Το πρόβλημα των μηδενικών ιδιοτιμών.

Από την προηγούμενη συζήτηση έχει γίνει φανερό ότι **αν η ομογενής διαφορική εξίσωση** $L_{\underline{x}}\varphi(\underline{x})=0$ **έχει μη μηδενική λύση** (ή λύσεις) που να ικανοποιεί τις (ομογενείς) συνοριακές συνθήκες του προβλήματος

$$L_{\underline{x}}\Psi_p(\underline{x})=-f(\underline{x})$$

τότε η συνάρτηση Green δεν κατασκευάζεται . Διατυπωμένη αλλιώς η ίδια πρόταση μας λέει πως **όταν ο διαφορικός μας τελεστής έχει μηδενικές ιδιοτιμές η συνάρτηση Green** –όπως μπορεί αμέσως να δει κανείς από την εξ. (22)- δεν **κατασκευάζεται.** Έτσι ή αλλιώς διατυπωμένη η πρόταση αυτή μας λέει ότι η λύση στο πρόβλημά μας (αν υπάρχει) δεν είναι μοναδική : Αν κάνουμε την αλλαγή

$$\Psi(\underline{x})\to\tilde{\Psi}(\underline{x})=\Psi(\underline{x})+\varphi(\underline{x}) \qquad (42)$$

η συνάρτηση $\tilde{\Psi}(\underline{x})$ είναι κι αυτή λύση του προβλήματός μας. Η τελευταία σχέση δηλώνει την ύπαρξη μιας **συμμετρίας** : Η αντικατάσταση (42) δεν αλλάζει ούτε τη διαφορική εξίσωση ούτε τις συνοριακές συνθήκες**. Αφήνει, δηλαδή, το πρόβλημα μας αναλλοίωτο.** Επειδή αυτή η περίπτωση εμφανίζεται συχνά και έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον τόσο μαθηματικά όσο και φυσικά θα σταθούμε για λίγο σ' αυτήν.

Θα ορίσουμε καταρχήν τη λεγόμενη **<u>γενικευμένη συνάρτηση Green</u>**

$$\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}')\equiv-\sum_{\underline{n}\neq\underline{k}}\frac{\varphi_{\underline{n}}(\underline{x})\varphi_{\underline{n}}^*(\underline{x}')}{\lambda_n} \qquad (43)$$

η οποία δεν είναι τίποτα άλλο παρά το άθροισμα (22) (για $z=0$) από το οποίο έχουν αφαιρεθεί όλοι οι όροι που αντιστοιχούν στις (μη μηδενικές) ιδιοσυναρτήσεις που έχουν μηδενικές ιδιοτιμές και τις οποίες έχουμε αριθμήσει με τους δείκτες $\underline{k}$.
(Εδώ έχουμε υποθέσει ότι ο διαφορικός τελεστής έχει ένα πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων και ότι το φάσμα του είναι διακριτό).

Από τη σχ. (42) προκύπτει αμέσως ότι η γενικευμένη συνάρτηση Green ικανοποιεί τη λεγόμενη **γενικευμένη εξίσωση Green**

$$L_{\underline{x}}\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}')=-\sum_{\underline{n}\neq\underline{k}}\frac{1}{\lambda_n}L_{\underline{x}}\varphi_{\underline{n}}(\underline{x})\varphi_{\underline{n}}^*(\underline{x}')=-\sum_{\underline{n}\neq\underline{k}}\varphi_{\underline{n}}(\underline{x})\varphi_{\underline{n}}^*(\underline{x}')=$$

$$=-\sum_{\underline{n}}\varphi_{\underline{n}}(\underline{x})\varphi_{\underline{n}}^*(\underline{x}')+\sum_{\underline{k}}\varphi_{\underline{k}}(\underline{x})\varphi_{\underline{k}}^*(\underline{x}')=-\delta(\underline{x}-\underline{x}')+\sum_{\underline{k}}\varphi_{\underline{k}}(\underline{x})\varphi_{\underline{k}}^*(\underline{x}') \qquad (44)$$

και ότι υπόκειται στον περιορισμό :

$$\int_V d\underline{x}\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}')\varphi^*_{\underline{k}}(\underline{x}) = -\sum_{\underline{n}\neq\underline{k}}\frac{1}{\lambda_n}\varphi^*_{\underline{n}}(\underline{x}')\int_V d\underline{x}\varphi_{\underline{n}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{k}}(\underline{x}) = -\sum_{\underline{n}\neq\underline{k}}\frac{1}{\lambda_n}\varphi^*_{\underline{n}}(\underline{x}')\delta_{\underline{n},\underline{k}} = 0 \qquad (45)$$

