



Φυσική των αστέρων

Μάθημα 4

α.ε. 2023-24

Αέριο σε Θερμοδυναμική Ισορροπία (ΘΙ) – Κατανομή Maxwell-Boltzmann

Συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων Maxwell-Boltzmann για ένα σύστημα (αέριο) από πάρα πολλά όμοια, κλασικά, μη αλληλοεπιδρώντα σωματίδια, σε θερμοδυναμική ισορροπία:

Περιγράφει το ποσοστό των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου που έχουν ταχύτητες μέτρου μεταξύ v και $v + dv$ δίνεται από τη σχέση

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$

→ Κινητική ενέργεια/Θερμική ενέργεια

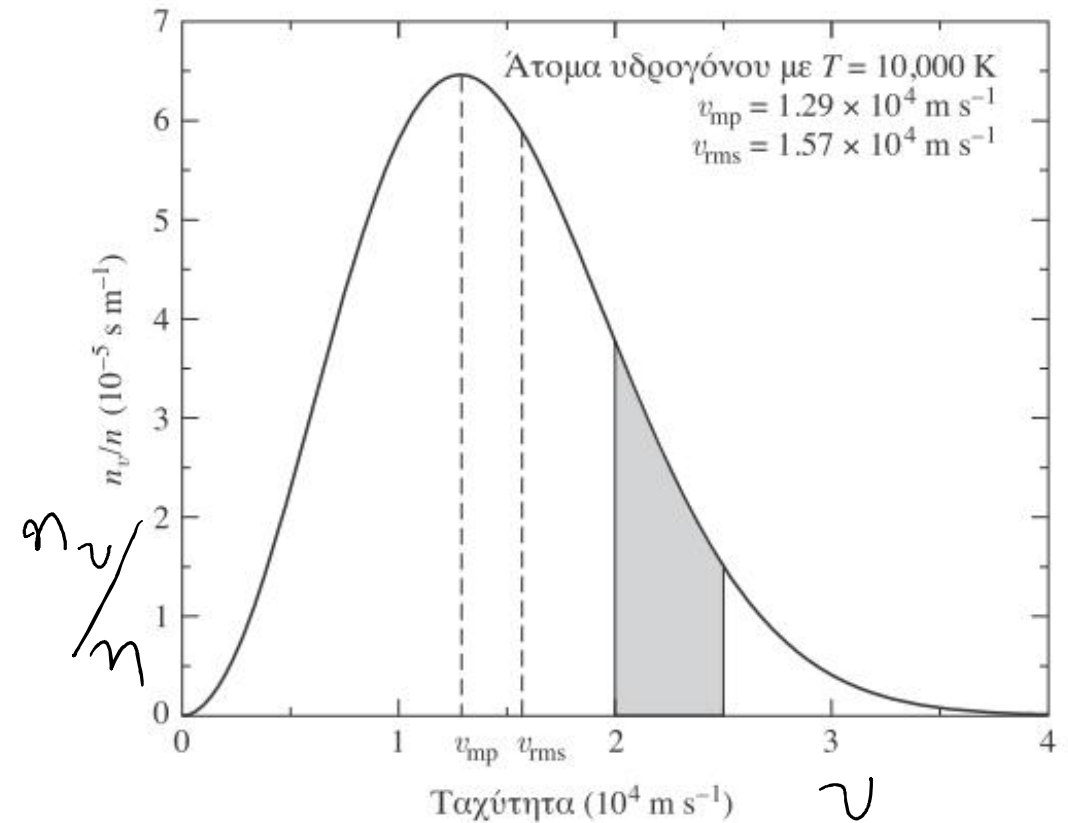
όπου n είναι η συνολική αριθμητική πυκνότητα (αριθμός σωματιδίων ανά μονάδα όγκου), $n_v \equiv \partial n / \partial v$, m είναι η μάζα του κάθε σωματιδίου, k η σταθερά του Boltzmann και T η θερμοκρασία του αερίου σε Κ.

- η κατανομή έχει μέγιστο όταν αυτές οι ενέργειες είναι ίσες, με την πιο πιθανή ταχύτητα να είναι $v_{mp} =$

$$\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

- Η ενεργός ταχύτητα, που είναι η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής της v^2 είναι λίγο μεγαλύτερη, λόγω της «ουράς» της κατανομής στις μεγάλες ταχύτητες.

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$



Από Carroll & Ostlie

Παράδειγμα

Το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη ανάμεσα σε δύο ταχύτητες είναι ίσο με το κλάσμα των σωματιδίων του αερίου με ταχύτητες σε αυτό το διάστημα. Προκειμένου να καθορίσουμε το κλάσμα των ατόμων του υδρογόνου σε ένα αέριο με $T = 10,000 \text{ K}$, τα οποία έχουν ταχύτητες μεταξύ $v_1 = 2 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ και $v_2 = 2.5 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$, είναι απαραίτητο να ολοκληρώσουμε την κατανομή Maxwell-Boltzmann ανάμεσα σε αυτά τα δύο όρια, ή

$$\begin{aligned} \checkmark \quad N/N_{\text{total}} &= \frac{1}{n} \int_{E_1}^{v_2} n_v dv \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv. \end{aligned}$$

