

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,  
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,  
Αθήνα, 15784

Ειδικές συναρτήσεις και πολυώνυμα

### Περιεχόμενα

- ▶ Προβλήματα κυλινδρικής συμμετρίας
  - ▶ Συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel.
  - ▶ Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1ου και 2ου είδους.
- ▶ Προβλήματα σφαιρικής συμμετρίας
  - ▶ Πολυώνυμα Legendre 1ου και 2ου είδους.
  - ▶ Σφαιρικές αρμονικές.
  - ▶ Σφαιρικές συναρτήσεις Bessel.
- ▶ Γενική θεωρία ορθογώνιων πολυωνύμων
  - ▶ Πολυώνυμα Jacobi.
  - ▶ Πολυώνυμα Gegenbauer, Hermite, Laguerre, Chebyshev.
  - ▶ Σχέση με υπεργεωμετρική εξίσωση.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Θεωρούμε την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Psi = 0 . \quad (1)$$

- ▶ Λύσεις με χωρισμό μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\Psi(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z) . \quad (2)$$

- ▶ Με αντικατάσταση οδηγούμαστε στις εξισώσεις

- ▶ Γωνιακή εξάρτηση

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \nu^2 \Phi = 0 \quad \implies \quad \Phi \sim e^{\pm i\nu\phi} , \quad \nu \in \mathbb{Z} .$$

- ▶ Εξάρτηση κατά μήκος του άξονα συμμετρίας

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 , \quad \implies \quad Z \sim e^{\pm kz} , \quad k \in \mathbb{C} .$$

- ▶ Το ακτινικό μέρος περιγράφεται απ' την

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0 . \quad (3)$$

## Συναρτήσεις Bessel και Neumann

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση με  $k \in \mathbb{R}$ .

- ▶ Οι λύσεις τις  $Z(z)$  είναι εκθετικές συναρτήσεις.
- ▶ Θέτοντας  $x = k\rho$ ,  $y(x) = R(\rho) = R(x/k)$  η ακτινική εξίσωση (3) γράφεται ως

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (4)$$

που είναι η εξίσωση Bessel.

- ▶ Το σημείο  $x = 0$  είναι σύνηθες ανώμαλο σημείο οπότε έχουμε απειροσειρά της μορφής

$$y(x) = x^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \quad (5)$$

- ▶ Με απλή αντικατάσταση  $\lambda = \pm\nu$ . Θέτοντας  $\lambda = \nu$

$$a_1(2\nu + 1)x^{\nu+1} + \sum_{m=2}^{\infty} [a_m m(2\nu + m) + a_{m-2}]x^{m+\nu} = 0,$$

- ▶ Από αυτήν προκύπτει (αν  $\nu \neq -1/2$ , περίπτωση που θα σχολιάσω παρακάτω), η αναδρομική σχέση [Άσκηση]

$$a_m m(2\nu + m) + a_{m-2} = 0, \quad \text{καθώς και } a_1 = 0,$$

η οποία μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές  $a_{2m}$  συναρτήσει του  $a_0$ , ενώ  $a_{2m+1} = 0$ .

- ▶ Επιλύοντάς την και αντικαθιστώντας στην (5) βρίσκουμε

$$y_1(x) = J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \quad (6)$$

όπου  $J_\nu(x)$  είναι οι λεγόμενες συναρτήσεις **Bessel**.

Για την εύρεση της 2ης ανεξάρτητης λύσης της εξίσωσης Bessel διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- ▶ Αν  $\nu \notin \mathbb{Z}$  τότε η 2η ανεξάρτητη λύση της εξίσωσης Bessel είναι η

$$y_2(x) = J_{-\nu}(x), \quad \nu \notin \mathbb{Z}, \quad (7)$$

η οποία προκύπτει θέτοντας  $\lambda = -\nu$  και παρόμοια με την παραπάνω διαδικασία.

- ▶ Αν  $\nu = n \in \mathbb{Z}$  τότε

$$\Gamma(m - n + 1) = (m - n)!$$

και απ' την (6) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+n)} \end{aligned}$$

- ▶ Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$k! = \Gamma(k+1) = \infty, \quad \text{για } k = -n, \dots, -1,$$

βλέπουμε ότι το άθροισμα

$$\sum_{k=-n}^{-1} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+n)} = 0.$$

- ▶ Τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Άρα η  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$  δεν αποτελεί ανεξάρτητη λύση.

- ▶ Η 2η ανεξάρτητη λύση ορίζεται ως

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \nu \pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi}. \quad (8)$$

και ονομάζεται συνάρτηση **Neumann**. Αν  $\nu \in \mathbb{Z}$  το όριο είναι απροσδιόριστο της μορφής  $0/0$ . Με τον κανόνα **L' Hopital** δείχνεται ότι το όριο είναι καλώς ορισμένο **[Άσκηση]**

Η γενική λύση της ακτινικής εξίσωσης (3) είναι η υπέρθεση

$$R_k(\rho) = A_k J_\nu(k\rho) + B_k Y_\nu(k\rho) . \quad (9)$$

- ▶ Επιπλέον υπέρθεση προκύπτει αν χρειασθούν τα μηδενικά των  $J_\nu(x)$  και  $Y_\nu(x)$ , όπως θα δούμε αργότερα.
- ▶ Αν η αρχή των αξόνων  $\rho = 0$  περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού και επιζητούμε πεπερασμένες λύσεις, τότε  $B_k = 0$ . Αν  $\rho = 0$  δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού, τότε και οι δύο λύσεις πρέπει να χρησιμοποιηθούν.
- ▶ Όμως, υπάρχουν περιπτώσεις όπου χρειάζεται συγκεκριμένη ανώμαλη συμπεριφορά που εκφράζει π.χ. όρο πηγής ενέργειας, παρουσία ηλεκτρικού φορτίου κλπ. Τότε  $B_k \neq 0$ .

**Οριακή και ασυμπτωτική συμπεριφορά:** Σε πολλές εφαρμογές χρειάζεται η συμπεριφορά των συναρτήσεων  $J_\nu(x)$  και  $Y_\nu(x)$ :

- ▶ Για μικρές τιμές του  $x$  έχουμε

$$J_\nu(x) \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right), \quad \nu \notin \mathbb{Z}^-,$$

$$Y_\nu(x) \simeq -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right), \quad \nu \neq 0$$

και

$$Y_0(x) \simeq \frac{2}{\pi} (\ln(x/2) + \gamma),$$

όπου  $\gamma = 0.57721 \dots$  είναι η σταθερά Euler–Mascheroni.

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

- ▶ Για μεγάλες τιμές του  $x$

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \gg 1$$

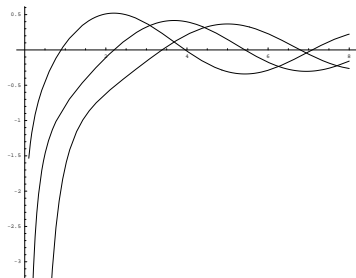
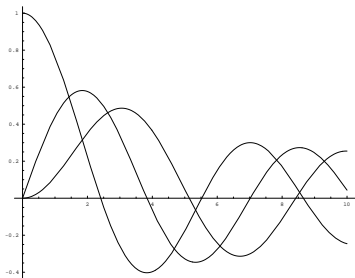
και

$$Y_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \gg 1.$$



Η συμπεριφορά των συναρτήσεων Bessel και Newmann με θετικούς ακέραιους δείκτες απεικονίζεται παρακάτω:

- ▶ Μόνο οι συναρτήσεις Bessel  $J_n(x)$  έχουν ομαλή συμπεριφορά για  $x \ll 1$ .
- ▶ Για  $x \gg 1$  οι  $J_n(x)$  και οι  $Y_n(x)$  συμπεριφέρονται ως  $\sin$  και  $\cos$  με πλάτος μειούμενο ως  $1/\sqrt{x}$ .



Σχήμα: α) Γραφικά των συναρτήσεων Bessel  $J_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2$  και β) των συναρτήσεων Newmann  $Y_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2$ .

**Γεννήτρια Συνάρτηση:** Είναι της μορφής

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x). \quad (10)$$

**Απόδειξη:** Αναπτύσσουμε το αριστερό μέλος (AM) χρησιμοποιώντας και την ανάπτυξη σε δίνυμο

$$\begin{aligned} \text{AM} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \left[ \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!} (-1)^s t^{r-s} \delta_{r+s,m} \right] \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{r+s} \frac{t^{r-s}}{r!s!} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \right], \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα άλλαξα τον δείκτη άθροισης θέτοντας  $r - s = n$ . Το άθροισμα στην αγκύλη είναι η συνάρτηση  $J_n(x)$ .

Η **φυσική σημασία** της γεννήτριας συνάρτησης μπορεί να δωθεί στα πλαίσια της **Κβαντικής Μηχανικής**. Θεωρήστε **ελεύθερο** σωματίο στον  $\mathbb{R}^2$  (άπειρο επίπεδο).

- ▶ Η **Χαμιλτονιανή** εναλλάσσεται με τους **τελεστές ορμής** (που γεννούν μετατοπίσεις κατά μήκος των δύο αξόνων)

$$P_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, \quad [P_1, P_2] = 0, \quad (11)$$

διότι σε κατάλληλες μονάδες έχουμε ότι

$$H = P_1^2 + P_2^2 \implies [H, P_{1,2}] = 0. \quad (12)$$

- ▶ Άρα οι **κοινές ιδιοκαταστάσεις** είναι

$$\Psi_{\mathbf{k}}(x_1, x_2) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = e^{ik\rho \cos\phi},$$

και υπακούουν

$$P_a \Psi_{\mathbf{k}} = k_a \Psi_{\mathbf{k}}, \quad a = 1, 2, \quad H \Psi_{\mathbf{k}} = k^2 \Psi_{\mathbf{k}}.$$

- Ο τελεστής στροφορμής που γεννά στροφές στο επίπεδο είναι

$$J = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \implies [J, P_1] = P_2, \quad [J, P_2] = -P_1, \quad (13)$$

Οι εναλλάκτες αποδεικνύονται είτε με αναγραφή των  $P_a$  σε πολικές συντεταγμένες είτε του  $J$  σε Καρτεσιανές [Άσκηση].

- Η εξίσωση Schrödinger σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = E \Psi, \quad E = k^2.$$

Με χωρισμό μεταβλητών επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$\Psi_{n,k}(\rho, \phi) = e^{in\phi} J_n(k\rho),$$

Επειδή

$$[H, J] = 0,$$

θα πρέπει να είναι δυνατή η ταυτόχρονη διαγωνοποίηση των  $H$  και  $J$ . Πράγματι οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές υπακούουν

$$J\Psi_{n,k} = n\Psi_{n,k}, \quad H\Psi_{n,k} = k^2\Psi_{n,k}.$$

- ▶ Η γεννήτρια συνάρτηση (10) για  $x = k\rho$  και  $t = e^{i\phi}$  γράφεται

$$e^{ik\rho \cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} J_n(k\rho) \implies \Psi_{\mathbf{k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_{n,k} .$$

- ▶ Ιδιοκαταστάσεις στροφορμής  $\implies$  Ιδιοκαταστάσεις ορμής.

**Ολοκληρωτική αναπαράσταση:** Από τη γεννήτρια συνάρτηση

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) ,$$

αντιστρέφοντας, βρίσκουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dt t^{-n-1} e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} , \quad (14)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε μικρό κύκλο γύρω από το  $t = 0$  στο μιγαδικό επίπεδο.

- ▶ Θέτοντας  $t = e^{i\phi}$  βρίσκουμε την ισοδύναμη σχέση

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} e^{ix \sin \phi} .$$

Η τελευταία σχέση είναι εξαιρετικά χρήσιμη.

- ▶ Όπου εμφανίζονται ολοκληρώματα με  $\sin$  και  $\cos$  στον εκθέτη είναι πολύ πιθανόν να μπορούν να εκφραστούν μέσω συναρτήσεων Bessel.

**Ταυτότητες:** Με χρήση της γεννήτριας συνάρτησης μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τις **αναδρομικές σχέσεις**

$$\begin{aligned} 2J'_n(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) , \\ \frac{2n}{x} J_n(x) &= J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) . \end{aligned}$$

π.χ. παραγωγίζοντας τη σχέση (10) για τη γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J'_n(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( t - \frac{1}{t} \right) t^n J_n(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) , \end{aligned}$$

απ' την οποία αποδεικνύεται η 1η εκ των παραπάνω σχέσεων. Σημειώνω ότι για τη 2η ισότητα αλλάχθηκε ο δείκτης άθροισης από  $n \rightarrow n \mp 1$  στους δύο όρους αντίστοιχα.

