ΟΛΟΚΗΡΩΤΙΚΕΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Α. Καρανίκας

Τμήμα Φυσικής ΕΚΠΑ

<u>ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u>

1. Εισαγωγή

Ολοκληρωτικές λέγονται οι εξισώσεις στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση βρίσκεται μέσα σε ολοκλήρωμα. Η γενική μορφή μιας τέτοιας εξίσωσης είναι:

$$\varphi(x) = f(x) + g\int_V dx' F\left(x, x'; \varphi(x')\right) \tag{1.1}$$

Στην εξίσωση αυτή, η συνάρτηση F είναι γνωστή συνάρτηση της $\varphi(x)$ η οποία είναι η άγνωστη συνάρτηση. Εάν $F = K(x, x')\varphi(x')$ η ολοκληρωτική εξίσωση λέγεται **γραμμική.** Αν και ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε παραπέμπει σε χώρο μιας διάστασης, οι παραπάνω εκφράσεις μπορούν να γενικευθούν σε περισσότερες.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις:

$$\varphi(x) = f(x) + g\int_V dx' K(x, x')\varphi(x') \tag{1.2}$$

Η συνάρτηση $K(x, x')$είναι ο καθοριστικός παράγοντας της ολοκληρωτικής εξίσωσης και λέγεται **πυρήνας**. Στον ορισμό του θεωρούμε ότι περιλαμβάνονται και τα όρια της ολοκλήρωσης: Εάν τα όρια αυτά είναι σταθερά, η εξίσωση είναι τύπου **Fredholm.** Εάν είναι μεταβαλλόμενα (εξαρτώνται, δηλαδή, από το x) η εξίσωση είναι τύπου **Volterra.** Η συνάρτηση f είναι κάποια γνωστή συνάρτηση. Εάν είναι εκ ταυτότητος μηδέν, η εξίσωση είναι **ομογενής**. Εάν όχι, είναι **μη ομογενής**.

Οι εξισώσεις θα είναι δευτέρου είδους εάν η άγνωστη συνάρτηση βρίσκεται και εκτός του ολοκληρώματος. Εάν βρίσκεται μόνο μέσα σ' αυτό, η εξίσωση είναι πρώτου είδους. Τέλος, g είναι μια γνωστή σταθερά. Είναι αυτονόητο ότι για να έχουν νόημα οι Εξ.(1.1), Εξ.(1.2) θα πρέπει να έχουν νόημα τα ολοκληρώματα που βρίσκονται στο δεύτερο σκέλος τους. Στις σημειώσεις αυτές θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις οι οποίες εμπλέκονται στην Εξ. (1.2**) είναι συνεχείς**.

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις μπορούν να συνδέονται με κάποια διαφορική εξίσωση χωρίς, όμως, αυτό να είναι αναγκαίο. Για μια τέτοια σύνδεση, θα πρέπει να υπάρχει διαφορικός τελεστής τέτοιος ώστε

$$L_x F\left(x, x'; \varphi(x')\right) = \tilde{F}\left(x; \varphi(x)\right)\delta(x - x') \tag{1.3}$$

Στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση η οποία συνδέεται με την Εξ.(1.1) είναι :

$$L_x\varphi(x) - \tilde{F}\left(x, \varphi(x)\right) = \tilde{f}(x) \quad , \quad \tilde{f}(x) \equiv L_x f(x) \tag{1.4}$$

Μια ποιοτική ερμηνεία αυτής της μαθηματικής απαίτησης προκύπτει εύκολα από την Εξ. (1.3) η οποία δηλώνει ότι η μεταβολή της συνάρτησης F στο σημείο x οφείλεται σε κάποιο αίτιο εντοπισμένο στη γειτονιά της θέσης αυτής. Αντίθετα, μια σχέση της μορφής $L_x F\left(x,x';\varphi(x')\right)=\tilde{F}\left(x,x';\varphi(x')\right)$, δηλώνει ότι η μεταβολή της F στο σημείο x εξαρτάται από το τι συμβαίνει και σε κάθε άλλο σημείο του χώρου:

$$L_x\varphi(x)=\tilde{f}(x)+g\int_V dx'\tilde{F}\left(x,x';\varphi(x')\right) \qquad (1.5)$$

Υπάρχουν πολλά φυσικά συστήματα (όπως, για παράδειγμα, αυτά στα οποία υπάρχει **διάχυση**) η δυναμική των οποίων διέπεται από διαφορο-ολοκληρωτικές εξισώσεις του τύπου της Εξ. (1.5) και όχι από διαφορικές εξισώσεις όπως η Εξ. (1.4).