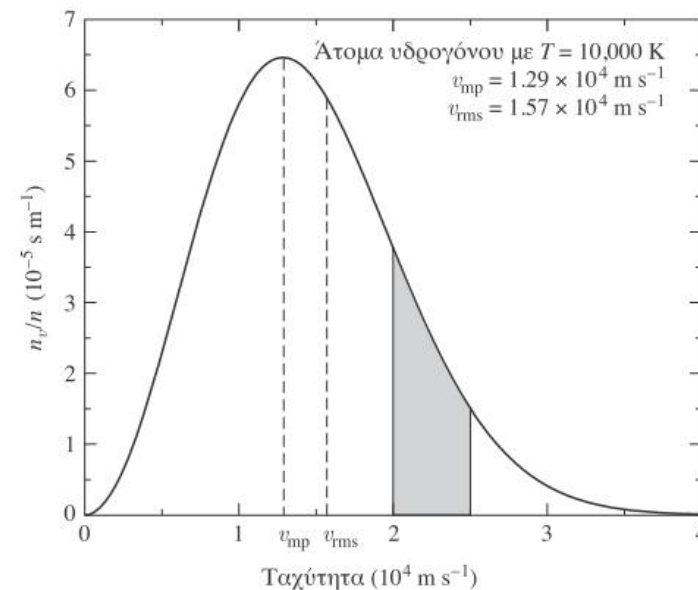
✓ Αριθμητική λύση (εκτός από την περίπτωση $v_1 = 0, v_2 \rightarrow \infty$)

✓ Προσεγγιστικά (για μικρή περιοχή τιμών της ταχύτητας)

$$\begin{aligned} N/N_{\text{total}} &\simeq \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m\bar{v}^2/2kT} 4\pi\bar{v}^2 (v_2 - v_1) \\ &\simeq 0.125. \end{aligned}$$

όπου $\bar{v} \equiv (v_1 + v_2)/2$

Δηλ. για αέριο στα 10000K περίπου το 12.5% των ατόμων H έχουν ταχύτητας μεταξύ 2 και $2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$



Νόμος Boltzmann

- Τα άτομα ενός αερίου κερδίζουν ή χάνουν ενέργεια καθώς συγκρούονται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η κατανομή στις ταχύτητες των επηρεαζόμενων σωματιδίων, που δίνεται από την **κατανομή Maxwell-Boltzmann**, να παράγει μία καθορισμένη κατανομή για τα ηλεκτρόνια μέσα στα ατομικά τροχιακά.
- Η κατανομή των ηλεκτρονίων διέπεται από ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα της στατιστικής μηχανικής: **Τροχιακά μεγαλύτερης ενέργειας είναι λιγότερο πιθανό να καταλαμβάνονται από ηλεκτρόνια.**
- Έστω s_a , το σύνολο των κβαντικών αριθμών που περιγράφουν μία κατάσταση ενέργειας E_a , και αντίστοιχα s_b , το σύνολο των κβαντικών αριθμών που περιγράφουν μία κατάσταση ενέργειας E_b .
- Τότε ο λόγος της πιθανότητας $P(s_a)$ να βρίσκεται το σύστημα στη κατάσταση s_a προς τη πιθανότητα $P(s_b)$ να βρίσκεται στη κατάσταση s_b δίνεται από την σχέση:

$$\frac{P(s_b)}{P(s_a)} = \frac{e^{-E_b/kT}}{e^{-E_a/kT}} = e^{-\cancel{(E_b - E_a)}/kT} \longrightarrow \text{Παράγοντας Boltzmann}$$

$$T \rightarrow 0 \rightarrow P(s_b)/P(s_a) \rightarrow 0$$

$$T \rightarrow \infty \rightarrow P(s_b)/P(s_a) \rightarrow 1$$

- Όταν οι ενεργειακές καταστάσεις του συστήματος είναι εκφυλισμένες (δηλ. περισσότερες από μία κβαντικές καταστάσεις έχουν την ίδια ενέργεια)
δηλ. $E_a = E_b$ και $s_a \neq s_b$

Όταν λαμβάνουμε μέσες τιμές, πρέπει να μετρήσουμε κάθε εκφυλισμένη κατάσταση ξεχωριστά. Προκειμένου να μετρήσουμε σωστά τον αριθμό των καταστάσεων που έχουν μια δεδομένη ενέργεια, ορίζουμε ως g_a να είναι ο αριθμός των καταστάσεων με ενέργεια E_a , και g_b να είναι ο αριθμός καταστάσεων με ενέργεια E_b → **στατιστικά βάρη** των ενεργειακών επιπέδων.

- Ο λόγος του αριθμού των ατόμων που είναι σε οποιαδήποτε από τις g_1 εκφυλισμένες καταστάσεις με ενέργεια $E_1 = h\nu$ προς τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται σε οποιαδήποτε από τις g_2 εκφυλισμένες καταστάσεις με ενέργεια $E_2 = E + h\nu$ δίνεται από την σχέση

$$\rightarrow \frac{N_b}{N_a} = \frac{P(E_b)}{P(E_a)} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT} \quad \text{Εξίσωση Boltzmann}$$

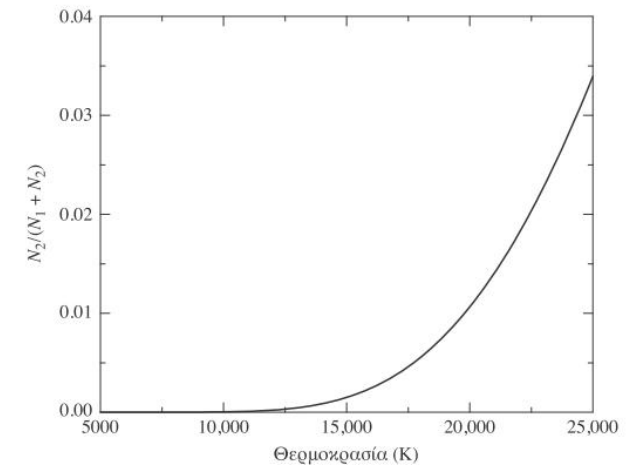
Παράδειγμα

Για ένα αέριο από ουδέτερα άτομα υδρογόνου, σε ποια θερμοκρασία θα υπάρχει ίσος αριθμός ηλεκτρονίων στην βασική ($n = 1$) και στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση ($n = 2$);