Από την ανάπτυξη της συνάρτησης Bessel σε απειροσειρά και παρόμοιες μεθόδους μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) ,$$
$$\left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m [x^{-n} J_n(x)] = (-1)^m x^{-m-n} J_{m+n}(x) .$$

Παρατηρήσεις:

- ▶ Οι παραπάνω ταυτότητες ισχύουν και για  $n \rightarrow \nu \notin \mathbb{Z}$ .
- ▶ Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς και ότι  $e^{i\nu\pi} = -e^{i(\nu\pm 1)\pi}$ , αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω ταυτότητες ισχύουν και για τις συναρτήσεις  $Y_\nu(x)$ .



**Προσθετικό θεώρημα:** Ισχύει ότι

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)J_{n-m}(y) . \quad (15)$$

**Απόδειξη:** Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τη σχέση για τη γεννήτρια συνάρτηση, με ορίσματα  $x$  και  $y$ , έχουμε

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)(t-1/t)} = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} t^{k+m} J_m(x)J_k(y) .$$

Το αριστερό μέλος (AM) μέσω της γεννήτριας συνάρτησης είναι

$$AM = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(x+y) .$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με  $t^{-n-1}$  και ολοκληρώνοντας στο μιγαδικό  $t$ -επίπεδο γύρω απ' το  $t = 0$ , αποδεικνύεται η (15).

**Σημεία μηδενισμού:** Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τα σημεία μηδενισμού των συναρτήσεων Bessel και Neumann

$$J_\nu(x_{\nu,m}) = 0, \quad Y_\nu(\tilde{x}_{\nu,m}) = 0, \quad (16)$$

των οποίων οι λύσεις είναι **άπειρες** στο πλήθος.

- ▶ Για τις μεγάλες ρίζες χρησιμοποιώντας τις **ασυμπτωτικές** εκφράσεις των  $J_\nu(x)$  και  $Y_\nu(x)$  έχουμε

$$x_{\nu,m} \simeq \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{(2m+1)\pi}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}^+,$$

και

$$\tilde{x}_{\nu,m} \simeq \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}^+.$$

- ▶ Σημειώνω επίσης τις χρήσιμες σχέσεις

$$J'_\nu(x_{\nu,m}) \simeq (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi x_{\nu,m}}}, \quad Y'_\nu(\tilde{x}_{\nu,m}) \simeq (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{x}_{\nu,m}}}$$

και  $J'_\nu(\tilde{x}_{\nu,m}) \simeq Y'_\nu(x_{\nu,m}) \simeq 0$ , στο όριο των **μεγάλων ριζών**.

**Ορθογωνιότητα και πληρότητα:** Η εξίσωση Bessel (3) αποτελεί ειδική περίπτωση της εξίσωσης **Sturm–Liouville**

$$\frac{d}{dx} \left( f \frac{d\Phi}{dx} \right) + (Eh + \rho)\Phi = 0 ,$$

με  $(x = \rho$  και  $\Phi = R$  στην περίπτωση μας)

$$f(\rho) = h(\rho) = \rho , \quad E = k^2 , \quad \rho(\rho) = -\frac{\nu^2}{\rho} .$$

Από τη γενική θεωρία στο διάστημα  $\rho \in [0, a]$  έχουμε

$$(k^2 - k'^2) \int_0^a d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = a [k' J_\nu(ka) J'_\nu(k'a) - k J_\nu(k'a) J'_\nu(ka)] .$$

Με **Dirichlet** οριακές συνθήκες

$$J_\nu(ka) = 0 \implies k = k_{\nu,m} = \frac{x_{\nu,m}}{a}, \quad (\text{παρόμοια για } k'),$$

που οδηγούν σε κβάντωση του κυματανύσματος.

Τελικά έχουμε:

- ▶ Για τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\begin{aligned} \int_0^a d\rho \rho J_\nu(x_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(x_{\nu,m'}\rho/a) &= \mathcal{N}_{\nu,m} \delta_{m,m'} \\ &= \frac{a^2}{2} [J'_\nu(x_{\nu,m})]^2 \delta_{m,m'}. \end{aligned} \quad (17)$$

- ▶ ενώ η σχέση πληρότητας είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\nu(x_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(x_{\nu,m}\rho'/a)}{\mathcal{N}_{\nu,m}} = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho}. \quad (18)$$

Με **Neumann** οριακές συνθήκες

$$J'_\nu(ka) = 0 \implies k = k_{\nu,m} = \frac{y_{\nu,m}}{a}, \quad [\text{παρόμοια για } k']$$

επίσης έχουμε κβάντωση των κυματανυσμάτων.

Τελικά έχουμε:

- Για τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\begin{aligned} & \int_0^a d\rho \rho J_\nu(y_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(y_{\nu,m'}\rho/a) \\ &= \mathcal{M}_{\nu,m} \delta_{m,m'} = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{y_{\nu,m}^2}\right) [J_\nu(y_{\nu,m})]^2 \delta_{m,m'}, \end{aligned} \quad (19)$$

- ενώ η σχέση πληρότητας είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\nu(y_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(y_{\nu,m}\rho'/a)}{\mathcal{M}_{\nu,m}} = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho}. \quad (20)$$

**Γενική παρατήρηση:** Στις σχέσεις ορθογωνιότητας και πληρότητας η τάξη  $\nu$  των συναρτήσεων  $J_\nu$  και  $Y_\nu$  είναι σταθερή.

**Ορθοκανονικές σχέσεις σε όλο το χώρο:** Θεωρούμε το διάστημα  $\rho \in [0, \infty)$ , οπότε πρέπει να πάρουμε το όριο  $a \rightarrow \infty$  στις προηγούμενες σχέσεις.

- ▶ Επειδή οι επιτρεπόμενες τιμές του κυματανύσματος είναι κβαντισμένες και δίνονται από την  $k_{\nu,m} = x_{\nu,m}/a$ , το όριο  $a \rightarrow \infty$  σημαίνει ότι πρέπει να θεωρήσουμε τις **μεγάλες ρίζες**  $x_{\nu,m}$  των Bessel ώστε ο λόγος να είναι **πεπερασμένος**.
- ▶ Το φάσμα είναι **συνεχές** με πυκνότητα

$$\frac{dk}{dm} \simeq \frac{\pi}{a},$$

όπου χρησιμοποίησα ότι  $k \simeq \pi m + \text{σταθερά}$  για τις μεγάλες ρίζες.

- ▶ Στο **συνεχές** όριο

$$\sum_m \rightarrow \int dm = \frac{a}{\pi} \int dk$$

και επίσης

$$\delta_{m,m'} \simeq \frac{\delta(k - k')}{dm/dk} \simeq \frac{\pi}{a} \delta(k - k').$$

- ▶ Η κανονικοποίηση είναι ανεξάρτητη των οριακών συνθηκών [Άσκηση]

$$\mathcal{N}_{\nu,m} \simeq \mathcal{M}_{\nu,m} \simeq \frac{a}{\pi k} .$$

- ▶ Τελικά οι σχέσεις ορθογωνιότητας και πληρότητας γίνονται

$$\int_0^\infty d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{\delta(k - k')}{k} \quad (21)$$

και

$$\int_0^\infty dk k J_\nu(k\rho) J_\nu(k\rho') = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} . \quad (22)$$

Βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός **Hankel** της Bessel είναι πάλι μια συνάρτηση Bessel.

**Υπολογισμός σταθερών κανονικοποίησης:** Θέλουμε να υπολογίσουμε τις σταθερές κανονικοποίησης που εμφανίζονται στα ολοκληρώματα με συναρτήσεις Bessel για Dirichlet και Neumann οριακές συνθήκες. Η βασική σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι

$$(k^2 - k'^2) \int_0^a d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = a [k' J_\nu(ka) J'_\nu(k'a) - k J_\nu(k'a) J'_\nu(ka)] ,$$

Αυτή απορρέει απ' τη γενική θεωρία προβλημάτων τύπου **Sturm–Liouville**, εφαρμοσμένη στην περίπτωση μας.

- ▶ Θέλουμε το όριο  $k \rightarrow k'$ .
  - ▶ Το αριστερό μέλος είναι

$$(AM) \simeq 2k'(k - k') \int_0^a d\rho \rho J_\nu^2(k'\rho) .$$

- ▶ Το δεξί μέλος είναι

$$(\Delta M) \simeq (k - k') a \left[ x J_\nu'^2(x) - J_\nu(x) J_\nu'(x) - x J_\nu(x) J_\nu''(x) \right]_{x=k'a} .$$



Εξισώνοντας το δύο μέλη έχουμε τη γενική σχέση για κάθε οριακή συνθήκη που επιβάλλουμε

$$\int_0^a d\rho\rho J_\nu^2(k'\rho) = \frac{a}{2k'} \left[ xJ_\nu'^2(x) - J_\nu(x)J_\nu'(x) - xJ_\nu(x)J_\nu''(x) \right]_{x=k'a} . \quad (23)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- ▶ Την **Dirichlet** οριακή συνθήκη  $J_\nu(k'a) = 0$ , οπότε  $k' = x_{\nu,m}/a$  και η (23) γίνεται

$$\int_0^a d\rho\rho J_\nu^2(x_{\nu,m}\rho/a) = \frac{a^2}{2} [J_\nu'(x_{\nu,m})]^2 .$$

- ▶ Την **Neumann** οριακή συνθήκη  $J_\nu'(k'a) = 0$ , οπότε  $k' = y_{\nu,m}/a$  και η (23) γίνεται

$$\begin{aligned} \int_0^a d\rho\rho J_\nu^2(y_{\nu,m}\rho/a) &= -\frac{a^2}{2} J_\nu(y_{\nu,m})J_\nu''(y_{\nu,m}) \\ &= \frac{a^2}{2} \left( 1 - \frac{\nu^2}{y_{\nu,m}^2} \right) J_\nu^2(y_{\nu,m}) . \end{aligned}$$

**Υπολογισμός ολοκληρωμάτων:** Σε εφαρμογές εμφανίζονται ολοκληρώματα με όρια μηδενικά συναρτήσεων Bessel. Μπορούν να υπολογισθούν με τη βοήθεια αναδρομικών σχέσεων.

**Παράδειγμα:** Ας υπολογίσουμε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$A_n = \int_0^{x_n} dx \, x \left( 1 - \frac{x^2}{x_n^2} \right) J_0(x), \quad J_0(x_n) = 0,$$

$$B_n = \int_0^{y_n} dx \, x^3 J_0(x), \quad J_1(y_n) = 0.$$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$xJ_0(x) = (xJ_1(x))'$$

και ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες. Βρίσκουμε ότι

$$A_n = \frac{2}{x_n^2} \int_0^{x_n} dx \, x^2 J_1(x),$$

$$B_n = -2 \int_0^{y_n} dx \, x^2 J_1(x).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες

$$x^2 J_1(x) = (x^2 J_2(x))' , \quad J_2(x_n) = \frac{2}{x_n} J_1(x_n) ,$$

βρίσκουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{4}{x_n} J_1(x_n) , & J_0(x_n) &= 0 , \\ B_n &= -2y_n^2 J_2(y_n) , & J_1(y_n) &= 0 . \end{aligned}$$

Ως **[Άσκηση]** καλείστε να συμπληρώσετε μερικά ενδιάμεσα βήματα, στα οποία γίνεται φανερή η σημασία του γεγονότος ότι τα  $x_n$  και  $y_n$  είναι ρίζες των  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ , αντιστοίχως.

### Συναρτήσεις *Hankel*

Στη Φυσική τεράστιο ενδιαφέρον, εξαιτίας και των τεχνολογικών εφαρμογών τους, παρουσιάζουν οι λύσεις εκείνες των εξισώσεων που περιγράφουν ένα φυσικό σύστημα και που παριστάνουν **διάδοση κυμάτων** (π.χ. Ηλεκτρομαγνητικών, ακουστικών κλπ).

- ▶ Ειδικότερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν λύσεις οι οποίες συμπεριφέρονται ως **κυλινδρικά ή σφαιρικά κύματα** σε μεγάλες αποστάσεις από τις πηγές που τα δημιουργούν.
- ▶ Στην περίπτωση της εξίσωσης Bessel ορίζουμε έτσι τις συναρτήσεις **Hankel**:
  - ▶ Hankel **1ου είδους**

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + iY_\nu(x) . \quad (24)$$

- ▶ Hankel **2ου είδους**

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iY_\nu(x) . \quad (25)$$

- ▶ Η  $x$  είναι το γινόμενο του κυματανύσματος με την ακτινική συντεταγμένη σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες.
- ▶ Για μικρές αποστάσεις  $x \ll 1$  η συμπεριφορά τους είναι ανώμαλη, αλλά αυτό είναι συμβατό με την ύπαρξη πηγών στο φυσικό πρόβλημα.
- ▶ Για μεγάλες αποστάσεις έχουμε

$$H_v^{(1,2)} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i(x - v\pi/2 - \pi/4)}, \quad x \gg 1. \quad (26)$$

Συνδυάζοντας με χρονική εξάρτηση του τύπου  $e^{\pm ivt}$ , βλέπουμε συμπεριφορά κύματος με μειούμενο πλάτος.

### Τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel*

Θεωρούμε τώρα περιπτώσεις όπου η σταθερά διαχωρισμού  $k$  της εξίσωσης Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι φανταστική. Τότε έχουμε επίσης τριγωνομετρική συμπεριφορά και για την  $Z(z)$ . Για λύσεις με χωρισμό μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\Psi(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z) . \quad (27)$$

έχουμε τις εξής ΔΕ:

- ▶ Γωνιακή εξάρτηση

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu^2\Phi = 0 \quad \implies \quad \Phi \sim e^{\pm i\nu\phi} , \quad \nu \in \mathbb{R} .$$

- ▶ Εξάρτηση κατά μήκος του άξονα συμμετρίας

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2Z = 0 , \quad \implies \quad Z \sim e^{\pm ikz} , \quad k \in \mathbb{R} .$$

- ▶ Το ακτινικό μέρος περιγράφεται απ' την

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \left( k^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0 .$$

- ▶ Θέτοντας  $x = k\rho$ ,  $y(x) = R(\rho) = R(x/k)$  η ακτινική εξίσωση γίνεται η λεγόμενη **τροποποιημένη εξίσωση Bessel**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left( 1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0 . \quad (28)$$

Οι λύσεις της είναι οι **τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel**:

- ▶ 1ου είδους

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad (29)$$

- ▶ και 2ου είδους

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} (I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)) . \quad (30)$$

- ▶ Ο παράγοντας  $i^{-\nu}$  εισήχθηκε έτσι ώστε οι συναρτήσεις  $I_\nu(x)$  και  $K_\nu(x)$  να είναι **πραγματικές**.

Οριακή και ασυμπτωτική συμπεριφορά:

- ▶ Για μικρές τιμές του  $x$  έχουμε

$$I_\nu(x) \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right), \quad n \notin \mathbb{Z}^-$$

$$K_\nu(x) \simeq \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right), \quad \nu \neq 0$$

και

$$K_0(x) \simeq -[\ln(x/2) + \gamma],$$

$\gamma = 0.57721 \dots$  είναι η σταθερά Euler–Mascheroni.

- ▶ Για μεγάλες τιμές του  $x$

$$I_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x, \quad x \gg 1$$

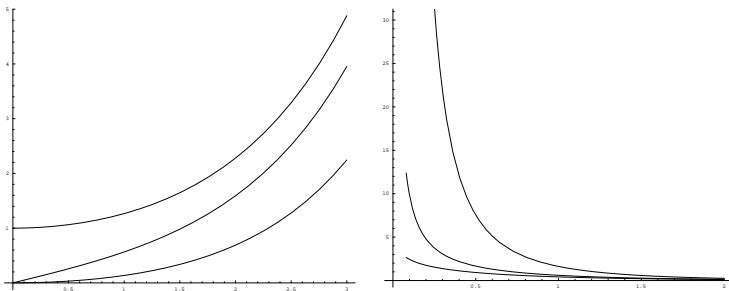
και

$$K_\nu(x) \simeq \frac{\pi}{\sqrt{2x}} e^{-x}, \quad x \gg 1.$$

Προσέξτε ότι είναι ανεξάρτητες του δείκτη  $\nu$ .



Η συμπεριφορά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel με θετικούς ακέραιους δείκτες απεικονίζεται παρακάτω. Οι  $I_n(x)$  έχουν ομαλή συμπεριφορά για  $x \ll 1$  και οι  $K_n(x)$  για  $x \gg 1$ .



**Σχήμα:** α) Γραφικά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel  $I_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2$  και β)  $K_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2$ .

**Γεννήτρια συνάρτηση:** Στη γεννήτρια συνάρτηση για τις συναρτήσεις Bessel

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) ,$$

θέτουμε όπου  $x \rightarrow ix$  και  $t \rightarrow -is$ . Χρησιμοποιώντας τον ορισμό  $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$ , παίρνουμε τη γεννήτρια συνάρτηση των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel

$$e^{\frac{x}{2}(s+\frac{1}{s})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n I_n(x) . \quad (31)$$

**Ολοκληρωτική αναπαράσταση:** Στην ολοκληρωτική αναπαράσταση για την  $J_n(x)$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} e^{ix \sin \phi} ,$$

θέτουμε όπου  $x \rightarrow ix$  και βρίσκουμε ότι

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} e^{x \cos \phi} . \quad (32)$$

**Αναδρομικές σχέσεις:** Αυτές βρίσκονται απ' τις αντίστοιχες αναδρομικές σχέσεις των συναρτήσεων Bessel. π.χ. [Άσκηση]

$$\begin{aligned}2l'_n(x) &= l_{n-1}(x) + l_{n+1}(x), \\ \frac{2n}{x}l_n(x) &= l_{n-1}(x) - l_{n+1}(x).\end{aligned}\tag{33}$$

- ▶ Έχουν ισχύ και για  $n \rightarrow \nu \notin \mathbb{Z}$ , καθώς επίσης και για τις  $K_\nu(x)$ .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Θεωρούμε την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Psi = 0 . \quad (34)$$

και υποθέτουμε σφαιρική συμμετρία. Με χωρισμό μεταβλητών

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (35)$$

και αντικατάσταση στην (34) οδηγούμαστε στις εξισώσεις:

- ▶ Εξάρτηση απ' την γωνία  $\phi$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \nu^2 \Phi = 0 \quad \implies \quad \Phi \sim e^{\pm i\nu\phi} ,$$

- ▶ Εξάρτηση απ' την ακτινική συντεταγμένη  $r$

$$\frac{d^2(rR)}{dr^2} - \ell(\ell+1) \frac{R}{r} = 0 , \quad \implies \quad R \sim r^\ell , \quad r^{-\ell-1} ,$$

όπου  $\nu, \ell \in \mathbb{R}$  σταθερές απ' το χωρισμό μεταβλητητών.

- Επίσης παίρνουμε και τη  $\Delta E$  για την εξάρτηση απ' τη γωνία  $\theta$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left( \ell(\ell+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0 . \quad (36)$$

- Με αλλαγή μεταβλητής  $x = \cos\theta$  αυτή γράφεται

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \left( \ell(\ell+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2} \right) \Theta = 0 . \quad (37)$$

την οποία εν συνεχεία μελετούμε.

### Πολυώνυμα Legendre

Προς εύρεση λύσεων της (37) εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση με  $\nu = 0$  οπότε η (37) ανάγεται στη ΔΕ Legendre

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \ell(\ell+1)\Theta = 0, \quad x = \cos\theta. \quad (38)$$

Οι λύσεις της εξαρτώνται:

- ▶ Από το διάστημα στο οποίο η  $\theta$  παίρνει τιμές.  
Σημειώνω ότι  $0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ , αλλά σε εφαρμογές το διάστημα της  $\theta$  μπορεί να είναι ακόμα μικρότερο.
- ▶ Εάν  $\ell \geq 0$  και ακέραιος, το οποίο επίσης υποθέτουμε.

Π.χ. για  $\ell = 0$ , έχουμε η (38) γίνεται

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) = 0 ,$$

η οποία έχει δύο λύσεις:

$$\Theta = 1 , \quad \Theta = \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) ,$$

οι οποίες είναι κανονικοποιήσιμες στο διάστημα  $x \in [-1, 1]$ .

Όμως, εκτός και αν συντρέχουν λόγοι, η 2η λύση είναι απορριπτέα γιατί απειρίζεται στους πόλους για  $\theta = 0, \pi$ .

- ▶ Για ακέραια  $\ell > 1$  έχουμε πάντα ως λύση πολυώνυμο τάξεως  $\ell + 1$ . Η 2η λύση περιέχει όρο με  $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ .
- ▶ Ο λόγος εμφάνισης των λογαρίθμων είναι ότι η εξίσωση Legendre έχει συνήθη ανώμαλα σημεία στα  $x = \pm 1$  για τα οποία η χαρακτηριστική εξίσωση έχει λύσεις  $\rho_1 = \ell + 1$  και  $\rho_2 = -\ell$  [Άσκηση].  
Η διαφορά  $\rho_1 - \rho_2 = 2\ell + 1$  είναι ακέραιος, οπότε απ' τη γενική θεωρία ΔΕ, η λύση της (38) θα περιέχει  $\ln(1 \pm x)$ .



**Ορισμός:** Ως βάση των πολυωνύμων τάξης  $\ell + 1$ , μπορούμε να πάρουμε την  $\{x^m\}$  με  $m = 0, 1, \dots, \ell + 1$ , η οποία δεν είναι ορθοκανονική, αλλά μπορεί να γίνει με τη μέθοδο των **Gram-Schmidt**. Το αποτέλεσμα είναι τα πολυώνυμα **Legendre** που ορίζονται απ' τον τύπο του **Rodriguez**

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell, \quad (39)$$

όπου η κανονικοποίηση είναι τέτοια ώστε  $P_\ell(1) = 1$ . Μπορεί να δειχθεί ότι τα  $P_\ell(x)$  ικανοποιούν την εξίσωση Legendre **[Άσκηση]**.

**Εναλλακτική μέθοδος με δυναμοσειρά:** Οι λύσεις της εξίσωσης Legendre

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \ell(\ell+1)\Theta = 0 ,$$

μπορούν να βρεθούν με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά.

- ▶ Το σημείο  $x = 0$  είναι **ομαλό** οπότε έχουμε απειροσειρά της μορφής

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m ,$$

- ▶ Με απλή αντικατάσταση παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$a_{m+2} = \frac{m(m+1) - \ell(\ell+1)}{(m+1)(m+2)} a_m .$$

Η απειροσειρά **τερματίζεται** στον όρο με  $m = \ell$ .

- ▶ Η σταθερά κανονικοποίησης καθορίζεται απ' τη σύμβαση ότι ο συντελεστής του όρου  $x^\ell$  στο  $P_\ell(x)$  είναι

$$\frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2 2^\ell} ,$$

επιλεγμένος έτσι ώστε το αποτέλεσμα να συμφωνεί με τον ορισμό μέσω του τύπου του Rodriguez, δηλαδή

$$y(x) = P_\ell(x) .$$

Τα χαμηλότερης τάξης πολυώνυμα Legendre είναι:

$$P_0(x) = 1,$$

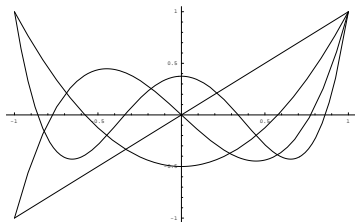
$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

και παρακάτω αναπαρίστανται γραφικά μερικά απ' αυτά



Σχήμα: Γραφικά των πολυωνύμων Legendre  $P_\ell(x)$ ,  $\ell = 1, 2, 3, 4$

**Μετασχηματισμός αρτιότητας:** Από τον ορισμό με τον τύπο του Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell ,$$

βρίσκουμε ότι

$$P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x) . \quad (40)$$

**Ορθοκανονικότητα:** Από τον ορισμό και με κατάλληλες ολοκληρώσεις κατά μέλη έχουμε

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell(x) P_{\ell'}'(x) = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell, \ell'} . \quad (41)$$

**Απόδειξη:** Με χρήση του τύπου του Rodrigues

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx P_\ell(x) P_{\ell'}(x) &= \frac{1}{2^{\ell+\ell'} \ell! \ell'!} \int_{-1}^1 dx \left[ \frac{d^\ell (x^2 - 1)^\ell}{dx^\ell} \right] \left[ \frac{d^{\ell'} (x^2 - 1)^{\ell'}}{dx^{\ell'}} \right] \\ &= \frac{(-1)^\ell}{2^{\ell+\ell'} \ell! \ell'!} \int_{-1}^1 dx (x^2 - 1)^\ell \left[ \frac{d^{\ell+\ell'}}{dx^{\ell+\ell'}} (x^2 - 1)^{\ell'} \right] , \end{aligned}$$

όπου κάναμε  $\ell$  ολοκληρώσεις κατά μέλη.

- ▶ Λόγω των  $\ell + \ell'$  παραγώγων σε πολυώνυμο βαθμού  $2\ell'$  πρέπει για μη μηδενικό αποτέλεσμα

$$\ell \leq \ell' \quad \text{και παρόμοια} \quad \ell' \leq \ell .$$

Άρα  $\ell = \ell'$ .