Κλείνοντας αυτήν τη μικρή εισαγωγή, πρέπει να σημειώσουμε ότι είναι λίγες οι περιπτώσεις στις οποίες μια ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί να λυθεί αναλυτικά σε κλειστή μορφή και όλες σχετίζονται με τη δομή του πυρήνα. Στις σημειώσεις που ακολουθούν, θα παρουσιασθούν κάποιες τέτοιες περιπτώσεις.

Εν τούτοις, υπό αρκετά γενικές προϋποθέσεις , μια γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση του τύπου που εμφανίζεται στην Εξ. (1.2) μπορεί να λυθεί ακριβώς έστω και όχι σε κλειστή μορφή, μέσω, μιας συγκλίνουσας σειράς. Η συνολική ανάλυση του προβλήματος συγκροτεί τη λεγόμενη **θεωρία Fredholm**, η πλήρης παρουσίαση της οποίας είναι πέρα από τους σκοπούς του τρέχοντος σημειώματος στο οποίο θα παρουσιάσουμε μόνο κάποια σημεία της. Σε κάθε περίπτωση, μπορεί κάποιος να ανατρέξει στις αναφορές στο τέλος των σημειώσεων αλλά και σε μια πληθώρα βιβλίων μαθηματικής φυσικής. Σε αυτά που ακολουθούν θεωρούμε κάποιες βασικές έννοιες δεδομένες. Στο Παράρτημα Α, τις παρουσιάζουμε εξαιρετικά συνοπτικά θεωρώντας δεδομένη και απαραίτητη μια πληρέστερη μελέτη.

2. Τεχνικές και παραδείγματα ακριβούς επίλυσης.

(2α) Διαχωρίσιμος Πυρήνας.

Στο εδάφιο αυτό θα αναφερθούμε σε εξισώσεις της μορφής (Fredholm):

$$\varphi(x)=f(x)+g\int_{x_a}^{x_b} dx' K(x,x')\varphi(x') \qquad (2.1)$$

Αν $K(x,x')=\theta(x-x')\tilde{K}(x,x')$ η εξίσωση αυτή μεταπίπτει στην αντίστοιχη εξίσωση Volterra.

Η πιο απλή περίπτωση για την οποία η Εξ.(2.1) μπορεί να λυθεί είναι αυτή στην οποία ο πυρήνας έχει τη διαχωρίσιμη μορφή

$$K(x,x')=a(x)b(x') \qquad (2.2)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ.(2.2) στην Εξ. (2.1) θα πάρουμε:

$$\varphi(x) = f(x) + gca(x) \tag{2.3}$$

όπου

$$c = \int_{x_a}^{x_b} dx b(x) \varphi(x) = \int_{x_a}^{x_b} dx b(x) f(x) + gc \int_{x_a}^{x_b} dx b(x) a(x) \tag{2.4}$$

Επομένως, εάν $g \int_{x_a}^{x_b} dx b(x) a(x) \neq 1$:

$$c = \left[1 - g \int_{x_a}^{x_b} dx b(x) a(x)\right]^{-1} \int_{x_a}^{x_b} dx b(x) f(x) \tag{2.5}$$

Έτσι η λύση της Εξ. (2.1) βρίσκεται αμέσως να είναι:

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{ga(x)}{1 - g \int_{x_a}^{x_b} dx b(x) a(x)} \int_{x_a}^{x_b} dx b(x) f(x) \tag{2.6}$$

Προφανώς λύση δεν υπάρχει όταν $g \int_{x_a}^{x_b} dx b(x) a(x) = 1$. Από την Εξ. (2.4), είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι στην περίπτωση αυτή η ομογενής έκδοση της Εξ. (2.1):

$$\varphi(x) = g \int_{x_a}^{x_b} dx' K(x, x') \varphi(x') \tag{2.7}$$

έχει μη τετριμμένη $(\neq 0)$ λύση.