Θυμόμαστε ότι $g_n = 2n^2$ $E_n = -13.6\text{eV}/n^2$

$$\frac{N_b}{N_a} = 1 = \frac{2(2)^2}{2(1)^2} e^{-[(-13.6\text{eV}/2^2)-(-13.6\text{eV}/1^2)]/kT} \Rightarrow \frac{10.2\text{eV}}{kT} = \ln(4) \Rightarrow T = 8.54 \times 10^4\text{K}$$

Απαιτούνται υψηλές θερμοκρασίες ώστε ένας σημαντικός αριθμός ατόμων του υδρογόνου να έχουν ηλεκτρόνια στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση.



Εξίσωση Saha

- Μέχρι τώρα εξετάσαμε την κατανομή σε διαφορετικά ενεργειακά επίπεδα για όμοια ουδέτερα άτομα σε Θ.Ι. Καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία, κάποια άτομα μπορεί να ιονιστούν (και πιθανά σε διαφορετικό στάδιο ιονισμού)
- Η εξίσωση Saha μας δίνει τον σχετικό αριθμό των ατόμων (που βρίσκονται σε ΘΙ) σε διαφορετικά στάδια ιονισμού.
- Έστω χ_i η ενέργεια που χρειάζεται για να απομακρυνθεί ένα ηλεκτρόνιο από ένα άτομο (ή ιόν) στη βασική στάθμη, με αποτέλεσμα το άτομο (ή ιόν) να μεταβεί από το στάδιο ιονισμού i στο στάδιο $(i + 1)$.
- Αλλά το αρχικό ή/και το τελικό ιόν μπορεί να μην είναι στη βασική στάθμη.
- Πρέπει να πάρουμε μια μέση τιμή πάνω σε όλες τις τροχιακές ενέργειες, ώστε να συνυπολογίσουμε τον πιθανό καταμερισμό των ηλεκτρονίων του ατόμου στα διάφορα τροχιακά → συναρτήσεις επιμερισμού Z

Εξίσωση Saha

- Η συνάρτηση επιμερισμού ενός ατόμου είναι παρόμοια αλλά λίγο πιο περίπλοκη από το στατιστικό βάρος μιας κβαντομηχανικής κατάστασης.
- Στη πραγματικότητα είναι το **άθροισμα των στατιστικών βαρών** (δηλ. βαθμών εκφυλισμού) όλων των δέσμιων καταστάσεων του ατόμου, με το καθένα από αυτά **να σταθμίζεται με τον παράγοντα Boltzmann**, που δείχνει τον σχετικό πληθυσμό σε εκείνο το ενεργειακό επίπεδο της δομής του ατόμου. Δηλαδή

$$Z_i(T) = g_{i,0} + g_{i,1}e^{-\epsilon_{i,1}/kT} + g_{i,2}e^{-\epsilon_{i,2}/kT} + \dots$$

όπου $g_{i,j}$ είναι το στατιστικό βάρος του επιπέδου j του i -ιονισμένου ατόμου.

Οι ενέργειες που εμφανίζονται στα εκθετικά είναι οι ενέργειες των διεγερμένων σταθμών του ιόντος i σε σχέση με την ενέργεια της βασικής (θεμελιώδους) στάθμης του.

➤ Θυμηθείτε ότι η ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου (π.χ. του ατόμου του H) είναι ανάλογη του κβαντικού αριθμού της αντίστοιχης στάθμης. Άρα σε ένα πραγματικό αέριο για κάποιο n θα φτάσει η ακτίνα αυτή να ταυτίζεται με τη μέση απόσταση μεταξύ των ατόμων. **Αυτός ο περιορισμός θέτει ένα φυσικό όριο στον αριθμό των bound states** κι έτσι το παραπάνω άθροισμα γίνεται **πεπερασμένο** (συνήθως κρατάμε τους πρώτους λίγους όρους)

➤ Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο καταστάσεις ιονισμού i και $i + 1$.

Έστω N_i και N_{i+1} οι αριθμητικές πυκνότητες των ατόμων στα αντίστοιχα στάδια ιονισμού, και n_e η αριθμητική πυκνότητα των ελεύθερων ηλεκτρονίων.

Η εξίσωση Saha λέει ότι:

$$\frac{N_{i+1}n_e}{N_i} = \frac{Z_e Z_{i+1}}{Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

($Z_e = 2$)

Η πλήρης απόδειξη προκύπτει από τη στατιστική αερίων φωτονίων και ηλεκτρονίων με τη βοήθεια των συντελεστών Einstein (σε ΜΠΤ μάθημα)