Όπως φαίνεται από την παραπάνω ανάλυση η γενικευμένη συνάρτηση Green μπορεί να ορισθεί είτε μέσω του αθροίσματος (43) είτε ως η λύση της εξίσωσης (44) που υπόκειται στον περιορισμό (45) και , βέβαια, σε ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Η χρησιμότητα της γενικευμένης συνάρτησης Green φαίνεται από το παρακάτω **θεώρημα**:

• Έστω η διαφορική εξίσωση $L_{\underline{x}}\Psi_p(\underline{x}) = -f(\underline{x})$ η οποία συνοδεύεται από ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Αν υπάρχουν συναρτήσεις $\varphi_{\underline{k}}(\underline{x}) \neq 0$ οι οποίες ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση $L_{\underline{x}}\varphi_{\underline{k}}(\underline{x}) = 0$ και τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες τότε η διαφορική εξίσωση έχει λύση εάν και μόνο εάν ο όρος της μη ομογένειας είναι τέτοιος ώστε

$$\int_V d\underline{x}\varphi^*_{\underline{k}}(\underline{x}) f(\underline{x}) = 0 \qquad (46)$$

Στην περίπτωση αυτή η λύση είναι

$$\Psi_p(\underline{x}) = \sum_{\underline{k}} c_{\underline{k}}\varphi_{\underline{k}}(\underline{x}) + \int_V d\underline{x}'\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}') f(\underline{x}') \qquad (47)$$

με $c_{\underline{k}}$ αυθαίρετες σταθερές.

Πράγματι. Έστω ότι η Ψ_p είναι λύση της $L_{\underline{x}}\Psi_p(\underline{x}) = -f(\underline{x})$. Μπορώ να την αναλύσω στη βάση που συγκροτούν οι ιδιοσυναρτήσεις του διαφορικού τελεστή:

$$\Psi_p(\underline{x}) = \int_V d\underline{x}'\delta(\underline{x}-\underline{x}')\Psi_p(\underline{x}') = \sum_{\underline{n}}\left[\int_V d\underline{x}'\varphi^*_{\underline{n}}(\underline{x}')\Psi_p(\underline{x}')\right]\varphi_{\underline{n}}(\underline{x}) \equiv \sum_{\underline{n}}\alpha_{\underline{n}}\varphi_{\underline{n}}(\underline{x})$$

Επομένως

$$L_{\underline{x}}\Psi_p(\underline{x}) = \sum_{\underline{n}}\alpha_{\underline{n}}\lambda_n\varphi_{\underline{n}}(\underline{x}) \Rightarrow f(\underline{x}) = -\sum_{\underline{n}\neq\underline{k}}\alpha_{\underline{n}}\lambda_n\varphi_{\underline{n}}(\underline{x})$$

και άρα

$$\int_V d\underline{x}\varphi^*_{\underline{k}}(\underline{x}) f(\underline{x}) = -\sum_{\underline{n}\neq\underline{k}}\alpha_{\underline{n}}\lambda_n\int_V d\underline{x}\varphi^*_{\underline{k}}(\underline{x})\varphi_{\underline{n}}(\underline{x}) = -\sum_{\underline{n}\neq\underline{k}}\alpha_{\underline{n}}\lambda_n\delta_{\underline{n},\underline{k}} = 0$$

Από την τελευταία προκύπτει αμέσως το πρώτο μέρος του θεωρήματος.

Το δεύτερο θα προκύψει αν ξεκινήσουμε από την έκφραση (47) :

$$L_{\underline{x}}\Psi_p(\underline{x}) = \int_V d\underline{x}' L_{\underline{x}}\ \tilde{G}(\underline{x},\underline{x}') f(\underline{x}') = \int_V d\underline{x}'\left[-\delta(\underline{x}-\underline{x}') + \sum_{\underline{k}}\varphi_{\underline{k}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{k}}(\underline{x}')\right] f(\underline{x}') = -f(\underline{x})$$

Ορισμένες παρατηρήσεις είναι εδώ χρήσιμες .