Το συμπέρασμα αυτό είναι επιβεβαίωση ενός γενικότερου θεωρήματος του Fredholm **(Fredholm alternative**) το οποίο βεβαιώνει ότι είτε η Εξ. (1.7) έχει μοναδική λύση είτε η αντίστοιχη ομογενής

$$\varphi(x) = g \int_{x_a}^{x_b} dx' K(x, x') \varphi(x') \tag{2.8}$$

έχει μη τετριμμένη λύση. Το θεώρημα αυτό (στο πλαίσιο των ολοκληρωτικών εξισώσεων) αφορά σε τελεστές οι οποίοι είναι συμπαγείς.

Η ανάλυση που προηγήθηκε μπορεί να γενικευθεί και στην περίπτωση στην οποία ο πυρήνας μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$K(x, x') = \sum_{n=1}^{N} a_n(x) b_n(x') \tag{2.9}$$

Επαναλαμβάνοντας την προηγούμενη διαδικασία θα βρούμε:

$$\varphi(x) = f(x) + g\sum_{n=1}^{N} c_n a_n(x) \tag{2.10}$$

όπου

$$c_n = \int_{x_a}^{x_b} dx b_n(x)\varphi(x) = c_n^{(0)} + \sum_{m=0}^{N} c_m A_{nm} \tag{2.11}$$

Στην τελευταία εξίσωση γράψαμε:

$$c_n^{(0)} = \int_{x_a}^{x_b} dx b_n(x) f(x) \ , \ A_{nm} = \int_{x_a}^{x_b} dx b_n(x) a_m(x) \tag{2.12}$$

Οι εξισώσεις (2.11) συγκροτούν μη ομογενές σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους:

$$\sum_{m=0}^{N} \left(\delta_{n,m} - gA_{nm}\right) c_m = c_n^{(0)} \Leftrightarrow \tilde{A}C = C^{(0)} \tag{2.13}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση εάν η ορίζουσα του πίνακα με στοιχεία $\tilde{A}_{nm} = \delta_{n,m} - gA_{nm}$ είναι διάφορη του μηδενός : $\det \tilde{A} \neq 0$. Προφανώς η περίπτωση $\det \tilde{A} = 0$ σημαίνει ότι η ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση (2.7) έχει μη τετριμμένη λύση.

Παράδειγμα 1.

Ως ένα απλό παράδειγμα μπορούμε να συζητήσουμε την εξίσωση

$$\varphi(\theta) = 1 + g\int_0^{\pi} d\theta' \sin(\theta + \theta')\varphi(\theta') \tag{2.14}$$

Ο πυρήνας εδώ έχει τη μορφή

$$K(\theta,\theta') = \sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' = \sum_{n=1}^{2} a_n(\theta) b_n(\theta') \tag{2.15}$$

όπου

$$a_1(\theta) = \sin\theta \ , \ a_2(\theta) = \cos\theta \ , \ b_1(\theta) = \cos\theta \ , \ b_2(\theta) = \sin\theta \tag{2.16}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις Εξ. (2.12) και (2.13) με

$$\tilde{A} \doteq \begin{pmatrix} 1 & -g\pi/2 \\ -g\pi/2 & 1 \end{pmatrix}, \ C^{(0)} \doteq \begin{pmatrix} c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-g^2\pi^2/4}\begin{pmatrix} g\pi \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

και επομένως η λύση της Εξ. (2.14) είναι:

$$\varphi(\theta) = 1 + \frac{2g}{1-g^2\pi^2/4}\cos\theta + \frac{g^2\pi}{1-g^2\pi^2/4}\sin\theta \qquad (2.19$$

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε τη λύση (εάν υπάρχει) των παρακάτω εξισώσεων :

$$\varphi(x) = 1 + g\int_0^1 dx'(x+x')\varphi(x') \quad 0 \le x \le 1$$

$$\varphi(x) = x^2 + g\int_0^1 dx'(x+x')\varphi(x') \quad 0 \le x \le 1$$

$$\varphi(x) = f(x) + g\int_0^1 dx'(x+x')\varphi(x') \quad 0 \le x \le 1$$

$$\varphi(x) = f(x) + g\int_0^1 dx' \cos\left[a(x-x')\right]\varphi(x') \quad 0 \le x \le 1$$

(2β) Ανάπτυξη σε σύστημα ιδιοσυναρτήσεων.