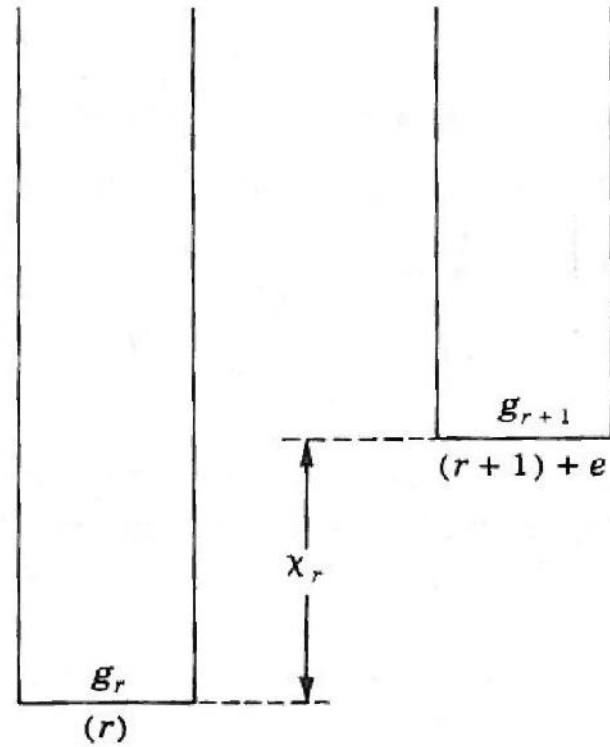
Σχόλιο από βιβλίο Clayton, Principles of stellar evolution and nucleosynthesis, 1983

This physical limit to the number of bound states makes the partition function finite. In most applications, in fact, the numerical value of the partition function can be estimated by taking only a few terms (in many cases only one term) of the sum. In the stellar interior this phenomenon becomes quite important. Bound electrons greatly increase the opacity of matter to the thermal radiation, and it becomes necessary to consider the interactions in the gas in order to realistically calculate the number of bound electrons. This problem will be discussed further in Sec. 2-3.

It is therefore common to estimate partition functions by first estimating the temperature and the number of terms of the series that need to be kept to have a good approximation to the answer. It is also fortunate that the number ratios are, in general, considerably more sensitive to the temperature than to the ratio of the partition functions. For this reason, great accuracy in evaluation of the partition functions is often not necessary for astrophysical application. In the Saha equation one of the partition functions, viz., that of the electron, is particularly simple. Since the electron has no excited states, its partition function is just the statistical weight of the electron. Since the electron has a spin equal to $\frac{1}{2}$, its statistical weight is $g_e = 2$.

The other quantities appearing in the Saha equation have obvious meanings. They are the mass of the electron, the Boltzmann constant, the Planck constant, the temperature, and χ_r , which is the ionization energy of species r .

Fig. 1-9 An energy-level diagram for the ionization of idealized ions possessing only a single bound state. The r -times-ionized species must absorb energy greater than or equal to χ_r to make a transition to the $(r + 1)$ -times-ionized species plus a free electron.



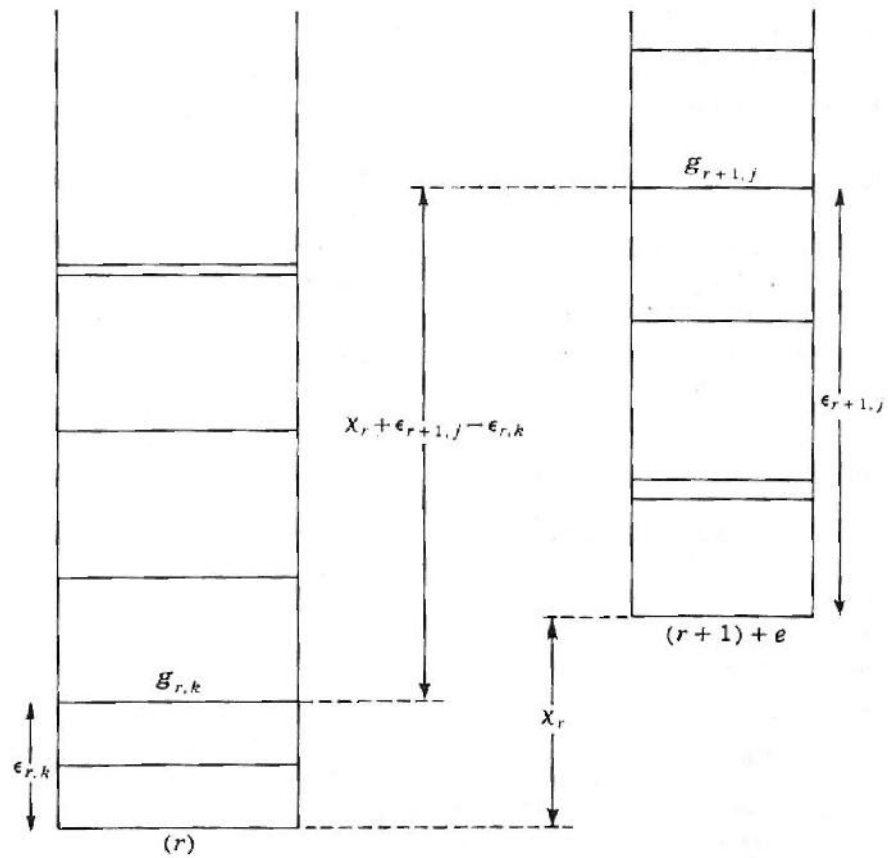


Fig. 1-10 An energy-level diagram for the ionization of ions possessing their full coterie of bound levels.

➤ Συχνά αντί για την αριθμητική πυκνότητα e , n_e , χρησιμοποιούμε την πίεση των (ελεύθερων) ηλεκτρονίων P_e , υποθέτοντας ότι το αέριο είναι ιδανικό οπότε

$P_e = n_e kT$ και η εξ. Saha γίνεται

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kTZ_{i+1}}{P_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

Η εξ. Saha σε αυτή τη μορφή είναι σωστή μόνο για μη εκφυλισμένο αέριο

Θα επανέλθουμε στη χρήση των εξισώσεων αυτών όταν μιλήσουμε για αστρικές ατμόσφαιρες.

