάνω από κάθε τετραγωνικό μέτρο της φωτόσφαιρας του Ήλιου.

Απάντηση: (α) $\log N_a \approx 20{,}18$ (β) $N = 5{,}4 \times 10^{29}\mathrm{m}^{-2}$