Μια αρκετά γενική τεχνική αφορά τις περιπτώσεις στις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύστημα ορθοκανονικών συναρτήσεων ώστε να γενικεύσουμε και να επεκτείνουμε τη λογική της προηγούμενης παραγράφου.

Έστω ότι στην περιοχή $\left[x_a, x_b\right]$-η οποία μπορεί να εκτείνεται και έως το άπειρο-είναι δυνατόν να βρούμε ένα πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)u_n^*(x') = \delta(x-x') \tag{2.20}$$

Στη βάση αυτή μπορούμε να γράψουμε τον πυρήνα σε διαχωρίσιμη μορφή:

$$K(x,x') = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x')u_n(x) \ , \ p_n(x') = \int_{x_a}^{x_b} dx K(x,x')u_n^*(x) \tag{2.21}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε και τις αναλύσεις

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_n u_n(x) \;,\; \tilde{\varphi}_n=\int_{x_a}^{x_b}dx\varphi(x)u_n^*(x) \;;\; f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{f}_n u_n(x) \;,\; \tilde{f}_n=\int_{x_a}^{x_b}dx f(x)u_n^*(x) \tag{2.22}$$

Η Εξ. (2.1) γράφεται:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\delta_{n,m}-gA_{nm}\right)\tilde{\varphi}_m=\tilde{f}_n \;,\; A_{nm}=\int_{x_a}^{x_b}dx p_n(x)u_m^*(x) \tag{2.23}$$

Το να βρεθεί μια βάση συναρτήσεων είναι το εύκολο μέρος της ιστορίας. Το δύσκολο είναι ότι στην Εξ. (2.23)-αντίθετα από την Εξ. (2.13)-το άθροισμα μπορεί να φθάνει έως το άπειρο, γεγονός που κάνει την επίλυση της εξίσωσης μη τετριμμένη έως και αδύνατη. Η δυνατότητα επίλυσης εξαρτάται τόσο από τον πυρήνα της εξίσωσης όσο και από τη βάση στην οποία τον αναπτύσσουμε. Δυστυχώς, δεν υπάρχει γενική «συνταγή» για την καλύτερη δυνατή επιλογή βάσης η οποία να οδηγεί στη λύση του προβλήματος.

Υπάρχουν, όμως, περιπτώσεις που το πρόβλημα μπορεί να απλοποιηθεί.
Για να δούμε την πλέον προφανή, μπορούμε να συζητήσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων του ολοκληρωτικού τελεστή $\hat{K}$:

$$\hat{K}|n\rangle=k_n|n\rangle\rightarrow\int_{x_a}^{x_b}dx'K(x,x')u_n(x')=k_n u_n(x) \tag{2.24}$$

Το λεγόμενο **φασματικό θεώρημα** μας βεβαιώνει ότι για τελεστές οι οποίοι είναι **συμπαγείς και αυτοσυζυγείς** μπορούμε να βρούμε ένα ορθοκανονικό σύνολο ιδιοσυναρτήσεων και αντίστοιχων ιδιοτιμών έτσι ώστε να γράψουμε:

$$\hat{K}=\sum_n k_n|n\rangle\langle n|\rightarrow K(x,x')=\sum_n k_n u_n(x)u_n^*(x') \tag{2.25}$$

Το πλήθος αυτών των ιδιοσυναρτήσεων μπορεί να είναι πεπερασμένο ή (αριθμήσιμα) άπειρο. Στην τελευταία περίπτωση οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές αποτελούν βάση στον χώρο Hilbert. Εάν είναι πεπερασμένο, είναι προφανές ότι, δεν μπορούμε να γράψουμε μια τυχαία συνάρτηση ως γραμμικό συνδυασμό τους και, επομένως, δεν αποτελούν βάση (δεν ισχύει, δηλαδή, η Εξ. (2.20)) στον χώρο Hilbert (μπορούν, όμως, να αποτελούν βάση σε κάποιον υπόχωρό του πεπερασμένων διαστάσεων).

