13 Νοεμβρίου 2018

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Τμήμα Φυσικής,
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Αθήνα, 15784

Μαθηματική Φυσική - 7ο Εξάμηνο

Επιλεγμένες ασκήσεις

1 Άσκηση

Θεωρήστε το διαφορικό τελεστή

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} \ , \qquad 0 \leqslant x < \infty \ . \tag{1.1}$$

Σκοπός είναι να προσδιορίσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $\Psi(x)$ και τις ιδιοτιμές του E με την αυτοσυζυγή οριακή συνθήκη

$$\Psi'(0) = \Psi(0)\cot\theta \ , \tag{1.2}$$

όπου θ σταθερή γωνία.

α) Δείξτε ότι αν $\tan\theta < 0$ υπάρχει μια και μόνο μια κανονικοποιήσιμη ιδιοσυνάρτηση με αρνητική ιδιοτιμή εντοπισμένη κοντά στο $x = 0$. Υπολογίστε την κανονικοποιώντας την στη μονάδα.

β) Δείξτε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του συνεχούς φάσματος είναι της μορφής

$$\Psi_k(x) = A_k \sin(kx + \delta(k)) \ , \qquad e^{i\delta(k)} = \frac{1 + ik\tan\theta}{\sqrt{1 + k^2\tan^2\theta}} \ , \tag{1.3}$$

όπου A_k σταθερά κανονικοποίησης.

γ) Δείξτε με ένα σαφή υπολογισμό ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του συνεχούς και αυτή που αντιστοιχεί στη δέσμια κατάσταση αποτελούν ένα **πλήρες ορθοκανονικό** σύνολο.

2 Άσκηση

Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty dk J_0(\rho k)\cos ka = \left\{ \begin{array}{ll} (\rho^2 - a^2)^{-1/2} \ , & \rho > a \\ 0 \ , & \rho < a \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

και ότι

$$\int_0^\infty dk J_1(\rho k)\sin ka = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\alpha}{\rho}(\rho^2 - a^2)^{-1/2} \ , & \rho > a \\ 0 \ , & \rho < a \end{array} \right\} \ . \tag{2.5}$$

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να αποδείξεται τα ζητούμενα είναι να χρησιμοποιήσετε την ολοκληρωτική αναπαράσταση των συναρτήσεων Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta + ix\sin\theta} \ . \tag{2.6}$$

για $n = 0, 1, \ldots$.

3 Άσκηση

Χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre, κατάλληλη αναδρομική σχέση μεταξύ των και την ορθογωνιότητά τους, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I(a) \equiv \int_{-1}^{1} dx \frac{x P_m(x)}{(a^2+2ax+1)^{1/2}} , \qquad a \in \mathbb{R} , \qquad m = 0,1,\dots , \qquad |a| \neq 1 . \tag{3.7}$$

Δείξτε ότι ισχύουν οι

$$\lim_{a\to 1^+} I(a) = \lim_{a\to 1^-} I(a) , \qquad \lim_{a\to 1^+} \frac{dI(a)}{da} \neq \lim_{a\to 1^-} \frac{dI(a)}{da} . \tag{3.8}$$

4 Άσκηση

α) Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\theta_3(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2} e^{2\pi i n z} , \qquad q = e^{2\pi i \tau} , \quad \tau \in \mathbb{C} , \quad \mathrm{Im}(\tau) > 0 \tag{4.9}$$

και ακολούθως τις

$$\begin{aligned}
\theta_4(z,\tau) &= \theta_3(z+1/2,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2/2} e^{2\pi i n z} , \\
\theta_2(z,\tau) &= e^{\pi i \tau/4 + \pi i z} \theta_3(z+\tau/2,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} e^{2\pi i (n+\frac{1}{2}) z} , \qquad (4.10) \\
\theta_1(z,\tau) &= -e^{\pi i \tau/4 + \pi i (z+1/2)} \theta_3(z+\tau/2+1/2,\tau) \\
&= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} e^{2\pi i (n+\frac{1}{2}) z} .
\end{aligned}$$

Δείξτε ότι

$$\begin{aligned}
\theta_1(z,\tau+1) &= e^{\pi i/4} \theta_1(z,\tau) , \\
\theta_2(z,\tau+1) &= e^{\pi i/4} \theta_2(z,\tau) , \\
\theta_3(z,\tau+1) &= \theta_4(z,\tau) , \qquad (4.11) \\
\theta_4(z,\tau+1) &= \theta_3(z,\tau)
\end{aligned}$$

και ότι

$$\begin{aligned}
\theta_1(z/\tau,-1/\tau) &= -i\sqrt{-i\tau}\ e^{\pi i z^2/\tau}\theta_1(z,\tau)\ , \\
\theta_2(z/\tau,-1/\tau) &= \sqrt{-i\tau}\ e^{\pi i z^2/\tau}\theta_4(z,\tau)\ , \\
\theta_3(z/\tau,-1/\tau) &= \sqrt{-i\tau}\ e^{\pi i z^2/\tau}\theta_3(z,\tau)\ , \\
\theta_4(z/\tau,-1/\tau) &= \sqrt{-i\tau}\ e^{\pi i z^2/\tau}\theta_2(z,\tau)\ .
\end{aligned} \tag{4.12}$$

β) Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$\chi_\alpha(\tau) = \frac{q^{\frac{\alpha^2}{2}}}{\eta(\tau)}\ , \tag{4.13}$$

Δείξτε ότι για την

$$Z(\tau) = \int_0^\infty d\alpha |\chi_\alpha(\tau)|^2\ , \tag{4.14}$$

ισχύει ότι

$$Z(\tau+1) = Z(-1/\tau) = Z(\tau)\ . \tag{4.15}$$

5 Άσκηση

Θεωρήστε μια αλυσίδα πυρηνικών αντιδράσεων από n διαφορετικούς πυρήνες. Αν $N_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι οι πληθυσμοί των πυρήνων, η χρονική τους εξάρτηση διέπεται απ' το σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1\ , \\
\frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2\ , \\
&\ \vdots \\
\frac{dN_n}{dt} &= \lambda_{n-1} N_{n-1} - \lambda_n N_n\ ,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

όπου λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ οι σταθερές αποδιέγερσης οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Ως αρχική συνθήκη θεωρούμε μόνο ένα είδος πυρήνες, δηλαδή

$$N_1(0) = N\ , \qquad N_2(0) = \cdots = N_n(0) = 0\ . \tag{5.17}$$

Στο παραπάνω πρότυπο ο ολικός αριθμός των πυρήνων παραμένει σταθερός μόνο αν $\lambda_n = 0$, δηλαδή ο τελευταίος πυρήνας να είναι σταθερός.

α) Επιλύστε το σύστημα (5.16) με χρήση του μετασχηματισμού Laplace των πληθυσμών $\mathcal{L}(N_i) = F_i(s)$.

β) Θεωρήστε την περίπτωση σταθερού συνολικού αριθμού πυρήνων και δείξτε ότι για μικρούς χρόνους

$$N_i \sim t^{i-1} \ , \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{5.18}$$

και ότι τελικά όλοι οι πυρήνες μετατρέπονται στον πυρήνα τύπου n.

γ) Θεωρήστε την περίπτωση $\lambda_i = \lambda$, $\forall\ i$ και γράψτε τη γενική λύση. Πάρτε το όριο $N, \lambda, n \to \infty$ με $\dfrac{\lambda}{n} = a = \text{finite}$ και $\dfrac{N}{n} = M = \text{finite}$. Ποιά είναι η λύση σε αυτό το όριο;

6 Άσκηση

α) Με τη μέθοδο της συρραφής λύσεων επιλύστε τη ΔΕ Green

$$\frac{d^2G}{dx^2} - k^2 G = \delta(x-x') \ , \qquad G = G(x, x') \ , \qquad 0 \leqslant x, x' \leqslant 1 \ , \tag{6.19}$$

με

$$G\big|_{x=0} = \frac{dG}{dx}\Big|_{x=1} = 0 \ . \tag{6.20}$$

β) Με κατάλληλο όριο βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοτιμές του τελεστή d^2/dx^2 για $0 \leqslant x \leqslant 1$ με τις παραπάνω συνοριακές συθήκες.

7 Άσκηση

α) Επιλύστε την διαφορική εξίσωση Green

$$\frac{d^4G}{dx^4} = \delta(x-x') \ , \qquad G = G(x, x') \ , \qquad 0 \leqslant x, x' \leqslant 1 \ , \tag{7.21}$$

με οριακές συνθήκες

$$G\big|_{x=0} = G\big|_{x=1} = \frac{d^2G}{dx^2}\Big|_{x=0} = \frac{d^2G}{dx^2}\Big|_{x=1} = 0 \ . \tag{7.22}$$

β) Βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις και τις ιδιοτιμές του τελεστή d^4/dx^4 για $x \in [0, 1]$ με τις παραπάνω οριακές συνθήκες.

γ) Με βάση τα α) και β) ποιό είναι το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi x'}{n^4} \ . \tag{7.23}$$

8 Άσκηση

α) Επιλύστε την εξίσωση Green

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \delta(x - x') \ , \qquad 0 \leqslant x, x' \leqslant 1 \ . \tag{8.24}$$

με τις οριακές συνθήκες

$$\partial_x G(x, x')|_{x=0} = G(0, x') \cot\theta \ , \qquad \partial_x G(x, x')|_{x=1} = G(1, x') \cot\phi \ , \tag{8.25}$$

όπου θ και ϕ σταθερές γωνίες.

β) Βρείτε το όριο της $G(x, x')$ για $\theta, \phi \to 0$. Πώς γίνονται τότε οι οριακές συνθήκες;

8.1 Άσκηση: Φάσμα του τελεστή $\triangle^2$ στο επίπεδο

Βρείτε τις ιδιοσυναστήσεις και ιδιοτιμές του τελεστή $\triangle^2$:

α) Εντός κύκλου ακτίνας R με συνοριακές συνθήκες

$$\Psi(0) = \Psi(R) = \Psi'(R) = 0 \tag{8.26}$$

και πεπερασμένη συμπεριφορά για $\rho = 0$.