• Οι συντελεστές $c_{\underline{k}}$ που εμφανίζονται στην (47) δεν μπορούν να προσδιορισθούν. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι αν στη θέση τους χρησιμοποιήσει κάποιους άλλους το αποτέλεσμα θα είναι και πάλι λύση του προβλήματός του. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού από την αρχή είπαμε ότι η λύση δεν είναι μοναδική. Η γενική μορφή που έχουν οι συντελεστές αυτοί βρίσκεται εύκολα :

$$c_{\underline{k}} = \int_V d\underline{x}\varphi^*_{\underline{k}}(\underline{x})\Psi_p(\underline{x}) \tag{48}$$

• Όπως και στην περίπτωση της συνήθους συνάρτησης Green έτσι και εδώ μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\tilde{L}_{\underline{x}'}\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}') = -\delta(\underline{x}-\underline{x}') + \sum_{\underline{k}} \varphi_k(\underline{x})\varphi^*_{\underline{k}}(\underline{x}') \tag{49}$$

Πράγματι. Αν ξεκινήσουμε από την (47) μπορούμε να γράψουμε

$$\Psi_p(\underline{x}) = \sum_{\underline{k}} c_{\underline{k}}\varphi_{\underline{k}}(\underline{x}) - \int_V d\underline{x}'\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}')L_{\underline{x}'}\Psi_p(\underline{x}') = \sum_{\underline{k}} c_{\underline{k}}\varphi_{\underline{k}}(\underline{x}) - \int_V d\underline{x}'\tilde{L}_{\underline{x}'}\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}')\Psi_p(\underline{x}')$$

Η μόνη λύση της τελευταίας είναι , βέβαια, η (49).

• Σε μονοδιάστατα προβλήματα η γενικευμένη συνάρτηση μπορεί να κατασκευαστεί όπως και η συνήθης αφού οι βασικές της ιδιότητες (συνέχεια της συνάρτησης , ασυνέχεια της πρώτης παραγώγου) δεν αλλάζουν.

• Αν γνωρίζουμε τη γενικευμένη συνάρτηση Green μπορούμε να βρούμε τη λύση της ομογενούς εξίσωσης (5) (αν υπάρχει) που συνοδεύεται από μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.
Όπως και στη συνήθη περίπτωση θα γράψουμε :

$$\begin{aligned}\Psi_0(\underline{x}) &= \int_V d\underline{x}'\delta(\underline{x}-\underline{x}')\Psi_0(\underline{x}') = \int_V d\underline{x}'\left[-\tilde{L}_{\underline{x}'}\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}') + \sum_{\underline{k}}\varphi_{\underline{k}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{k}}(\underline{x}')\right]\Psi_0(\underline{x}') = \\ &= \sum_{\underline{k}} b_{\underline{k}}\varphi_{\underline{k}}(\underline{x}) - \int_V d\underline{x}'\tilde{L}_{\underline{x}'}\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}')\Psi_0(\underline{x}')\end{aligned} \tag{50}$$

Στην τελευταία σχέση οι (αυθαίρετοι) συντελεστές $b_{\underline{k}}$ έχουν τη γενική μορφή

$$b_{\underline{k}} = \int_V d\underline{x}\varphi^*_{\underline{k}}(\underline{x})\Psi_0(\underline{x}) .$$

Αν τώρα στο τελευταίο ολοκλήρωμα της εξ. (50) κάνουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση θα πάρουμε

$$\Psi_0(\underline{x}) = \sum_{\underline{k}} b_{\underline{k}}\varphi_{\underline{k}}(\underline{x}) + Q_S(\underline{x}) - \int_V d\underline{x}'\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}')L_{\underline{x}'}\Psi_0(\underline{x}') = \sum_{\underline{k}} b_{\underline{k}}\varphi_{\underline{k}}(\underline{x}) + Q_S(\underline{x}) \tag{51}$$

Όπως και στη συνήθη περίπτωση έτσι και εδώ οι επιφανειακοί όροι είναι γνωστοί λόγω των συνοριακών συνθηκών.

Από την προηγούμενη συζήτηση είναι φανερό ότι αν επεκτείνουμε τον ορισμό της συνάρτησης Green ώστε να συμπεριλάβουμε και τη γενικευμένη , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι , σε τελευταία ανάλυση, **όταν η λύση στο πρόβλημά μας υπάρχει μπορεί να εκφραστεί μέσω της συνάρτησης Green.**

• Όπως φαίνεται και από τη σχέση (43) ο ορισμός της γενικευμένης συνάρτησης Green δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια προσπάθεια διαχείρισης του προβλήματος των μηδενικών ιδιοτιμών : Ένας τρόπος να ομαλοποιήσουμε μια έκφραση η οποία χωρίς αυτή μας την παρέμβαση δεν θα είχε νόημα. Μπορεί κανείς να αναρωτηθεί αν αυτός είναι ο μόνος (ή και ο καλύτερος) τρόπος. Το ζήτημα αυτό εμφανίζεται κυρίως όταν το φάσμα του διαφορικού τελεστή είναι συνεχές και θα το συζητήσουμε στα επόμενα εδάφια όπου θα αντιμετωπίσουμε συγκεκριμένα προβλήματα αλλά μπορούμε να το θίξουμε και εδώ .