- ▶ Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx P_{\ell}^2(x) &= \frac{(-1)^{\ell}}{2^{2\ell}(\ell!)^2} \int_{-1}^1 dx (x^2 - 1)^{\ell} \frac{d^{2\ell}(x^2 - 1)^{\ell}}{dx^{2\ell}} \\ &= \frac{(-1)^{\ell}(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2} \int_{-1}^1 dx (x^2 - 1)^{\ell} . \end{aligned}$$

Υπολογίζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 dx (x^2 - 1)^{\ell} = \sqrt{\pi} \frac{(-1)^{\ell} \ell!}{\Gamma(\ell + 3/2)} ,$$

βρίσκουμε ότι

$$\int_{-1}^1 dx P_{\ell}^2(x) = \frac{2}{2\ell + 1} .$$

Η σχέση πληρότητας: Αυτή γράφεται ως

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) P_{\ell}(x) P_{\ell}(x') = \delta(x - x') . \quad (42)$$

Χρησιμοποιώντας την, οποιαδήποτε συνάρτηση  $f(x)$  με  $x \in [-1, 1]$ , αναπτύσσεται ως

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} P_{\ell}(x) , \quad (43)$$

με

$$A_{\ell} = \left( \frac{\ell}{2} + 1 \right) \int_{-1}^1 dx f(x) P_{\ell}(x) .$$

**Ανάπτυξη σε πολυώνυμο:** Από τον ορισμό μέσω του τύπου του Rodrigues βρίσκουμε ότι

$$P_{\ell}(x) = \frac{1}{2^{\ell}} \sum_{k=0}^{\ell} \left( \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!} \right)^2 (x-1)^{\ell-k} (x+1)^k. \quad (44)$$

**Απόδειξη:** Χρησιμοποιώντας τον τύπο πολλαπλής παραγώγισης γινομένου

$$\frac{d^{\ell}[f(x)g(x)]}{dx^{\ell}} = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \frac{d^{\ell-k} g(x)}{dx^{\ell-k}},$$

για  $f(x) = (x-1)^{\ell}$  και  $g(x) = (x+1)^{\ell}$  και επίσης ότι

$$\frac{d^k}{dx^k} (x-1)^{\ell} = \frac{\ell!}{(\ell-k)!} (x-1)^{\ell-k}, \quad \frac{d^{\ell-k}}{dx^{\ell-k}} (x+1)^{\ell} = \frac{\ell!}{k!} (x+1)^k,$$

αποδεικνύεται η (44) [**Έλεγχος**].



**Η γεννήτρια συνάρτηση και η φυσική της σημασία:** Ας θεωρήσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό μοναδιαίου φορτίου στη θέση  $\mathbf{R} = (0, 0, 1)$ . Για τυχαίο σημείο στο χώρο  $\mathbf{r}$  έχουμε ότι

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1 - 2r \cos \theta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta). \quad (45)$$

Επικεντρώνοντας στον άξονα  $z$  με  $\theta = 0$  (και επειδή  $P_{\ell}(1) = 1$ )

$$\frac{1}{|r - 1|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right).$$

Αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος έχουμε:

$$\blacktriangleright r < 1: \quad \frac{1}{|r - 1|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^{\ell} \quad \implies \quad A_{\ell} = 1, \quad B_{\ell} = 0,$$

$$\blacktriangleright r > 1: \quad \frac{1}{|r - 1|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^{-\ell-1} \quad \implies \quad A_{\ell} = 0, \quad B_{\ell} = 1.$$

- ▶ Το τελικό αποτέλεσμα για το δυναμικό είναι

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1 - 2r \cos \theta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta), \quad (46)$$

όπου  $r_{<}$  ( $r_{>}$ ) είναι το μικρότερο (μεγαλύτερο) μεταξύ των  $r$  και 1. Ο συμβολισμός αυτός είναι συχνότατος στη Φυσική.

- ▶ Σε κάθε περίπτωση η σχέση αυτή γράφεται και ως

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 - 2tx}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} P_{\ell}(x), \quad (47)$$

με  $t = r$  ή  $t = 1/r$ , έτσι ώστε  $t < 1$  και  $x = \cos \theta$ .

- ▶ Η ανάπτυξη αυτή ισχύει και για  $t$  μιγαδικό. Έτσι το αριστερό της μέλος αποτελεί τη γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre.

**Αναδρομικές σχέσεις:** Ο ορισμός και η γεννήτρια συνάρτηση οδηγούν σε διάφορες ταυτότητες και αναδρομικές σχέσεις. π.χ.

$$\begin{aligned}(2\ell + 1)P_\ell(x) &= P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x) , \\ (2\ell + 1)xP_\ell(x) &= (\ell + 1)P_{\ell+1}(x) + \ell P_{\ell-1}(x) .\end{aligned}\quad (48)$$

**Απόδειξη:** Παραγωγίζοντας τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς  $t$

$$\frac{x - t}{(t^2 + 1 - 2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell P_\ell(x) t^{\ell-1} .$$

Πολλαπλασιάζουμε με  $2t$  και προσθέτουμε τη γεννήτρια

$$\frac{1 - t^2}{(t^2 + 1 - 2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)P_\ell(x)t^\ell .$$

Όμως απ' τη γεννήτρια συνάρτηση παραγωγίζοντας ως προς  $x$

$$\frac{t}{(t^2 + 1 - 2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P'_\ell(x)t^\ell .$$

Διαιρώντας ή πολλαπλασιάζοντας με  $t$ , αλλάζοντας τον δείκτη άθροισης και αφαιρώντας, βρίσκουμε

$$\frac{1-t^2}{(t^2+1-2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} [P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x)] .$$

Εξισώνοντας, αποδεικνύεται η 1η εκ των (48).

**Συναρτήσεις Legendre 2ου είδους:** Αποτελούν τη 2η ανεξάρτητη λύση της εξίσωσης Legendre και έχουν την μορφή

$$Q_\ell(x) = \frac{1}{2} P_\ell(x) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - \sum_{m=1}^{\ell} \frac{1}{m} P_{m-1}(x) P_{\ell-m}(x), \quad \ell = 0, 1, \dots$$

Τείνουν στο άπειρο στους πόλους της σφαίρας (για  $x \rightarrow \pm 1$ ). Μερικές απ' τις  $Q_\ell(x)$  χαμηλής τάξεως είναι:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right),$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - 1,$$

$$Q_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{4} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{3x}{2}.$$

$$Q_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{4} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3}.$$

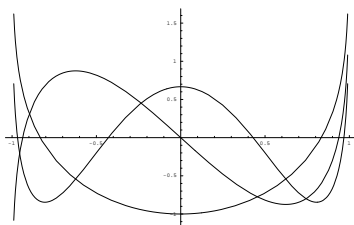
Οι  $Q_\ell(x)$  είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες,  $\int_{-1}^1 dx Q_\ell^2(x) < \infty$ .

Λόγω της συμπεριφοράς τους για  $x = \pm 1$ , οι συναρτήσεις  $Q_\ell(x)$  απορρίπτονται σε πολλές προβλήματα ως φυσικώς μη αποδεκτές.

Όμως πρέπει να συμπεριληφθούν σε δύο γενικές περιπτώσεις:

- ▶ Οι **πόλοι** της σφαίρας **δεν περιμβάνονται** στο πεδίο ορισμού του φυσικού προβλήματος, δηλαδή  $\theta_{\min} > 0$  και  $\theta_{\max} < \pi$ .
- ▶ Στους πόλους υπάρχει **όρος πηγής** ανάλογος της  $\delta(\cos\theta \pm 1)$  ο οποίος μετατρέπει την εξίσωση Laplace σε Poisson.

Συναρτήσεις  $Q_\ell(x)$  αναπαρίστανται γραφικά στο σχήμα



**Σχήμα:** Γραφικά των συναρτήσεων Legendre  $Q_\ell(x)$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

Οι συναρτήσεις  $Q_\ell(x)$  υπακούουν τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις με τα πολυώνυμα Legendre.

Η γενική λύση του αξιsymμετρικού προβλήματος είναι

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta) + \left( C_{\ell} r^{\ell} + \frac{D_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) Q_{\ell}(\cos \theta). \quad (49)$$

- ▶ Οι 4 σταθερές ακολουθίες  $A_{\ell}$ ,  $B_{\ell}$ ,  $C_{\ell}$  και  $D_{\ell}$  προσδιορίζονται απ' τις οριακές συνθήκες του προβλήματος.
- ▶ Αν δεν υπάρχουν όροι πηγής και οι πόλοι της σφαίρας ανήκουν στο πεδίο ορισμού του προβλήματος τότε  $C_{\ell} = D_{\ell} = 0$ .
- ▶ Αν η αρχή των αξόνων  $r = 0$  ή το  $r = \infty$  περιλαμβάνονται στο πεδίο ορισμού του προβλήματος, τότε οι σταθερές  $B_{\ell} = D_{\ell} = 0$  και  $A_{\ell} = C_{\ell} = 0$  (εκτός από  $\ell = 0$ ), αντίστοιχα.

## Σφαιρικές αρμονικές

Στην γενικότερη περίπτωση με  $\nu \neq m \neq 0$ ,  $\ell \geq 0$  και ακέραιους η ΔΕ

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \left( \ell(\ell+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2} \right) \Theta = 0 ,$$

επιδέχεται ως λύσεις τις **προσεταιρισμένες συναρτήσεις Legendre**.

- ▶ Για  $m > 0$  ορίζονται ως

$$P_{\ell}^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_{\ell}(x)}{dx^m} . \quad (50)$$

- ▶ Για  $m < 0$  οι αντικαθιστούμε  $\frac{d}{dx} \rightarrow \int dx$ .

Όμως μπορεί να δειχθεί ότι

$$P_{\ell}^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(x) , \quad (51)$$

οπότε δεν πρόκειται για ανεξάρτητες συναρτήσεις.



**Ορισμός:** Οι σφαιρικές αρμονικές ορίζονται ως

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = A_{\ell, m} P_\ell^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad -\ell \leq m \leq \ell, \quad (52)$$

όπου η σταθερά κανονικοποίησης είναι

$$A_{\ell, m} = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}}.$$

Αν  $|m| > \ell$  τότε  $Y_\ell^m = 0$ .

Μερικές ιδιότητες είναι:

- ▶ Περιορισμός στον άξονα  $z$ .

$$Y_\ell^m(0, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \delta_{m,0}. \quad (53)$$

- ▶ Επίσης

$$Y_\ell^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta). \quad (54)$$

- ▶ Οι σφαιρικές αρμονικές αποτελούν βάση της αναπαράστασης της ομάδας συμμετρίας  $SU(2)$  με στροφορμή  $\ell$ .

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

- ▶ Το μιγαδικό συζυγές είναι

$$[Y_\ell^m(\theta, \phi)]^* = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta, \phi) . \quad (55)$$

- ▶ Κάτω απ' το μετασχηματισμό αρτιότητας

$$Y_\ell^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \phi) . \quad (56)$$

Ο λόγος είναι ότι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$x = r \sin \theta \cos \phi , \quad y = r \sin \theta \sin \phi , \quad z = r \cos \theta ,$$

μετασχηματίζονται ως

$$(x, y, z) \rightarrow -(x, y, z) ,$$

όπως και αρμόζει σε μετασχηματισμό αρτιότητας.

**Ορθοκανονικότητα και πληρότητα:** Από τον ορισμό με κατάλληλες ολοκληρώσεις κατά μέλη έχουμε

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_\ell^m(\theta, \phi) [Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi)]^* = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'} . \quad (57)$$

Η σχέση πληρότητας γράφεται ως

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \phi) [Y_\ell^m(\theta', \phi')]^* = \frac{\delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi')}{\sin \theta} . \quad (58)$$

Μια συνάρτηση  $\Phi(\theta, \phi)$  μπορεί να αναπτυχθεί σε σφαιρικές αρμονικές ως

$$\Phi(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell, m} Y_\ell^m(\theta, \phi) . \quad (59)$$

Οι συντελεστές της ανάπτυξης είναι

$$A_{\ell, m} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \Phi(\theta, \phi) [Y_\ell^m(\theta, \phi)]^* . \quad (60)$$

**Προσθετικό Θεώρημα:** Για τις σφαιρικές αρμονικές ισχύει ότι

$$P_\ell(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \phi) [Y_\ell^m(\theta', \phi')]^* , \quad (61)$$

όπου

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') . \quad (62)$$

**Απόδειξη:** Έστω δύο διανύσματα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{x}'$  με σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$  και  $(r', \theta', \phi')$ , αντίστοιχα

$$\mathbf{x} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) , \mathbf{x}' = r'(\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta') .$$

► Η μεταξύ τους γωνία είναι  $\gamma$  και δίνεται από την

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r r'} .$$

Το αποτέλεσμα είναι η (62).

► Χρησιμοποιούμε την ανάπτυξη σε πολυώνυμο Legendre

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^\ell}{r_{>^{\ell+1}}} P_\ell(\cos \gamma) ,$$

όπου  $r_{<}$  ( $r_{>}$ ) το μικρότερο (μεγαλύτερο) μεταξύ των  $r, r'$

- ▶ Η ίδια ανάπτυξη πρέπει να παίρνει και τη μορφή

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \phi) [Y_{\ell}^m(\theta', \phi')]^* .$$

Οι σφαιρικές αρμονικές έχουν εισαχθεί ώστε να υπάρχει συμμετρία ως προς την εναλλαγή των γωνιών  $(\theta, \phi) \leftrightarrow (\theta', \phi')$ .