β) Στο διάστημα $\rho \geqslant 0$ και πεπερασμένη συμπεριφορά για $\rho = 0$ και για $\rho \to \infty$.

9 Άσκηση

Θεωρείστε την εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho \ , \tag{9.27}$$

εντός σφαίρας ακτίνας b με πυκνότητα φορτίου $\rho(\mathbf{x})$ που αντιστοιχεί σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q σε δακτύλιο ακτίνας r_0, με $0 \leqslant r_0 \leqslant b$, ομόκεντρου του ισημερινού της σφαίρας. Θεωρείστε $\Phi|_{r=b} = 0$.

α) Γράψτε την έκφραση για την $\rho(\mathbf{x})$ χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες.

β) Υπολογίστε την $\Phi(\mathbf{x})$ με χρήση της σχετικής συνάρτησης Green.

γ) Πάρτε τα ξεχωριστά όρια $r_0 \to 0$ και $r_0 \to b$ και βρείτε τις εκφράσεις για το Φ.

δ) Ένα σημειακό σωμάτιο φορτίου q τοποθετείται στο κέντρο της σφαίρας. Βρείτε τη συνθήκη ώστε να είναι σε θέση να εκτελέσει μικρές ταλαντώσεις αν απομακρυνθεί λίγο από αυτό καθώς επίσης και τις αντίστοιχες συχνότητες. Θεωρείστε ότι $|q| \ll |Q|$.

10 Άσκηση

Επιλύστε την εξίσωση διάχυσης θερμότητας εντός δίσκου ακτίνας R με αρχική συνθήκη $T(x,0) = \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ και τη θερμοκρασία να διατηρείται μηδενική στο σύνορό του. Εξειδικεύστε την απάντηση για $\mathbf{x}_0$ στην αρχή των αξόνων. Δείξτε ότι για $R \gg |\mathbf{x}|, |\mathbf{x}_0|$ η λύση τείνει στη γνωστή λύση της εξίσωσης διάχυσης θερμότητας στο άπειρο επίπεδο.

11 Άσκηση

Ορθός κύλινδρος ακτίνας R έχει άξονα που συμπίπτει με τον άξονα των z, και εκτείνεται στο χώρο με $z \geqslant 0$. Επιλύστε την εξίσωση Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ εντός του κυλίνδρου εάν στην επίπεδη πλευρά του έχουμε τη συνοριακή συνθήκη

$$\Phi\big|_{z=0} = V \ , \tag{11.1}$$

μηδέν στην κυκλική πλευρά του και επίσης τις

$$\Phi\big|_{z=b^-} = \Phi\big|_{z=b^+} \ , \qquad \epsilon \, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=b^-} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=b^+} \ , \tag{11.2}$$

όπου V, ϵ και b $(0 < b < \infty)$ σταθερές.

Βρείτε το όριο της λύσης για $\epsilon = 1$ και για $\epsilon \to \infty$. Εξαρτάται αυτό απ΄ τη σταθερά b και γιατί;

12 Άσκηση

Θεωρείστε την έξίσωση διάχυσης θερμότητας

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T \ . \tag{12.3}$$

σε κύλινδρο μήκους H και ακτίνας R με $H \gg R$ του οποίου η θερμοκρασία παντού στο εσωτερικό είναι αρχικά σταθερή T_0 και η επιφάνειά του διατηρείται μονίμως σε μηδενική θερμοκρασία.

α) Προσδιορείστε τη θερμοκρασία ως συνάρτηση του χώρου, του χρόνου και των παραμέτρων του προβλήματος.

β) Απ΄ το αποτέλεσμα δείξτε την ταυτότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n J_1(x_n)} = \frac{1}{2} \ , \tag{12.4}$$

όπου $J_n(x)$ συναρτήσεις Bessel και x_n οι ρίζες τις $J_0(x) = 0$.

13 Άσκηση

Η διαφορική εξίσωση

$$\nabla^2 T + g = \partial_t T \ , \tag{13.5}$$

περιγράφει διάχυση θερμότητας παρουσία πηγής παραμετροποιούμενη απ΄ τη συνάρτηση $g(\mathbf{x}, t)$. Ένας πολύ μακρύς κύλινδρος ακτίνας R βρίσκεται αρχικά σε μηδενική θερμοκρασία, η δε κυλινδρική επιφάνειά του κρατείται σε μηδενική θερμοκρασία καθόλη τη διάρκεια.

α)Βρείτε τη θερμοκρασία του κυλίνδρου ως αποτέλεσμα της θερμότητας που γεννά η πηγή, θεωρώντας την απλούστερη των περιπτώσεων κατά την οποία η συνάρτηση g=σταθερά.

β) Απ΄ το αποτέλεσμα δείξτε την ταυτότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^3 J_1(x_n)} = \frac{1}{8} , \tag{13.6}$$

όπου $J_n(x)$ συναρτήσεις Bessel και x_n οι ρίζες τις $J_0(x) = 0$.