Σε κάθε περίπτωση, όμως, οι συναρτήσεις (2.24)-είτε είναι ένα πλήρες σύνολο στον χώρο Hilbert είτε όχι- μπορούν να μας οδηγήσουν στη λύση της (γραμμικής) ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.1) αφού ο πίνακας A είναι διαγώνιος:

$$A_{nm}=\langle n|\hat{K}|m\rangle=\int_{x_a}^{x_b}dx\int_{x_a}^{x_b}dx'u_n^*(x)K(x,x')u_m(x')=k_n\delta_{n,m} \tag{2.26}$$

και η Εξ. (2.1) μπορεί να γραφεί:

$$\tilde{\varphi}_n = \tilde{f}_n + gk_n\tilde{\varphi}_n \tag{2.27}$$

Επομένως, εάν $gk_n \neq 1\ \forall n\left(\rightarrow \det \tilde{A} \neq 0\right)$:

$$\tilde{\varphi}_n = \frac{\tilde{f}_n}{1-gk_n} \ \rightarrow\ \varphi(x) = \sum_n \frac{\tilde{f}_n}{1-gk_n} u_n(x) = f(x) + g\sum_n f_n \frac{k_n}{1-gk_n} u_n(x) \tag{2.28}$$

Η δυσκολία που κρύβεται πίσω από την προηγούμενη ανάλυση είναι ότι
το πρόβλημα του προσδιορισμού των ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή μπορεί να είναι εξίσου δύσκολο με το αρχικό πρόβλημα αφού η δομή της Εξ. (2.24) δεν είναι παρά η ομογενής έκδοση της αρχικής ολοκληρωτικής Εξ. (2.1).

Παράδειγμα 2.

Έστω η εξίσωση

$$\varphi(x) = f(x) + g\int_0^L dx' K(x,x')\varphi(x') \tag{2.29}$$

όπου

$$K(x,x') = \frac{(L-x)x'}{L}\theta(x-x') + \frac{x(L-x')}{L}\theta(x'-x) \tag{2.30}$$

Η εξίσωση ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων έχει τη μορφή

$$\int_0^L dx' K(x,x') u_n(x') = k_n u_n(x) \tag{2.31}$$

Λόγω της μορφής του πυρήνα μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα:

$$k_n \frac{d^2}{dx^2} u_n(x) = -u_n(x)\ ,\ u_n(0) = u_n(L) = 0 \tag{2.32}$$

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί εύκολα:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ ,\ k_n = \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2,\ n = 1,2,3,\dots \tag{2.33}$$

Οι συναρτήσεις (2.33), όπως είναι γνωστό, αποτελούν ένα πλήρες σύνολο συναρτήσεων και συγκροτούν βάση στην οποία μπορεί να αναπτυχθεί μια τυχαία συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές απαιτήσεις που συνοδεύουν την Εξ. (2.32).
Στη βάση αυτή ο πυρήνας, όπως μπορεί να διαπιστωθεί από την Εξ. (2.21), παίρνει τη διαγώνια μορφή:

$$K(x,x') = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x')u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n u_n^*(x')u_n(x) \tag{2.34}$$

Αναπτύσσοντας όλους τους όρους της Εξ.(2.29) στη βάση (2.33) θα καταλήξουμε στο αποτέλεσμα που φαίνεται στην Εξ. (2.28).

Παράδειγμα 3.

Εδώ θα λύσουμε την εξίσωση (2.14) του πρώτου παραδείγματος ακολουθώντας μια διαφορετική διαδρομή.
Ξεκινάμε από το πρόβλημα:

$$\int_0^{\pi} d\theta' \sin(\theta+\theta') u_n(\theta') = \int_0^{\pi} d\theta' K(\theta,\theta') u_n(\theta') = k_n u_n(\theta) \tag{2.35}$$

Αν παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} d\theta' \sin(\theta+\theta')\sin\theta' &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta' \left[\cos\theta - \cos(\theta+2\theta')\right] = \frac{\pi}{2}\cos\theta \\ \int_0^{\pi} d\theta' \sin(\theta+\theta')\cos\theta' &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta' \left[\sin(\theta+2\theta') + \sin\theta\right] = \frac{\pi}{2}\sin\theta \end{aligned} \tag{2.36}$$

μπορούμε να βρούμε δύο ιδιοκαταστάσεις και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές:

$$u_{\pm}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\cos\theta \pm \sin\theta) \;,\; k_{\pm} = \pm\frac{\pi}{2} \tag{2.37}$$

Εάν αυτά τα αποτελέσματα τα χρησιμοποιήσουμε στην έκφραση (2.28) θα βρούμε τη λύση (2.19).

