

Κίνηση σε δύο και τρεις διαστάσεις

1. Ένα σώμα κινείται κατά μήκος της καμπύλης:

$$x = 2t^2, \quad y = t^2 - 4t, \quad z = 3t^2 - 5$$

όπου t ο χρόνος. Βρείτε:

(α) την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος ως διανύσματα τη χρονική στιγμή $t = 1\text{s}$. (β) Τα μέτρα των παραπάνω διανυσμάτων για $t = 1\text{s}$.

2. Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σωματιδίου είναι $\vec{r} = bt\vec{i} - ct^2\vec{j}$, όπου t είναι ο χρόνος και b, c σταθερές. Να βρεθούν :

α) Η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου $y=f(x)$.

β) Η ταχύτητα του σωματιδίου \vec{v} και η επιτάχυνση \vec{a} καθώς και τα μέτρα τους.

γ) Η γωνία μεταξύ των \vec{a} και \vec{v} ως συνάρτηση του χρόνου.

3. Ένα μοτοποδήλατο κινείται στο επίπεδο xy με επιτάχυνση $\mathbf{a} = ct^2\mathbf{i} + bt\mathbf{j}$, όπου $c=1.2\text{m/s}^4$, $b=3.5\text{m/s}^3$. α) Υποθέτοντας ότι το μοτοποδήλατο είναι σε ηρεμία στην αρχή των αξόνων τη στιγμή $t=0$, βρείτε τις εκφράσεις για τα διανύσματα ταχύτητας και θέσης συναρτήσει του χρόνου. β) Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του. γ) Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας τη στιγμή $t=3.0\text{s}$.

4. Ένα βλήμα εκτοξεύεται προς τα πάνω υπό γωνία θ με αρχική ταχύτητα \vec{v}_0 . Υπολογίστε το μέγιστο ύψος και το βεληνεκές. Αν το βεληνεκές του βλήματος είναι 3 φορές μεγαλύτερο από το μέγιστο ύψος του, βρείτε την γωνία θ .

5. Πέτρα ρίχνεται από την οροφή κτιρίου με ταχύτητα \vec{v}_0 και υπό γωνία θ πάνω από την οριζόντια διεύθυνση. Το κτίριο έχει ύψος h . Υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας ακριβώς πριν κτυπήσει το έδαφος και δείξτε ότι αυτή η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη του θ .

6. Η ταχύτητα ενός αεροπλάνου σχετικά με τον αέρα είναι 150km/h προς τα δυτικά. Αν υπάρχει άνεμος με ταχύτητα 30km/h προς το βορρά, βρείτε την ταχύτητα του αεροπλάνου σχετικά με το έδαφος (διεύθυνση και μέτρο).

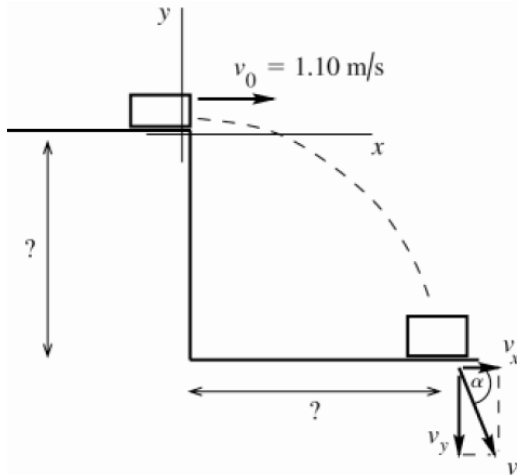
7. Σωμάτιο κινείται πάνω σε κύκλο σύμφωνα με το νόμο $s=t^3+2t^2$, όπου s σε m το μήκος της περιφέρειας και t σε sec . Αν η ολική επιτάχυνση του σημείου είναι $16\sqrt{2}\text{m/s}^2$ όταν $t=2\text{s}$, υπολογίστε την ακτίνα του κύκλου.

8. Ένα σώματιο κινείται κατά μήκος της τροχιάς $y = x^2$, έτσι ώστε $x = 2t$. (α) Υπολογίστε τα διανύσματα της ταχύτητας \mathbf{v} και της επιτάχυνσης \mathbf{a} ως συναρτήσεις του χρόνου. (β) Βρείτε την επιτροχία και κεντρομόλο επιτάχυνση ως συναρτήσεις του χρόνου. Υπόδειξη. Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \mathbf{v} και \mathbf{a} από το εσωτερικό τους γινόμενο.

9. Σωμάτιο κινείται έτσι ώστε $x = v_0t$, $y = y_0 \cos \omega t$, $v_0, y_0 > 0$ (α) Να γίνει η γραφική παράσταση των $x(t)$, $y(t)$. (β) Σχεδιάστε την τροχιά του σωματίου. (γ) Βρείτε τα μέτρα της ταχύτητας και επιτάχυνσης σαν συναρτήσεις του χρόνου.

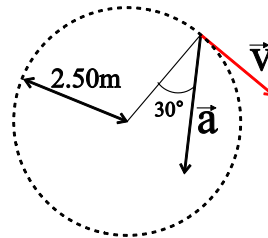
10. Βιβλίο εκτοξεύεται οριζόντια από την άκρη τραπεζιού με αρχική ταχύτητα 1.1m/sec και χτυπάει στο έδαφος μετά από 0.35sec. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα. Βρείτε:

1. Το ύψος του τραπεζιού από το έδαφος.
2. Τη οριζόντια απόσταση από το άκρο του τραπεζιού μέχρι το σημείο πρόσκρουσης στο έδαφος,
3. Την ταχύτητα (μέτρο, διεύθυνση, x και y συνιστώσες) την στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος.
4. Σχεδιάστε τα διαγράμματα x-t, y-t, v_x -t και v_y -t κατά την κίνηση.
 $g=9.8\text{m/s}^2$.



11. Σωμάτιο κινείται σε κύκλο ακτίνας 2.5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Το διάνυσμα της επιτάχυνσης σχηματίζει γωνία 30° με την ακτίνα του κύκλου και έχει μέτρο 15.0m/s^2 . Υπολογίστε:

- (a) Την κεντρομόλο επιτάχυνση
- (b) Το μέτρο της ταχύτητας
- (c) Την εφαπτομενική επιτάχυνση.



12. Πέτρα δεμένη σε σχοινί κινείται στο επίπεδο xy. Οι συντεταγμένες της συναρτήσει του χρόνου δίνονται από τις σχέσεις

$$x=R\cos\omega t, \quad y=R\sin\omega t$$

όπου R και ω σταθερές. α) Δείξτε ότι η απόσταση της πέτρας από την αρχή των συντεταγμένων είναι σταθερή και ίση προς R, δηλαδή ότι η τροχιά είναι κύκλος ακτίνας R. β) Δείξτε ότι για κάθε σημείο η ταχύτητα της πέτρας είναι κάθετη προς το διάνυσμα θέσης. γ) Δείξτε ότι η επιτάχυνση της πέτρας έχει πάντοτε αντίθετη φορά από τη φορά του διανύσματος θέσης και έχει μέτρο $\omega^2 R$. δ) Δείξτε ότι το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας είναι σταθερό και ίσο προς ωR . ε) Συνδυάστε τα αποτελέσματα των (γ) και (δ) για να δείξετε ότι η επιτάχυνση της πέτρας έχει σταθερό μέτρο v^2/R .