Σχόλια

- Ο Νόμος του Boltzmann και ο νόμος του Saha ισχύουν για Θ.Ι.
- Όταν έχουμε πράγματι Θ.Ι, οι θερμοκρασίες που βρίσκουμε εφαρμόζοντας τον νόμο του Boltzmann σε κατάλληλες γραμμές (μεταβάσεις από διαφορετική αρχική στάθμη σε μία συγκεκριμένη τελική) → θερμοκρασία διέγερσης - excitation temperature ή από τον νόμο του Saha σε γραμμές που προκύπτουν από διαφορετικά ιόντα του ίδιου ατόμου (θερμοκρασία ιονισμού - ionization temperature) **ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ.**

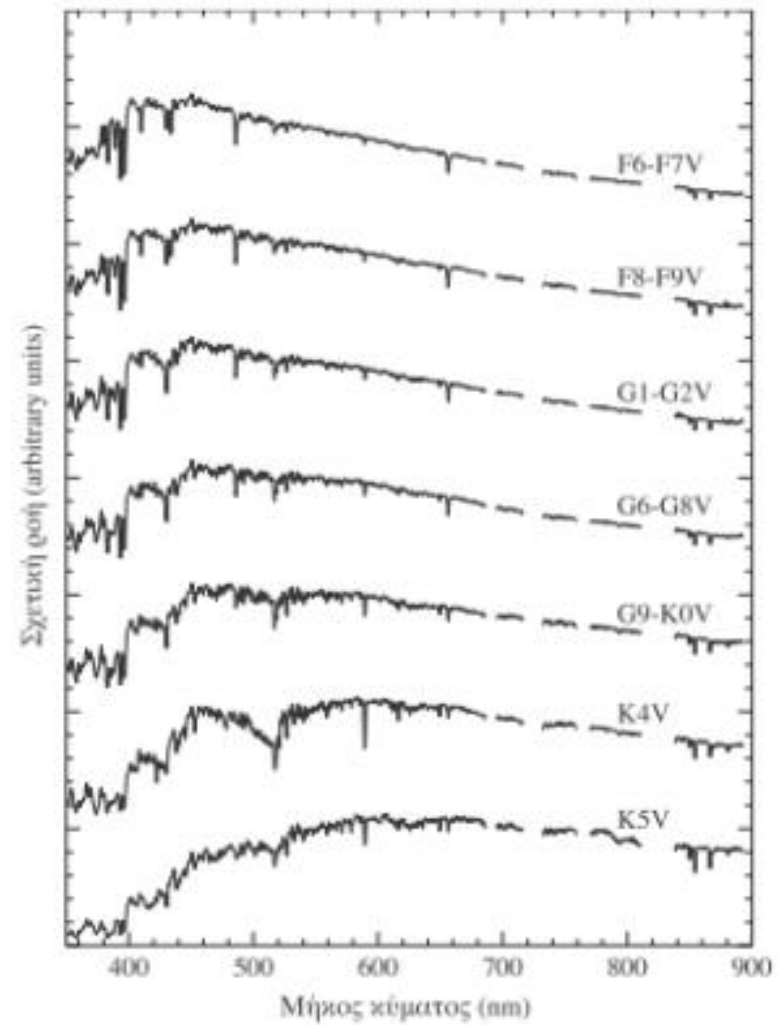
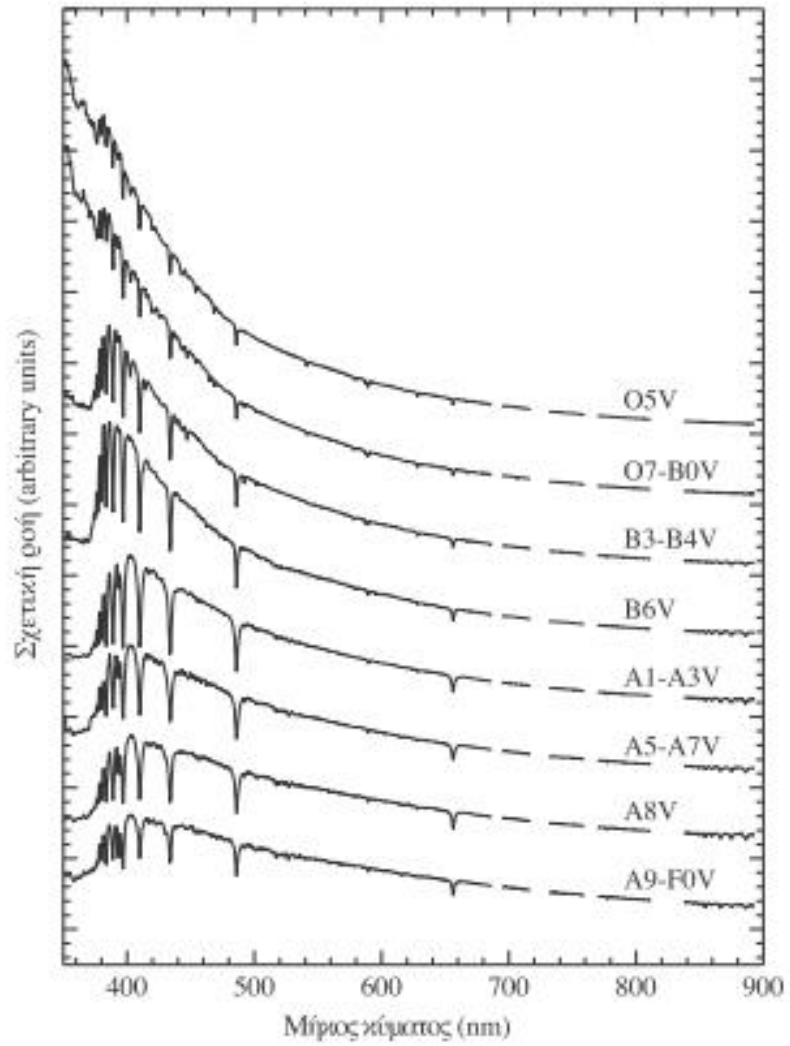
Αστρικά φάσματα