- ▶ Συγκρίνοντας έχουμε τη σχέση

$$P_{\ell}(\cos \gamma) = A_{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \phi) [Y_{\ell}^m(\theta', \phi')]^* , \quad (63)$$

και πρέπει να προσδιορίσουμε τις  $A_{\ell}$ .

- ▶ Αν  $\theta' = 0$ , τότε  $\gamma = \theta$ , οπότε

$$P_{\ell}(\cos \theta) = A_{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \phi) [Y_{\ell}^m(0, \phi')]^* .$$

- Χρησιμοποιώντας τις (53) και (54), έχουμε

$$P_\ell(\cos\theta) = A_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta) \implies A_\ell = \frac{4\pi}{2\ell+1} .$$

Αντικαθιστώντας στην (63) προκύπτει η (61).

**Γενική λύση εξίσωσης Laplace:** Αν οι πόλοι για  $\theta = 0, \pi$  είναι ομαλά σημεία στο φυσικό πρόβλημα που μελετούμε, η **γενική λύση** της εξίσωσης Laplace είναι

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( A_{\ell,m} r^\ell + \frac{B_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_\ell^m(\theta, \phi) . \quad (64)$$

Αν οι πόλοι, είτε δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού, είτε αντιστοιχούν σε πηγές, τότε πρέπει να γράψουμε και όρους με τις προσεταιρισμένες συναρτήσεις Legendre  $Q_\ell^m(\theta, \phi)$ .

Σφαιρικές συναρτήσεις *Bessel*

Θεωρούμε την κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Psi \quad (65)$$

και λύσεις της μορφής

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \quad \implies \quad \nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (66)$$

που είναι η εξίσωση **Helmholtz**. Θεωρώντας λύσεις της μορφής

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = e^{i\omega t} Y_\ell^m(\theta, \phi) \frac{R(r)}{\sqrt{r}}, \quad (67)$$

βρίσκουμε ότι η  $R(r)$  υπακούει την εξίσωση Bessel [**Άσκηση**]

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{(\ell + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (68)$$

με δείκτη  $\nu = \ell + \frac{1}{2}$  (ημιακέραιος).

Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel ορίζονται ως

$$\begin{aligned} j_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) , \\ n_\ell(x) &= (-1)^{\ell+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-\ell-\frac{1}{2}}(x) . \end{aligned} \quad (69)$$

Η γενική μορφή τους είναι

$$\begin{aligned} j_\ell(x) &= a_\ell(x) \sin x + b_\ell(x) \cos x , \\ n_\ell(x) &= -a_\ell(x) \cos x + b_\ell(x) \sin x , \end{aligned} \quad (70)$$

- ▶ Τα  $a_\ell$  και  $b_\ell$  είναι πολυώνυμα δυνάμεων του  $1/x$  τάξεως  $\ell + 1$  και  $\ell$ , αντίστοιχα. Αυτό υπαγορεύεται απ' το γεγονός ότι  $J_{1/2} \sim \sin x / \sqrt{x}$ ,  $J_{-1/2} \sim \cos x / \sqrt{x}$ .
- ▶ Η υψηλότερης τάξης  $j_\ell(x)$  γεννώνται μέσω των αναδρομικών σχέσεων.



- ▶ Για  $x \rightarrow 0$ , οι  $j_\ell$  είναι πεπερασμένες, ενώ οι  $n_\ell$  τείνουν στο άπειρο.
- ▶ Μερικές σφαιρικές συναρτήσεις Bessel είναι οι:

$$j_0(x) = \frac{1}{x} \sin x ,$$

$$j_1(x) = \frac{1}{x^2} \sin x - \frac{1}{x} \cos x ,$$

$$j_2(x) = \left( \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$$

και

$$n_0(x) = -\frac{1}{x} \cos x ,$$

$$n_1(x) = -\frac{1}{x^2} \cos x - \frac{1}{x} \sin x ,$$

$$n_2(x) = -\left( \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x .$$

### Τροποποιημένες σφαιρικές συναρτήσεις Bessel:

Κατά αναλογία με τις συναρτήσεις  $j_\ell(x)$   $n_\ell(x)$  ορίζουμε τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel ως:

- ▶ 1ου είδους

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+\frac{1}{2}}(x) = i^{-n} j_n(ix) . \quad (71)$$

- ▶ 2ου είδους

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{n+\frac{1}{2}}(x) = -i^n h_n^{(1)}(ix) , \quad (72)$$

όπου  $h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + in_n(x)$ .

- ▶ Οι ιδιότητες και η συμπεριφορά των  $i_\ell(x)$  και  $k_\ell(x)$  βρίσκονται εύκολα μέσω της άμεσης σχέσης τους με τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel.

## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

## Παράδειγμα 1ο

Ας αναπτύξουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{array} \right\}, \quad (73)$$

σε σειρά πολυωνύμων Legendre.

► Γενικά έχουμε ότι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x) P_n(x). \quad (74)$$

Στην περίπτωση μας επειδή  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$  έχουμε

$$a_n = (2n+1) \int_0^1 dx P_n(x), \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

και μηδέν εάν  $n$  είναι άρτιος.

- Από τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x),$$

παίρνουμε ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^1 dx P_n(x) &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2} + t - 1}{t} \\ &= \dots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2n! \Gamma(3/2-n)} t^{2n-1}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανάπτυξη σε σειρά Taylor

$$(1+z)^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)}{n! \Gamma(q+1-n)} z^n,$$

για  $q = \frac{1}{2}$  και  $z = t^2$ .

Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως [Άσκηση].

- ▶ Συγκρίνοντας παίρνουμε ότι

$$\int_0^1 dx P_n(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{\pi}}{2^k \Gamma(3/2-k)} = \frac{(-1)^{k-1} (2k-3)!!}{2^k k!}, \quad n = 2k - 1 \\ 1, \quad n = 0 \\ 0, \quad n = 2k \end{array} \right\},$$

όπου έχουμε το συμβολισμό

$$n!! = \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 3 \cdots (2k+1), \quad n = 2k+1 \\ 2 \cdot 4 \cdots (2k), \quad n = 2k \end{array} \right\}.$$

- ▶ Άρα οι μη μηδενικοί συντελεστές της ανάπτυξης (74) σε σειρά πολωνύμων Legendre είναι

$$a_{2k-1} = (4k-1) \frac{(-1)^{k-1} (2k-3)!!}{2^k k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

## Παράδειγμα 2ο

Χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre ως υπολογίσουμε την άπειρη σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} P_n(x) . \quad (75)$$

- ▶ Ολοκληρώνουμε ως προς  $t$  την γεννήτρια συνάρτηση και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} P_n(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \\ &= \sinh^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) . \end{aligned}$$

Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως [Άσκηση].

## Παράδειγμα 3ο

Ας υπολογίσουμε τη σταθερά

$$\left. \frac{dP_n(x)}{dx} \right|_{x=1} \equiv P'_n(1) = \frac{1}{2} n(n+1), \quad (76)$$

με τους ακόλουθους τρόπους:

- ▶ Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Rodrigues' και παραγωγίζοντας ως προς  $x$

$$P'_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [(x-1)^n (x+1)^n].$$

Οι μη μηδενικές συνεισφορές για  $x = 1$  προέρχονται όταν  $n$  παράγωγοι αναγκαστικά να δρουν πάνω στον όρο  $(x-1)^n$  και μία στον όρο  $(x+1)^n$ .

Υπάρχουν  $n+1$  τέτοιες δυνατότητες, οπότε

$$P'_n(1) = \frac{n+1}{2^n n!} \left[ \frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n \right]_{x=1} \left[ \frac{d}{dx} (x+1)^n \right]_{x=1} = \frac{1}{2} n(n+1).$$

- Από τη γεννήτρια συνάρτηση παραγωγίζοντας ως  $x$  παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P'_n(x) = \frac{t}{(1 - 2tx + t^2)^{3/2}},$$

οπότε για  $t < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(1)t^n = \frac{t}{(1-t)^3} = \frac{t}{2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} t^n.$$

Συγκρίνοντας, αποδεικνύεται η (76).



## Παράδειγμα 4ο

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Rodrigues ως αποδείξουμε ότι

$$I_n[f] = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) dx . \quad (77)$$

- ▶ Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Rodrigues έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_n[f] &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx \\ &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f(x) d \left( \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \right) . \end{aligned}$$

- ▶ Ολοκληρώνοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_n[f] &= \frac{1}{2^n n!} \left[ f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 \\ &\quad - \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx . \end{aligned}$$

- ▶ Ο πρώτος όρος μηδενίζεται και έτσι έχουμε

$$I_n[f] = \frac{(-1)}{2^n n!} \int_{-1}^1 f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx .$$

- ▶ Είναι φανερό ότι μετά από  $n$  κατά παράγοντες ολοκληρώσεις, καταλήγουμε στο

$$I_n[f] = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) dx ,$$

που είναι το ζητούμενο.

Ως **εφαρμογή** του προηγούμενου συμπεράσματος θέτουμε,  $f(x) = x^m$ , και χρησιμοποιούμε ότι

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = 0 , \quad \text{για } m < n .$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$I_{m,n} = I_n[x^m] = \int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = 0 , \quad \text{για } m < n . \quad (78)$$

## ΓΕΝΙΚΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Διαφορετικά είδη ορθογωνίων πολυωνύμων μοιράζονται κοινά χαρακτηριστικά. Είναι προτιμότερο λοιπόν να αναπτύξουμε γενικότερα τη σχετική θεωρία.

- ▶ Θεωρούμε τη μεταβλητή  $x \in [a, b]$  και τη λεγόμενη **συνάρτηση βάρους**  $h(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ .
- ▶ Ορίζουμε το **εσωτερικό γινόμενο**

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b dx h(x) f(x) g(x), \quad (79)$$

για δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$ .

- ▶ Μέσω αυτού ορίζεται το **μέτρο** της συνάρτησης  $f$

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} > 0. \quad (80)$$

Παρατηρούμε ότι εξ' ορισμού  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ .

- ▶ Με τους παραπάνω ορισμούς

$$\|1\| = \sqrt{\int_a^b dx h(x)} < \infty \quad (\text{απαιτείται σύγκλιση}). \quad (81)$$

## Μέθοδος κατασκευής και ιδιότητες

Η φυσική βάση πολυωνύμων έως τάξη  $n$ , είναι τα  $1, x, \dots, x^n$ .

Με τη μέθοδο των Gram-Schmidt κατασκευάζουμε μια ορθοκανονική βάση πολυωνύμων  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ .

- ▶ Ορίζουμε το πρώτο πολώνυμο της σειράς ως

$$P_0(x) = \frac{\mathcal{N}_0^{1/2}}{\|1\|} . \quad (82)$$

- ▶ Τα μεγαλύτερης τάξης πολώνυμα ορίζονται απ' την αναδρομική σχέση

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \sum_{m=0}^n \frac{\langle P_m, xP_n \rangle}{\mathcal{N}_m} P_m(x) , \quad (83)$$

όπου  $\mathcal{N}_n$  σταθερές κανονικοποίησης.

- ▶ Εκ' κατασκευής

$$\langle P_n, P_m \rangle = \mathcal{N}_n \delta_{n,m} \quad (84)$$

και επίσης ότι  $P_n(x)$  είναι όντως τάξης  $n$  πολώνυμα.

**Αναδρομική σχέση:** Τα πολυώνυμα υπακούουν αναδρομική σχέση της μορφής

$$xP_n(x) = A_n P_n(x) + B_n P_{n+1}(x) + C_n P_{n-1}(x) , \quad (85)$$

με

$$C_n = \frac{\mathcal{N}_n}{\mathcal{N}_{n-1}} B_{n-1} . \quad (86)$$

**Απόδειξη:** Εν γένει θα έχουμε μια σχέση της μορφής

$$xP_n(x) = A_n P_n(x) + B_n P_{n+1}(x) + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n,m} P_m(x) .$$

► Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με το  $P_\ell$  έχουμε

$$\langle P_\ell, xP_n \rangle = \mathcal{N}_\ell \left( A_n \delta_{n,\ell} + B_n \delta_{n,\ell-1} + C_{n,\ell} \sum_{m=0}^{n-1} \delta_{m,\ell} \right) .$$

- Όμως ισχύει ότι

$$\langle P_\ell, xP_n \rangle = \langle P_n, xP_\ell \rangle = \mathcal{N}_n \left( A_\ell \delta_{n,\ell} + B_\ell \delta_{\ell,n-1} + C_{\ell,n} \sum_{m=0}^{\ell-1} \delta_{m,n} \right) .$$

- Εξειδικεύοντας την παραπάνω

$$\ell = n+1: \quad \mathcal{N}_{n+1} B_n = C_{n+1,n} \mathcal{N}_n \implies C_{n+1,n} = \frac{\mathcal{N}_{n+1}}{\mathcal{N}_n} B_n$$

$$\ell \geq n+2: \quad 0 = C_{\ell,n} \mathcal{N}_n \implies C_{\ell,n} = 0 .$$

Η (85) αποδεικνύεται θέτοντας τη σταθερά  $C_n = C_{n,n-1}$ .