Έστω λοιπόν ότι το φάσμα του διαφορικού τελεστή είναι συνεχές

$$L_{\underline{x}}\varphi_{\underline{p}}(\underline{x}) = \lambda_p \varphi_{\underline{p}}(\underline{x})$$

και ότι υπάρχουν μηδενικές ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε μη μηδενικές ιδιοσυναρτήσεις, Η συνεχής γενίκευση της (43) είναι :

$$\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}') = -P\int d\underline{p}\,\frac{\varphi_{\underline{p}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{p}}(\underline{x}')}{\lambda_p} \tag{52}$$

Στην προηγούμενη σχέση το σύμβολο P δηλώνει την κύρια τιμή του ολοκληρώματος που ακολουθεί. Η σχ. (52) είναι η συνεχής έκδοση της (43) στο βαθμό που αντιμετωπίζει το πρόβλημα των μηδενικών ιδιοτιμών με τον ίδιο τρόπο : Αποφεύγει τους μηδενισμούς του παρονομαστή. Η ιδιαιτερότητα της συνεχούς έκδοσης της γενικευμένης συνάρτησης είναι ότι ικανοποιεί τη συνήθη εξίσωση Green :

$$L_{\underline{x}}\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}') = -P\int d\underline{p}\varphi_p(\underline{x})\varphi^*_p(\underline{x}') = -\delta(\underline{x}-\underline{x}') \tag{53}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$P\frac{1}{x-\xi} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-\xi\pm i\varepsilon} \pm i\pi\delta(x-\xi) \tag{54}$$

η συνάρτηση (52) θα γραφεί

$$\tilde{G}(\underline{x},\underline{x}') = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int d\underline{p}\,\frac{\varphi_{\underline{p}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{p}}(\underline{x}')}{\lambda_p \pm i\varepsilon} \mp i\pi\int d\underline{p}\varphi_{\underline{p}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{p}}(\underline{x}')\delta(\lambda_p) \tag{55}$$

Ο πρώτος όρος στο αριστερό σκέλος της τελευταίας σχέσης

$$G^{\pm}(\underline{x},\underline{x}') \equiv -\lim_{\varepsilon\to 0}\int d\underline{p}\,\frac{\varphi_{\underline{p}}(\underline{x})\varphi^{*}_{\underline{p}}(\underline{x}')}{\lambda_p \pm i\varepsilon} \qquad (56)$$

ορίζει δύο συναρτήσεις , εν γένει διαφορετικές μεταξύ τους , οι οποίες είναι λύσεις της εξίσωσης Green

$$L_{\underline{x}}G^{\pm}(\underline{x},\underline{x}') = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int d\underline{p}\,\frac{\lambda_p}{\lambda_p \pm i\varepsilon}\varphi_{\underline{p}}(\underline{x})\varphi^{*}_{\underline{p}}(\underline{x}') = -\delta(\underline{x}-\underline{x}') \qquad (57)$$

αλλά εν γένει είναι διαφορετικές από τη γενικευμένη συνάρτηση Green $\tilde{G}$.Όπως θα δούμε στα επόμενα εδάφια οι συναρτήσεις αυτές έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον λόγω των συνοριακών συνθηκών που ικανοποιούν. Από μαθηματική πλευρά όμως δεν είναι παρά ένας διαφορετικός –και εξίσου αποδεκτός- τρόπος ομαλοποίησης μιας αποκλίνουσας έκφρασης : Οι ιδιοτιμές απέκτησαν ένα μικρό φανταστικό μέρος και έτσι δεν υπάρχει τιμή της (πραγματικής) παραμέτρου p που να μηδενίζει τον παρονομαστή.

Μια τελευταία παρατήρηση. Ο δεύτερος όρος στο αριστερό σκέλος της (52)

$$\Lambda(\underline{x},\underline{x}') = i\pi\int d\underline{p}\,\varphi_{\underline{p}}(\underline{x})\varphi^{*}_{\underline{p}}(\underline{x}')\delta(\lambda_p) \qquad (58)$$

είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$L_{\underline{x}}\Lambda(\underline{x},\underline{x}') = i\pi\int d\underline{p}\,\lambda_p\varphi_{\underline{p}}(\underline{x})\varphi^{*}_{\underline{p}}(\underline{x}')\delta(\lambda_p) = 0$$

και έτσι είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις $\tilde{G}$ και $G^{\pm}$ συνδέονται μεταξύ τους με το γενικό τύπο (39) :

$$G^{\pm} = \tilde{G} \pm \Lambda \qquad (59)$$