- Ένα από τα πρώιμα αποτελέσματα της παρατηρησιακής αστροφυσικής/αστρονομίας, ήταν το ότι υπάρχει σχέση μεταξύ των ιδιοτήτων της αστρικής επιφάνειας (π.χ. επιφανειακή θερμοκρασία) και της έντασης συγκεκριμένων γραμμών απορρόφησης στα αστρικά φάσματα.
- Ήδη από το 1863 ο Ιησουίτης αστρονόμος Angelo Secchi ταξινόμησε τα άστρα σε 4 κατηγορίες ανάλογα με κάποιες έντονες γραμμές απορρόφησης στα φάσματά τους.
- 2-3 δεκαετίες αργότερα αναπτύχθηκε το σύστημα ταξινόμησης Harvard (Pickering, Fleming, Maury) που χαρακτήριζε τα φάσματα με κεφαλαία γράμματα βάσει της έντασης των γραμμών απορρόφησης του υδρογόνου, ξεκινώντας με το γράμμα A για τις πιο ευρείες γραμμές.
- Το σύστημα αυτό τελειοποιήθηκε και έφτασε στη μορφή που είναι γνωστή σήμερα από την Annie Jump Cannon) που αναδιέταξε την ακολουθία των φασμάτων τοποθετώντας τους τύπους O και B πριν τους τύπους A, προσέθεσε δεκαδικές υποδιαιρέσεις (π.χ. A0–A9) και συγχώνευσε πολλές από τις τάξεις.
- Με αυτές τις αλλαγές, το σύστημα κατηγοριοποίησης του Harvard των «O B A F G K M» μετατράπηκε σε ακολουθία θερμοκρασιών, η οποία εκτείνεται από τα πιο θερμά μπλε άστρα τύπου O έως τα πιο ψυχρά κόκκινα άστρα τύπου M.
- Η κατανόηση της σχέσης μεταξύ φασματικών χαρακτηριστικών και θερμοκρασίας (χρώματος, επήλθε με την ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας, και βασίζεται σχεδόν αποκλειστικά σε συνδυασμό των νόμων Boltzmann και Saha.

- Τα άστρα που βρίσκονται πιο κοντά στην αρχή αυτής της ακολουθίας αναφέρονται ως **προγενέστερου τύπου άστρα**, ενώ αυτά που είναι προς το τέλος, **μεταγενέστερου τύπου** (οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνται και για τους υπο-τύπους, 0-9 σε κάθε τάξη)
- Συμβολισμοί: OI → ουδέτερο άτομο οξυγόνου
OII → μονά ιονισμένο άτομο οξυγόνου
OIII → διπλά ιονισμένο άτομο οξυγόνου κ.ο.κ.
- Στο σύστημα του Harvard οι **γραμμές Balmer φτάνουν στη μέγιστη έντασή τους στα φάσματα των άστρων τύπου A0**, τα οποία έχουν ενεργό θερμοκρασία $T_e = 9520 \text{ K}$.
- Οι ορατές φασματικές γραμμές του **ουδέτερου ηλίου (He I) είναι ισχυρότερες για τα άστρα τύπου B2** ($T_e = 22000 \text{ K}$)
- Οι ορατές φασματικές γραμμές του ασβεστίου που έχει ιονιστεί μία φορά (Ca II) είναι πιο έντονες για άστρα τύπου K0 ($T_e = 5250 \text{ K}$).

Φασματικός τύπος	Χαρακτηριστικά
O	Τα πιο θερμά μπλε-λευκά άστρα με λίγες γραμμές. Ισχυρές γραμμές απορρόφησης (μερικές φορές και εκπομπής) He II. Οι γραμμές απορρόφησης του He I γίνονται ισχυρότερες.
B	Θερμά μπλε-λευκά Γραμμές απορρόφησης He I πιο ισχυρές στους τύπους B2. Οι γραμμές απορρόφησης Balmer H I γίνονται ισχυρότερες.
A	Λευκά Οι γραμμές απορρόφησης Balmer είναι πιο ισχυρές στους A0, γίνονται πιο ασθενείς στους μεταγενέστερους τύπους. Οι γραμμές απορρόφησης του Ca II γίνονται ισχυρότερες.
F	Κιτρινόλευκα Οι γραμμές απορρόφησης Balmer είναι πιο ισχυρές στους A0, γίνονται πιο ασθενείς στους μεταγενέστερους τύπους. Ουδέτερες μεταλλικές γραμμές απορρόφησης (Fe I, Cr I).
G	Κίτρινα Φάσματα ηλιακού τύπου. Οι γραμμές Ca II συνεχίζουν να γίνονται ισχυρότερες. Fe I, άλλες ουδέτερες μεταλλικές γραμμές γίνονται ισχυρότερες.
K	Ψυχρό πορτοκαλί Οι Ca II, H και K είναι ισχυρότερες στους K0, γίνονται πιο ασθενείς αργότερα. Τα φάσματα κυριαρχούνται από μεταλλικές γραμμές απορρόφησης.
M	Ψυχρό ερυθρό Τα φάσματα κυριαρχούνται από μοριακές ζώνες απορρόφησης, ειδικά του οξειδίου του τιτανίου (TiO) και του οξειδίου του βαναδίου (VO). Οι ουδέτερες μεταλλικές γραμμές απορρόφησης παραμένουν ισχυρές.
L	Πολύ ψυχρό, σκοτεινό ερυθρό Ισχυρότερα στο υπέρυθρο έναντι του ορατού. Ισχυρές μοριακές ζώνες απορρόφησης των μεταλλικών υδριδίων (CrH, FeH), νερό (H ₂ O), μονοξείδιο του άνθρακα (CO), και αλκάλια (Na, K, Rb, Cs). Τα TiO και VO εξασθενούν.
T	Τα πιο ψυχρά, υπέρυθρο Ισχυρές ζώνες μεθανίου (CH ₄) αλλά εξασθενούσες ζώνες CO.