**Σχέσεις μεταξύ σταθερών:** Οι σταθερές  $A_n$ ,  $B_n$  και  $C_n$  στην αναδρομική σχέση (85) σχετίζονται με τους τρεις υψηλότερης τάξης όρους του πολυωνύμου  $P_n(x)$ . Έστω ότι

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \gamma_{n-2} x^{n-2} + \dots \quad (87)$$

Αντικαθιστώντας και εξισώνοντας τους όρους τάξεως  $x^{n+1}$ ,  $x^n$  και  $x^{n-1}$  παίρνουμε 3 εξισώσεις για τις  $A_n$ ,  $B_n$  και  $C_n$  [Άσκηση]

$$\alpha_n = B_n \alpha_{n+1}, \quad \beta_{n-1} = A_n \alpha_n + B_n \beta_n, \quad \gamma_{n-2} = A_n \beta_{n-1} + B_n \gamma_{n-1} + C_n \alpha_{n-1}. \quad (88)$$

με λύση

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\alpha_{n+1} \beta_{n-1} - \alpha_n \beta_n}{\alpha_n \alpha_{n+1}}, \\ B_n &= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}, \\ C_n &= \frac{\alpha_{n+1} \gamma_{n-2} - \alpha_n \gamma_{n-1}}{\alpha_{n-1} \alpha_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+1} \beta_{n-1} - \alpha_n \beta_n}{\alpha_{n-1} \alpha_n \alpha_{n+1}} \beta_{n-1}. \end{aligned} \quad (89)$$

Από την (86) βρίσκουμε το λόγο  $\mathcal{N}_n / \mathcal{N}_{n-1}$  και τη σταθερά κανονικοποίησης  $\mathcal{N}_n$  (εκτός από μια πολλαπλασιαστική σταθ.).

Ο τύπος των Darboux–Christoffel: Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\mathcal{N}_k} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}_n \mathcal{N}_{n+1}}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}. \quad (90)$$

Αυτός μπορεί να εννοηθεί και ως μια ατελής μορφή της σχέσης πληρότητας.

Αυτή ισχύει πραγματικά μόνο στο όριο  $n \rightarrow \infty$ .

Στην περίπτωση που  $x = y$  χρησιμοποιώντας τον κανόνα l' Hopital έχουμε

$$\sum_{k=0}^n \frac{[P_k(x)]^2}{\mathcal{N}_k} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}_n \mathcal{N}_{n+1}}} (P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)). \quad (91)$$



**Πολυωνυμικές Ρίζες:** Ένα τυχαίο πολυώνυμο έχει πραγματικές και μιγαδικές ρίζες ακόμα και αν συντελεστές του είναι πραγματικοί αριθμοί.

Όμως για τα ορθογώνια πολυώνυμα όπως τα έχουμε ορίσει μπορεί να αποδειχθεί ότι:

- ▶ Όλες οι ρίζες ενός πολυωνύμου  $P_n(x)$  είναι πραγματικές, διακριτές και εντός του πεδίου ορισμού του,  $x \in [a, b]$ .
- ▶ Οι ρίζες του  $P_n(x)$  είναι μεταξύ αυτών του αμέσως μεγαλύτερου σε τάξη  $P_{n+1}(x)$ .

π.χ. Για τα πολυώνυμα Legendre

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2} = 0 \Rightarrow x = -0.775, 0, 0.775 .$$

και

$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8} = 0 \Rightarrow x = -0.861, -0.340, 0.340, 0.861 ,$$

τα παραπάνω επαληθεύονται.

## Ορθογώνια πολυώνυμα και ΔΕ

Υπό συγκεκριμένες συνθήκες ΔΕ του τύπου Sturm–Liouville

$$\frac{d}{dx} \left( f(x) \frac{d\Phi(x)}{dx} \right) + Eh(x)\Phi(x) = 0, \quad (92)$$

έχουν ως ειδικές λύσεις ορθογώνια πολυώνυμα με συνάρτηση βάρους  $h(x)$ . Ορίζουμε πρώτα τις συναρτήσεις

$$Q = f/h, \quad L = f'/h \iff f = e^{\int dx L/Q}, \quad h = \frac{1}{Q} e^{\int dx L/Q},$$

οπότε η ΔΕ γράφεται ως

$$Q\Phi'' + L\Phi' + E\Phi = 0. \quad (93)$$

Μια αναγκαία συνθήκη για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις είναι

$$Q(x) = ax^2 + bx + c, \quad L(x) = \gamma x + \delta,$$

δηλαδή να είναι τετραγωνική και γραμμική συνάρτηση, αντίστοιχα.

Περαιτέρω διακρίνουμε:

- ▶ Οι σταθερές  $a \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$  και έχουν το ίδιο πρόσημο. Οι ρίζες της  $Q(x) = 0$  είναι πραγματικές και διακριτές και η ρίζα της  $L(x) = 0$  βρίσκεται μεταξύ των.  
π.χ. τα πολυώνυμα **Legendre** και οι γενικεύσεις τους τα πολυώνυμα **Jacobi**.
- ▶ Οι σταθερές  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$  και οι ρίζες των  $Q(x) = 0$  και  $L(x) = 0$  είναι διαφορετικές. Το πρόσημο των  $b$  και  $a$  είναι ίδιο ή αντίθετο ανάλογα με το αν ρίζα της  $Q(x) = 0$  είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη απ' τη ρίζα της  $L(x) = 0$ .  
π.χ. τα πολυώνυμα **Laguerre**.
- ▶ Οι σταθερές  $a = b = 0$ ,  $\gamma \neq 0$  και  $c$  και  $\gamma$  έχουν αντίθετα πρόσημα.  
π.χ. τα πολυώνυμα **Hermite**.

Η συνάρτηση **Bessel** δεν ανήκει σε καμμία απ' τις ανωτέρω κατηγορίες και δεν έχει πολυωνυμικές λύσεις.

**Τύπος του Rodrigues:** Ορίζουμε τα γενικευμένα πολυώνυμα

$$P_n(x) = \frac{\mathcal{M}_n}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left( h(x)[Q(x)]^n \right), \quad (94)$$

όπου η σταθερά αναλογίας  $\mathcal{M}_n$  σχετίζεται με την σταθερά κανονικοποίησης του εσωτερικού γινομένου  $\mathcal{N}_n$ .

**Κβάντωση της ιδιοτιμής  $E$ :** Απαιτώντας τα πολυώνυμα όπως ορίστηκαν μέσω του τύπου του Rodrigues να ικανοποιούν τη  $\Delta E$ , βρίσκουμε ότι

$$E_n = -n[a(n-1) + \gamma], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (95)$$

Ο συντομότερος τρόπος να δειχθεί η παραπάνω κβάντωση της σταθεράς  $E$ , είναι να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε πολυωνυμική λύση της μορφής  $\Psi = a_k x^k + \dots + a_m x^m$ , τότε:

- ▶ ο όρος ανώτερης τάξης θα ικανοποιεί την

$$\left( ax^2 \frac{d^2}{dx^2} + \gamma x \frac{d}{dx} + E \right) x^k = 0 \implies ak(k-1) + \gamma k + E = 0,$$

με λύση

$$k = \frac{a - \gamma \pm \sqrt{(a - \gamma)^2 - 4aE}}{2a}.$$

- ▶ Αντίστοιχα για τον όρο κατώτερης τάξης θα έχουμε

$$c \frac{d^2}{dx^2} x^m = 0 \implies m = 0.$$

- ▶ Επειδή η λύση είναι πολυωνυμική θα πρέπει η διαφορά  $k - m$  να είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος  $n = 0, 1, \dots$ . Επιλύοντας για την  $E$  βρίσκουμε την (95).

### Πολυώνυμα *Jacobi*

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ του Jacobi

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + Ey = 0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (96)$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = 1 - x^2, \quad L(x) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x,$$

από τις οποίες υπολογίζουμε τις συναρτήσεις για την ΔΕ Sturm–Liouville

$$f(x) = (1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta}, \quad h(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,$$

με τις οποίες η (96) γράφεται στη μορφή Sturm–Liouville. Για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις πρέπει  $\alpha, \beta > -1$  για να συγκλίνει το  $\int_{-1}^1 dx h(x)$  και

$$E = E_n = n(n + \alpha + \beta + 1), \quad n = 0, 1, \dots$$

Ορισμός των πολυωνύμων **Jacobi** απ' τον τύπο του **Rodrigues**

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right]. \quad (97)$$

► Χρησιμοποιώντας τον βρίσκουμε ότι

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n+\alpha}{m} \binom{n+\beta}{n-m} (x-1)^{n-m} (x+1)^m.$$

► Με τον παραπάνω ορισμό έχουμε τη σχέση ορθοκανονικότητας

$$\int_{-1}^1 dx (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) = \mathcal{N}_n \delta_{n,m},$$

με τη **σταθερά κανονικοποίησης**

$$\mathcal{N}_n = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)\Gamma(\beta+1+n)2^{\alpha+\beta+1+n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+1+n)(\alpha+\beta+2+2n)}.$$

Μερικές ιδιότητες είναι:

- ▶ Ιδιότητα παραγωγίσης

$$\frac{d^k}{dx^k} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1 + k)}{2^k \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} P_{n-k}^{(\alpha+k, \beta+k)}(x),$$

δηλαδή η παράγωγος μεταβιβάζει σε επόμενη σειρά  $((\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha + k, \beta + k))$  πολυωνύμων ενώ ταυτόχρονα υποβιβάζει την τάξη τους  $(n \rightarrow n - k)$ .

- ▶ Αναδρομική σχέση στην τάξη  $n$

$$\begin{aligned} & 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) \\ &= [(2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2) + (2n+\alpha+\beta)3x]P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\ & - 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x), \end{aligned}$$

όπου  $(m)_n$  είναι το σύμβολο [Polheimer](#)

$$(m)_n = m(m+1)\dots(m+n-1) = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}.$$



- ▶ Αναδρομική σχέση στους δείκτες  $(\alpha, \beta)$

$$P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x) = \frac{2}{2n + \alpha + \beta + 2} \frac{(n + \alpha + 1)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - (n + 1)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x)}{1 - x} .$$

- ▶ Με ανάπτυξη του αριστερού μέλους και χρήση του ορισμού αποδεικνύεται ότι η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$2^{\alpha+\beta} R^{-1} (1 - t + R)^{-\alpha} (1 + t + R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) t^n , \quad (98)$$

όπου

$$R = \sqrt{1 - 2xt + t^2} .$$

- ▶ Εύκολα αποδεικνύεται ο μετασχηματισμός αριτιότητας

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x) . \quad (99)$$

- ▶ Τα πολυώνυμα Legendre είναι ειδική περίπτωση των πολυωνύμων Jacobi όταν  $\alpha = \beta = 0$ , δηλαδή

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x) .$$

Όλες οι σχέσεις για τα πολυώνυμα Legendre προκύπτουν από αντίστοιχες των πολυωνύμων Jacobi [Άσκηση].

### Πολυώνυμα Gegenbauer

Αυτά αποτελούν ειδική περίπτωση των πολυωνύμων Jacobi με  $\alpha = \beta \rightarrow \alpha - 1/2$  και ορίζονται ως

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2\alpha + n)\Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha + n + 1/2)} P_n^{(\alpha-1/2, \alpha-1/2)}(x). \quad (100)$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ

$$(1 - x^2)y'' - (2\alpha + 1)xy' + Ey = 0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (101)$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = 1 - x^2, \quad L(x) = -(2\alpha + 1)x,$$

από τις οποίες υπολογίζουμε τις συναρτήσεις για την ΔΕ Sturm-Liouville

$$f(x) = (1 - x^2)^{\alpha+1/2}, \quad h(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2}.$$

- ▶ Για πολυωνυμικές λύσεις πρέπει  $\alpha > -1/2$  ώστε να συγκλίνει το  $\int_{-1}^1 dx h(x)$  και

$$E = E_n = n(n + 2\alpha), \quad n = 0, 1, \dots$$

- ▶ Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\frac{1}{(1 - 2tx + t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x) t^n. \quad (102)$$

- ▶ Για  $\alpha = 1/2$  παίρνουμε τα πολώνυμα Legendre  $P_n(x)$ .
  - ▶ Για  $\alpha = 1$  παίρνουμε τα πολώνυμα Chebyshev 2ου είδους  $U_n(x)$ .
- ▶ Από τη γεννήτρια συνάρτηση έχουμε για το **μετασχηματισμό αριτιότητας**

$$C_n^{(\alpha)}(-x) = (-1)^n C_n^{(\alpha)}(x). \quad (103)$$

- ▶ Ιδιότητα για την παράγωγο

$$C_n^{(\alpha+1)}(x) = \frac{1}{2\alpha} \frac{dC_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{dx},$$

δηλαδή η παράγωγος δίνει μας μεταβιβάζει σε επόμενη σειρά ( $\alpha \rightarrow \alpha + 1$ ) πολυωνύμων ενώ ταυτόχρονα υποβιβάζει την τάξη τους ( $n + 1 \rightarrow n$ ).

- ▶ Πιο γενικά, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$C_n^{(\alpha+m)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2^m \Gamma(\alpha+m)} \frac{d^m C_{n+m}^{(\alpha)}(x)}{dx^m},$$

- ▶ Αναδρομική σχέση

$$(n+1)C_{n+1}^{(\alpha)}(x) = 2(n+\alpha)x C_n^{(\alpha)}(x) - (n+2\alpha-1)C_{n-1}^{(\alpha)}(x).$$

Αυτή μπορεί να αποδειχθεί με χρήση της γεννήτριας συνάρτησης [Άσκηση].

Μερικά πολυώνυμα Gegenbauer

$$C_1^{(\alpha)}(x) = 2\alpha x ,$$

$$C_2^{(\alpha)}(x) = 2\alpha(\alpha + 1)x^2 - \alpha ,$$

$$C_3^{(\alpha)}(x) = \frac{4}{3}\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)x^3 - 2\alpha(\alpha + 1)x ,$$

$$C_4^{(\alpha)}(x) = \frac{2}{3}\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)x^4 - 2\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)x^2 + \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1) .$$

### Πολύωνυμα *Hermite*

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ του *Hermite*

$$y'' - 2xy' + Ey = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (104)$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = 1, \quad L(x) = -2x,$$

από τις οποίες υπολογίζουμε τις συναρτήσεις της ΔΕ Sturm–Liouville

$$f(x) = h(x) = e^{-2 \int dx} = e^{-x^2}.$$

Για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις πρέπει

$$E = E_n = 2n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Το πολύωνυμα *Hermite* παίζουν κεντρικό ρόλο στη μελέτη του αρμονικού ταλαντωτή στα πλαίσια της Κβαντικής Μηχανικής.

Τύπος του Rodrigues που ορίζει τα πολυώνυμα Hermite είναι

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) . \quad (105)$$

Χρησιμοποιώντας τον βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m 2^{n-2m} \frac{n!}{m!(n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= 2^n x^n - 2^{n-2} n(n-1)x^{n-2} + \dots . \end{aligned} \quad (106)$$

Με τον παραπάνω ορισμό έχουμε από τη γενική θεωρία για την σταθερά κανονικοποίησης

$$\mathcal{N}_n = \sqrt{\pi} 2^n n! ,$$

στις σχέσεις ορθοκανονικότητας

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m} \quad (107)$$

και πληρότητας

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(y)}{\sqrt{\pi} 2^n n!} = e^{x^2} \delta(x-y) . \quad (108)$$

Μιά συνάρτηση θα αναπτύσσεται ως

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \implies a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} f(x) H_n(x) . \quad (109)$$

**Μετασχηματισμός αρτιότητας:** Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) . \quad (110)$$

**Γεννήτρια συνάρτηση:** Με ανάπτυξη του αριστερού μέλους και χρήση του ορισμού αποδεικνύεται ότι

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n . \quad (111)$$



**Αναδρομικές σχέσεις:** Με τη βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης

$$\begin{aligned}H'_n(x) &= 2nH_{n-1}(x), \\ 2xH_n(x) &= H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Μπορεί να επαληθευθεί η 2η εκ των άνω σχέσεων, χρησιμοποιώντας την (89) και την ανάπτυξη (106) [Άσκηση].

Μερικά πολυώνυμα Hermite

$$\begin{aligned}H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12.\end{aligned}$$

Οι ιδιότητες που αναφέρθηκαν προηγουμένως μπορούν να ενεργηθούν με χρήση αυτών των πολυωνύμων.

### Πολυώνυμα *Laguerre*

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ του Laguerre

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + Ey = 0, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (112)$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = x, \quad L(x) = \alpha + 1 - x,$$

από τις οποίες υπολογίζουμε τις συναρτήσεις της ΔΕ Sturm–Liouville

$$f(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}, \quad h(x) = x^{\alpha}e^{-x}.$$

Για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις πρέπει  $\alpha > -1$  καθώς και

$$E = E_n = n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Το πολυώνυμο *Laguerre* παίζουν κεντρικό ρόλο στη μελέτη του ατόμου του υδρογόνου στα πλαίσια της Κβαντικής Μηχανικής.

- Τύπος του Rodrigues που ορίζει τα πολυώνυμα Laguerre είναι

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-x} x^{n+\alpha} \right). \quad (113)$$

- Χρησιμοποιώντας τον βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+\alpha)!}{(n-m)!(m+\alpha)!} \frac{x^m}{m!} \cdot \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} x^n - (-1)^n \frac{n+\alpha}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &\quad + (-1)^n \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)}{2(n-2)!} x^{n-2} + \dots \end{aligned} \quad (114)$$

- Έχουμε απ' τη γενική θεωρία για τη σταθερά κανονικοποίησης

$$\mathcal{N}_n = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(n + 1)}.$$

- Σχέση ορθοκανονικότητας

$$\int_0^\infty dx x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(n + 1)} \delta_{n,m} \quad (115)$$

- Σχέση πληρότητας

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y) = x^{-\alpha} e^x \delta(x-y) . \quad (116)$$

- Μιά συνάρτηση θα αναπτύσσεται ως

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^\alpha(x) , \quad (117)$$

με τους συντελεστές να δίνονται απ' την

$$a_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \int_0^\infty dx x^\alpha e^{-x} f(x) L_n^\alpha(x) .$$

- ▶ Με ανάπτυξη του αριστερού μέλους και χρήση του ορισμού αποδεικνύεται η **γεννήτρια συνάρτηση**

$$(1-t)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{tx}{t-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n. \quad (118)$$

- ▶ **Αναδρομικές σχέσεις:** Με τη βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης μπορούν να δειχθούν οι

$$\begin{aligned} \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} - \frac{dL_{n+1}^\alpha(x)}{dx} &= L_n^\alpha(x), \\ \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} &= -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \\ xL_n^\alpha(x) &= -(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (2n+\alpha+1)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x). \end{aligned}$$

Ως **[Άσκηση]** επαληθεύστε την 3η των άνω σχέσεων, χρησιμοποιώντας την (89) και την ανάπτυξη (114).

- ▶ Σημειώνω επίσης την ενδιαφέρουσα αναδρομική σχέση

$$\sum_{m=0}^n L_m^k(x) = L_n^{k+1}(x). \quad (119)$$

**Οριακές περιπτώσεις:** Ισχύουν τα ακόλουθα όρια για τα πολυώνυμα Laguerre:

Σχέση με τα πολυώνυμα Jacobi

$$L_n^\alpha(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta)} \left( 1 - 2 \frac{x}{\beta} \right) . \quad (120)$$

**Απόδειξη:** Θεωρούμε την ΔΕ Jacobi

$$(1 - z^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)z)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 .$$

- ▶ Αντικαθιστούμε  $z = 1 - 2x/\beta$  διαιρούμε με  $\beta$  και παίρνουμε

$$\left( x - \frac{x^2}{\beta} \right) y'' + \left( 1 + \alpha - \frac{\alpha + 2 + \beta}{\beta} x \right) y' + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)}{\beta} y = 0 ,$$

όπου η παράγωγος είναι ως προς  $x$ .

- ▶ Στο όριο  $\beta \rightarrow \infty$  αυτή γίνεται η (112) η ΔΕ των πολυωνύμων Laguerre. Επίσης  $0 \leq x < \infty$ .
- ▶ Άρα η σχέση (120) ισχύει εκτός ίσως από μία πολλαπλασιαστική σταθερά.

- Θεωρούμε τον τύπο του Rodrigues των πολυωνύμων Jacobi

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-z)^{-\alpha} (1+z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} \left[ (1-z)^{\alpha+n} (1+z)^{\beta+n} \right].$$

Αντικαθιστώντας  $z = 1 - 2x/\beta$  και χρησιμοποιώντας ότι

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{\beta+n} = e^{-x}, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{-\beta} = e^x,$$

βρισκουμε τον τύπο του Rodrigues των πολυωνύμων Laguerre (113) και αποδεικνύεται η (120).

Σχέση με τις συναρτήσεις Bessel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n^{-\alpha} L_n^\alpha \left( \frac{x}{n} \right) \right] = x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}). \quad (121)$$

**Απόδειξη:** Αντικαθιστούμε στην (114)  $x \rightarrow x/n$  και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling

$$(n+a)! \simeq e^{-n} n^{n+a},$$

βρίσκουμε ότι για  $n \gg 1$

$$L_n^\alpha \left( \frac{x}{n} \right) \simeq n^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{(m+\alpha)! m!} = n^\alpha x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}).$$

Μερικά πολώνυμα Laguerre:

$$L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x ,$$

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{x^2}{2} - (\alpha + 2)x + \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{2} ,$$

$$L_3^{(\alpha)}(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{\alpha + 3}{2}x^2 - \frac{\alpha^2 + 5\alpha + 6}{2}x + \frac{\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6}{6} .$$



### Πολυώνυμα *Chebyshev*

Τα πολυώνυμα **Chebyshev 1ου είδους**  $T_n(x)$  είναι ειδική περίπτωση των πολυωνύμων Jacobi με  $\alpha = \beta = -1/2$

$$T_n(x) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) . \quad (122)$$

- ▶ Η αντίστοιχη ΔΕ εξίσωση είναι

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 , \quad n = 0, 1, \dots , \quad -1 \leq x \leq 1 ,$$

απ' την οποία εύκολα βρίσκουμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = (1 - x^2)^{1/2} , \quad h(x) = (1 - x^2)^{-1/2} , \quad (123)$$

της ισοδύναμης Sturm–Liouville ΔΕ.

- ▶ Η παραπάνω ΔΕ έχει ως 2η ανεξάρτητη λύση τις συναρτήσεις  $\sqrt{1-x^2} U_n(x)$ , όπου  $U_n(x)$  τα πολυώνυμα **Chebyshev 2ου είδους**.
- ▶ Τα πολυώνυμα  $U_n(x)$  υπακούουν επίσης τη ΔΕ

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (124)$$

απ' την οποία εύκολα βρίσκουμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = (1-x^2)^{3/2}, \quad h(x) = (1-x^2)^{1/2}. \quad (125)$$

της ισοδύναμης Sturm–Liouville ΔΕ.

Τύπος του Rodriguez: Έχουμε

$$T_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right] \quad (126)$$

και

$$U_n(x) = (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{1-x^2}(2n+1)!!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} \right]. \quad (127)$$

Γεννήτριες συναρτήσεις: Έχουμε

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n, \quad (128)$$

και

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n. \quad (129)$$

Μερικά από τα πολυώνυμα Chebyshev είναι:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = -1 + 2x^2, \quad T_3(x) = -3x + 4x^3,$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = -1 + 4x^2, \quad U_3(x) = -4x + 8x^3$$

**Σχέση με τριγωνομετρικές συναρτήσεις:** Ορίζουμε τη γωνία

$$\theta = \cos^{-1} x, \quad \theta \in [0, \pi].$$

- ▶ Για τα πολυώνυμα Chebyshev 1ου είδους ισχύει ότι

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \binom{n}{2m} x^{n-2m} (1-x^2)^m.$$

$$= 2^{n-1} x^n - 2^{n-3} n x^{n-2} + \dots \quad (130)$$

- ▶ Με χρήση στοιχειώδους τριγωνομετρίας αποδεικνύεται ότι

$$T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x)) = T_{nm}(x) = T_{mn}(x). \quad (131)$$

- Παρομοίως για πολυώνυμο **Chebyshev 2ου είδους** ισχύει ότι

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta} = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \binom{n+1}{2m+1} x^{n-2m} (1-x^2)^m \\ &= 2^n x^n - 2^{n-2} (n-1) x^{n-2} + \dots \end{aligned} \quad (132)$$

- Επειδή

$$\theta(x) = \cos^{-1} x \implies \theta'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sin \theta},$$

έχουμε την ταυτότητα

$$T'_n(x) = nU_{n-1}(x), \quad U'_n(x) = 2C_{n-1}^{(2)}(x), \quad (133)$$

όπου  $C_n^{(\alpha)}(x)$  το πολυώνυμο Gegenbauer.