Πίνακας από Carroll και Ostlie



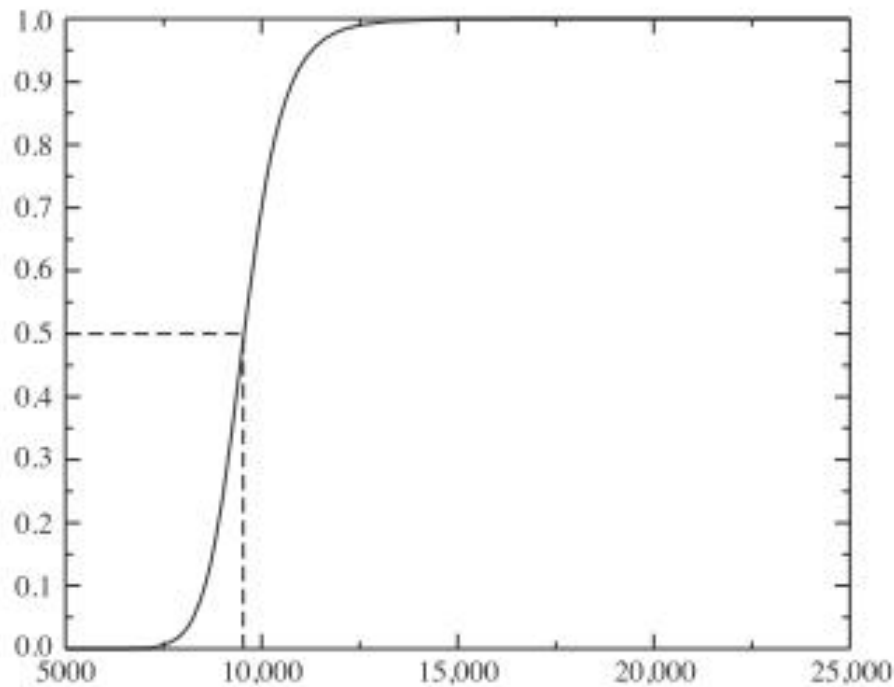
Σχήματα από Carroll και Ostlie

Παράδειγμα εφαρμογής νόμων Boltzmann και Saha.

- Αέριο που αποτελείται μόνο από υδρογόνο σε ΘI , σε θερμοκρασία T μεταξύ 5000K και 25000K. Έστω ότι η πίεση των ηλεκτρονίων είναι $P_e = 20\text{Nm}^{-2}$
- Από την εξίσωση Saha υπολογίζουμε τον λόγο των ατόμων που έχουν ιονιστεί προς τον συνολικό αριθμό (ουδέτερων και ιονισμένων ατόμων) $N_{II}/N_{\text{total}} = N_{II}/(N_I + N_{II})$
- Χρειαζόμαστε τις συναρτήσεις επιμερισμού Z_I και Z_{II} .
 - $Z_{II} = 1$ (ιον $H \rightarrow$ πρωτόνιο)
 - Για τις θερμοκρασίες που μας ενδιαφέρουν ο παράγοντας Boltzmann για τη πρώτη κατάσταση διέγερσης είναι $e^{-(E_2-E_1)/kT} \ll 1$, αφού $E_2 - E_1 = 10.2\text{eV}$, δηλ. τα περισσότερα άτομα βρίσκονται στη βασική τους στάθμη, άρα $Z_I \simeq g_1 = 2(1)^2 = 2$
- Εισάγουμε στην εξ. Saha $\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kTZ_{i+1}}{P_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$ τις παραπάνω τιμές και το $\chi_I = 13.6\text{eV}$ και υπολογίζουμε τον λόγο $N_{II}/(N_I)$ και από αυτόν, το $\frac{N_{II}}{N_{\text{total}}} = \frac{N_{II}}{(N_I + N_{II})} = \frac{N_{II}/N_I}{1 + N_{II}/N_I}$

εδω

$$\frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{total}}}$$



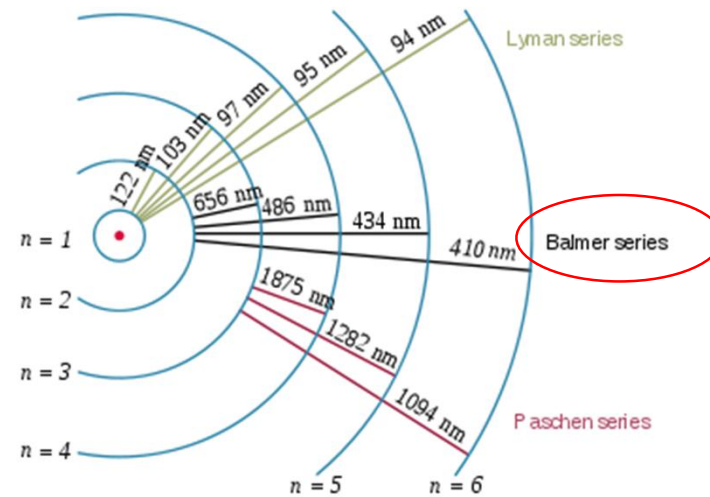
T (K)

- Για $T \sim 5000\text{K}$ δεν υπάρχουν σχεδόν καθόλου ιονισμένα άτομα H
- Για $T \sim 8300\text{K}$ το 5% έχει ιονιστεί
- Για $T \sim 9600\text{K}$ το 50% έχει ιονιστεί → **ζώνη μερικού εκφυλισμού**
- Για $T \sim 11300\text{K}$ το 95% έχει ιονιστεί

Ο ιονισμός του H συμβαίνει μέσα σε μία περιοχή θερμοκρασιών εύρους 3000K

Σχήμα από Carroll και Ostlie

Υπενθύμιση - Σειρά Balmer του Υδρογόνου



$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ for } n = 3, 4, 5, \dots$$

Transition of n	3→2	4→2	5→2	6→2	7→2	8→2	9→2	∞ →2
Name	H- α / Ba- α	H- β / Ba- β	H- γ / Ba- γ	H- δ / Ba- δ	H- ϵ / Ba- ϵ	H- ζ / Ba- ζ	H- η / Ba- η	Balmer break
Wavelength (nm, air)	656.279 ^[2]	486.135 ^[2]	434.0472 ^[2]	410.1734 ^[2]	397.0075 ^[2]	388.9064 ^[2]	383.5397 ^[2]	364.6

- Η ένταση των γραμμών Balmer εξαρτάται από το λόγο N_2/N_{total} , το κλάσμα όλων των ατόμων υδρογόνου που βρίσκονται στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση.
- Αυτό βρίσκεται με τον συνδυασμό των αποτελεσμάτων των εξισώσεων Boltzmann και Saha.
- Επειδή, ουσιαστικά, όλα τα άτομα του ουδέτερου υδρογόνου είναι είτε στη βασική είτε στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση $N_1 + N_2 \sim N_I$ και να γράψουμε

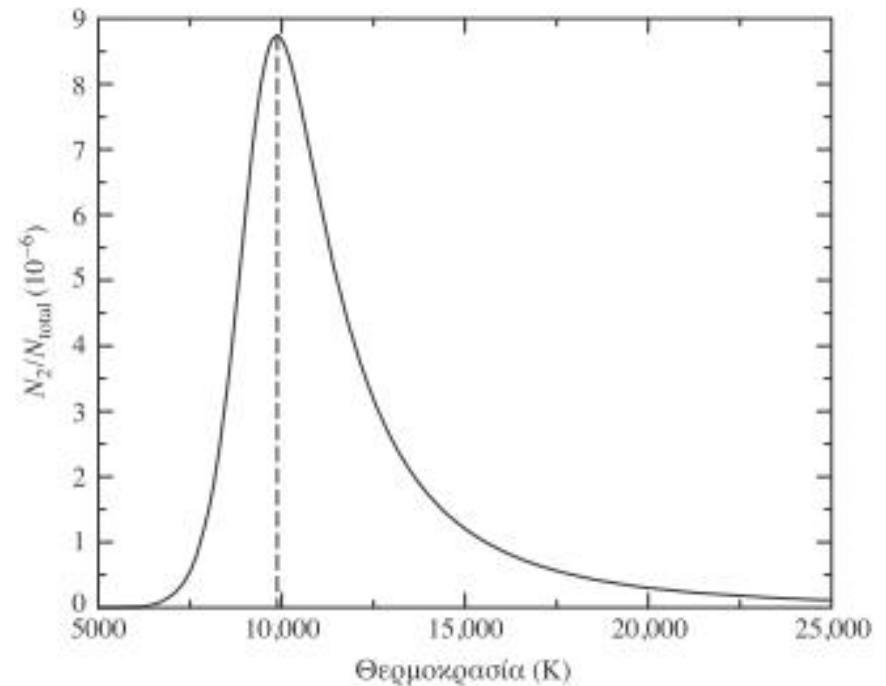
$$\frac{N_2}{N_{\text{total}}} = \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2} \right) \left(\frac{N_I}{N_{\text{total}}} \right) = \left(\frac{N_2/N_1}{1 + N_2/N_1} \right) \left(\frac{1}{1 + N_{II}/N_I} \right)$$

όπου ο λόγος N_2/N_1 προκύπτει από την εξ. Boltzmann. $\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2 - E_1)/kT}$

$$\frac{N_2}{N_{tot}} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \frac{1}{1 + \frac{N_{II}}{N_I}}$$

➔ Για μικρά T, το $\frac{N_2}{N_1 + N_2} \rightarrow 0$

➔ Για μεγάλα T, το $\frac{1}{1 + \frac{N_{II}}{N_I}} \rightarrow 0$



από Carroll και Ostlie

Η μειούμενη ισχύς των γραμμών Balmer στις υψηλότερες θερμοκρασίες οφείλεται στον γρήγορο ιονισμό του υδρογόνου πάνω από τα 10000 K.