Η συμπλήρωση των αναγκαίων βημάτων προς απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων αφήνεται ως **[Άσκηση]**.

**Αναδρομικές σχέσεις:** Είτε μέσω της γεννήτριας συνάρτησης, είτε με την παραπάνω ανάπτυξη και τη γενική θεωρία

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) ,$$

με μια ίδια σχέση για για τα  $U_n(x)$  [**Άσκηση**]. Επίσης από τριγωνομετρικές ταυτότητες βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} T_n(x) &= U_n(x) - xU_{n-1}(x) , \\ (1 - x^2)U_{n-1}(x) &= xT_n(x) - T_{n+1}(x) . \end{aligned}$$

**Σταθερά κανονικοποίησης:** Χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή  $\theta = \cos^{-1} x$  βρίσκουμε ότι

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) = \mathcal{N}_n \delta_{n,m} , \quad \mathcal{N}_0 = \pi , \quad \mathcal{N}_{n \geq 1} = \frac{\pi}{2}$$

και

$$\int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} U_n(x) U_m(x) = \mathcal{N}_n \delta_{n,m} , \quad \mathcal{N}_n = \frac{\pi}{2} .$$

Εκτός απ' τη χρήση τους σε θεωρητικά προβλήματα, τα πολυώνυμα Chebyshev είναι χρησιμότερα και στην ανάπτυξη **προσεγγιστικών μεθόδων** γιατί έχουν εν γένει γρηγορότερες ιδιότητες σύγκλισης απ' τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

## Υπεργεωμετρική εξίσωση και υπεργεωμετρική συνάρτηση

Τα παραπάνω ορθογώνια πολυώνυμα και οι ΔΕ που υπακούουν αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της υπεργεωμετρικής εξίσωσης

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \quad (134)$$

και των λύσεων της

- ▶ Από τη γενική θεωρία των ΔΕ 2ης τάξης αυτή έχει τρία συνήθη ανώμαλα σημεία στα  $x = 0, 1$  και  $\infty$ .

**Απόδειξη:** Η ΔΕ (134) είναι της μορφής

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

με

$$p(x) = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)}, \quad q(x) = -\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}$$

► Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} xp(x) = \gamma \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = 0 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)p(x) = \alpha + \beta + 1 - \gamma \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 q(x) = 0 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xp(x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 q(x) = 0 ,$$

που αποδεικνύουν το ζητούμενο.

**Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά:** Αναπτύσσοντας γύρω απ' το σημείο  $x = 0$  σε δυναμοσειρά

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \quad (135)$$

παίρνουμε την αναδρομική σχέση **[Άσκηση]**

$$a_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} a_n .$$



- Επιλύοντάς τη [Άσκηση] βρίσκουμε τη 1η ανεξάρτητη λύση

$$y_1(x) = {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad (136)$$

όπου

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} x^n, \quad (137)$$

είναι η Υπεργεωμετρική συνάρτηση.

- Η κανονικοποίηση είναι τέτοια ώστε

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1.$$

- Ισχύει η ιδιότητα συμμετρίας

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = {}_2F_1(\beta, \alpha, \gamma, x).$$

Η 2η ανεξάρτητη λύση βρίσκεται με ανάπτυξη της μορφής

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \quad (138)$$

Αυτή μέσω της υπεργεωμετρικής συνάρτησης είναι

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x). \quad (139)$$

## Παρατηρήσεις:

- ▶ Οι χαρακτηριστικοί εκθέτες της υπεργεωμετρικής εξίσωσης στα σημεία  $x = 0, 1$  και  $\infty$  είναι:  $(0, 1 - \gamma)$ ,  $(0, \gamma - \alpha - \beta)$  και  $(\alpha, \beta)$ , αντίστοιχα [Άσκηση].
- ▶ Αν είτε η παράμετρος  $\alpha$  είτε η  $\beta$  ισούται με αρνητικό ακέραιο  $-n$ , η Υπεργεωμετρική συνάρτηση είναι απλά ένα πολυώνυμο τάξεως  $n$ .

Συγκεκριμένες σχέσεις με τα ειδικά πολυώνυμα που έχουμε μελετήσει θα δοθούν αργότερα.

- ▶ Η παραπάνω λύση **δεν ισχύει** για όλες τις τιμές των σταθερών  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ . Ήδη απ' τον ορισμό αν  $\gamma = -n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  η ανάπτυξη σε σειρά δεν είναι καλώς ορισμένη. Σημειώστε επίσης την ιδιότητα

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}.$$

Αν  $\gamma = -n$  ή  $\gamma - \alpha - \beta = -n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , τότε η ανάπτυξη σε σειρά (137) δεν ισχύει.

**Ολοκληρωτική αναπαράσταση:** Μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 dt t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha},$$

$$\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\beta) > 0, \quad (140)$$

καθώς και μια αντίστοιχη αναπαράσταση με  $\alpha \longleftrightarrow \beta$ .

**Μετασχηματισμοί και αναλυτική επέκταση:** Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ολοκληρωτική αναπαράσταση μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x),$$

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} {}_2F_1(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)$$

$$+(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x),$$

Αυτοί και άλλοι παρόμοιοι μετασχηματισμοί απεικονίζουν την περιοχή εντός του μοναδιαίου δίσκου στον εαυτό της.

Άλλοι μετασχηματισμοί όπως ο

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} x^{-\alpha} \\
 &\quad \times {}_2F_1(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - 1/x) \\
 &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} x^{\alpha - \gamma} \\
 &\quad \times {}_2F_1(\gamma - \alpha, 1 - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - 1/x)
 \end{aligned}$$

απεικονίζουν το εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου στο εξωτερικό του και αντιστρόφως.

Οι παραπάνω σχέσεις είναι μετασχηματισμοί αναλυτικής επέκτασης.

**Περιπτώσεις όπου  $\gamma = \alpha + \beta + m$  ή  $\beta = \alpha + m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ :** Στις περιπτώσεις αυτές η Υπεργεωμετρική συνάρτηση δεν είναι πια αναλυτική στη γειτονιά του  $x = 1$  και του  $x = 0$  αλλά έχει μια καλώς ορισμένη έκφραση που δεν θα αποτυπώσουμε εδώ.

Από τα προηγούμενα είναι προφανές ότι οι λύσεις εξαρτώνται από τις σταθερές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Προσεκτική ανάλυση οδηγεί σε διάφορες περιπτώσεις:

- ▶ Ουδεμία από τις  $\gamma$ ,  $\gamma - \alpha - \beta$  και  $\alpha - \beta$  είναι ακέραιος. Τότε οι δύο ανεξάρτητες λύσεις είναι:

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$

και

$$\begin{aligned} x^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \\ = x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x) \end{aligned}$$

- ▶ Μία εκ των  $\gamma$ ,  $\gamma - \alpha - \beta$  και  $\alpha - \beta$  είναι ακέραιος. Τότε μια εκ των παραπάνω ανεξάρτητων λύσεων τερματίζεται και η αντίστοιχη λύση είναι της μορφής

$$x^a(1-x)^b P_n(x), \quad (141)$$

όπου  $P_n(x)$  πολυώνυμο βαθμού  $n$ .

Συρρέουσα υπεργεωμετρική εξίσωση και συνάρτηση

Η συρρέουσα υπεργεωμετρική εξίσωση

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{C}. \quad (142)$$

αποτελεί οριακή περίπτωση της υπεργεωμετρικής εξίσωσης στο όριο  $\beta \rightarrow \infty$  ως εξής (οι λεπτομέρειες αφήνονται ως [Άσκηση]):

- ▶ Πρώτα στην υπεργεωμετρική εξίσωση

$$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0,$$

θέτουμε  $z = x/\beta$ .

- ▶ Μετά παίρνουμε το όριο  $\beta \rightarrow \infty$ .

Η ΔΕ (142) είναι της μορφής

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

με

$$p(x) = \frac{\gamma - x}{x}, \quad q(x) = -\frac{\alpha}{x}$$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} xp(x) = \gamma \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = 0 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xp(x) = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 q(x) = \infty \quad (\text{στο μιγαδικό επίπεδο}) ,$$

που αποδεικνύουν ότι:

- ▶ Το  $x = 0$  είναι σύνηθες ανώμαλο σημείο (με χαρακτηριστικούς εκθέτες  $\rho = 0$  και  $1 - \gamma$  [Άσκηση])
- ▶ Το  $x = \infty$  είναι ουσιώδες ανωμαλό σημείο.

**Λύσεις και συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση:** Παίρνοντας το παραπάνω όριο  $\beta \rightarrow \infty$  βρίσκουμε ότι το όριο την Υπεργεωμετρικής συνάρτησης είναι καλώς ορισμένο.

**Απόδειξη:** Απ' την αναπαράσταση σε σειρά της υπεργεωμετρικής συνάρτησης

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n,$$

και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling για  $\beta \gg 1$

$$\Gamma(\beta+n) \simeq e^{-\beta} \beta^{\beta+n},$$

βρίσκουμε ότι στο όριο  $\beta \rightarrow \infty$  παίρνουμε

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)n!} x^n \quad (143)$$

και εξ' ορισμού είναι η **συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση**.



- ▶ Η απειροσειρά εκφυλίζεται σε πολυώνυμο αν  $a = -n, n = 0, 1, \dots$
- ▶ Οι ανεξάρτητες λύσεις της (142) είναι οι

$$y_1(x) = {}_1F_1(\alpha, \gamma, x), \quad y_2(x) = x^{1-\gamma} {}_1F_1(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, x). \quad (144)$$

**Ολοκληρωτική αναπαράσταση:** Στο ίδιο όριο βρίσκουμε ότι

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 dt e^{xt} t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1}. \quad (145)$$

**Απόδειξη:** Απ' τη σχέση

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tx/\beta)^{-\beta}, \quad (146)$$

τον τύπο του Stirling και το όριο

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (1 - tx/\beta)^{-\beta} = e^{xt}, \quad (147)$$

αποδεικνύεται η ζητούμενη.

### Διάφορες συναρτησιακές σχέσεις:

- ▶ Από την ολοκληρωτική αναπαράσταση ή χρησιμοποιώντας το παραπάνω όριο

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, x) = e^x {}_1F_1(\gamma - \alpha, \gamma, -x),$$

η οποία συνδέει τις συμπεριφορές στα δύο άκρα της πραγματικής ευθείας.

- ▶ Επίσης από τη αναπαράσταση με σειρά βρίσκουμε

$$\frac{d{}_1F_1(\alpha, \gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha}{\gamma} {}_1F_1(\alpha + 1, \gamma + 1, x).$$

## Σχέσεις ειδικών και υπεργεωμετρικών συναρτήσεων

Οι διάφορες ειδικές συναρτήσεις και πολυώνυμα που έχουμε μελετήσει σχετίζονται με υπεργεωμετρικές συναρτήσεις:

- ▶ Πολυώνυμα Legendre

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right).$$

- ▶ Συναρτήσεις Legendre 2ου είδους

$$Q_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}n!}{2^{n+1}\Gamma(n+3/2)} x^{-n-1} {}_2F_1\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{2n+3}{2}, \frac{1}{x^2}\right).$$

- ▶ Πολυώνυμα Jacobi

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{(-1)^n \Gamma(n+1+\beta)}{n! \Gamma(1+\beta)} {}_2F_1\left(n+\alpha+\beta+1, -n, 1+\beta, \frac{1+x}{2}\right). \\ &= \frac{(-1)^n \Gamma(n+1+\alpha)}{n! \Gamma(1+\alpha)} {}_2F_1\left(n+\alpha+\beta+1, -n, 1+\alpha, \frac{1-x}{2}\right). \end{aligned}$$

- Πολυώνυμα Gegenbauer

$$\begin{aligned} C_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{\Gamma(2\alpha + n)}{n!\Gamma(2\alpha)} {}_2F_1\left(-n, 2\alpha + n, \alpha + 1/2, \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \frac{2^n \Gamma(\alpha + n)}{n!\Gamma(\alpha)} x^n {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-\alpha-n, \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

- Πολυώνυμα Hermite

$$\begin{aligned} H_{2n}(x) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right), \\ H_{2n+1}(x) &= (-1)^n 2 \frac{(2n+1)!}{n!} x {}_1F_1\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right), \end{aligned}$$

- Πολυώνυμα Laguerre

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(n+\alpha)!}{n!\alpha!} {}_1F_1(-n, \alpha+1, x),$$

► Πολυώνυμα Chebyshev

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right).$$

**Γενική παρατήρηση:** Στις περιπτώσεις των πολυωνύμων (Legendre, Jacobi, Gegenbauer, Hermite, Laguerre και Chebyshev) η σταθερά  $\alpha$  ή η  $\beta$  είναι πράγματι αρνητικός ακέραιος, όπως και πρέπει για να τερματίζεται η άπειρη σειρά.