Πρόβλημα 2.

Να λυθεί η εξίσωση

$$\varphi(t) = 1 + g\int_0^T dt' K(t,t')\varphi(t')$$

όπου

$$K(t,t') = \left[\theta(t-t') - \frac{1}{1-e^{i\omega T}}\right] e^{-i\omega(t-t')}$$

Υπόδειξη:
Η εξίσωση ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων

$$\int_0^T dt' K(t,t') u_n(t') = k_n u_n(t)$$

μπορεί να λυθεί αν παρατηρήσουμε ότι $K(0,t') = K(T,t')$ και, επομένως, ότι είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα:

$$k_n\left(\frac{d}{dt}+i\omega\right)u_n(t)=u_n(t)\ ,\ u_n(0)=u_n(T)$$

Η λύση της τελευταίας εξίσωσης βρίσκεται πολύ εύκολα:

$$u_n(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}e^{i\omega_n t}\ ,\ k_n=-i/(\omega_n+\omega)\ ,\ \omega_n=\frac{2\pi}{T}n,\ n=0,\pm1,\pm2$$

Επομένως:

$$\varphi(t)=1+g\sum_n\sqrt{T}\delta_{n,0}\frac{k_n}{1-gk_n}u_n(t)$$

Πρόβλημα 3.

Να επαναλάβετε το Πρόβλημα 1, χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις των αντίστοιχων ολοκληρωτικών τελεστών.

(2γ) Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί.

Σε ορισμένες περιπτώσεις μια ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά μέσω κάποιου **ολοκληρωτικού μετασχηματισμού.**

Ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός χαρακτηρίζεται από μια συνεχή παράμετρο και έχει την τυπική μορφή:

$$\varphi(x)\to(\hat{T}\varphi)(p)\equiv\varphi_T(p)=\int_T dxT(x,p)\varphi(x) \tag{2.38}$$

Τα όρια της ολοκλήρωσης καθορίζονται από τον πυρήνα T του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού. Οι μετασχηματισμοί για τους οποίους συζητάμε είναι **αντιστρεπτοί**:

$$\varphi(x)=\int_{T^{-1}}dpT^{-1}(p,x)\varphi_T(p) \tag{2.39}$$

$$\int_T dxT^{-1}(p,x)T(x,p')=\delta(p-p')\ ,\ \int_{T^{-1}}dpT(x,p)T^{-1}(p,x')=\delta(x-x') \tag{2.40}$$

Το πιο γνωστό, ίσως, παράδειγμα ενός τέτοιου μετασχηματισμού είναι ο μετασχηματισμός Fourier.

Με την εφαρμογή ενός ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\varphi(x)=f(x)+g\int_V dx'K(x,x')\varphi(x') \tag{2.41}$$

παίρνει τη μορφή

$$\tilde{\varphi}(p)=\tilde{f}(p)+g\int_{T^{-1}}dp'\tilde{K}(p,p')\tilde{\varphi}(p') \tag{2.42}$$

Στην τελευταία εξίσωση γράψαμε

$$\tilde{K}(p,p') \equiv \int_V dx' \int_V dx T(x,p) K(x,x') T^{-1}(x',p') \tag{2.43}$$

Συγκρίνοντας τις Εξ. (2.38) και (2.41) βλέπουμε ότι τα όρια στα οποία κινείται η μεταβλητή x στην ολοκληρωτική εξίσωση και στον ολοκληρωτικό μετασχηματισμό πρέπει να συμπίπτουν. Είναι προφανές ότι η εφαρμογή ενός ολοκληρωτικού μετασχηματισμού μπορεί να είναι χρήσιμη εάν η Εξ. (2.43) οδηγεί στο διαγώνιο αποτέλεσμα:

$$\tilde{K}(p,p') = k(p)\delta(p-p') \tag{2.44}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, ένα τέτοιο αποτέλεσμα εξαρτάται από τη μορφή του πυρήνα της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

- **Μετασχηματισμός Fourier**

Ένα κλασικό παράδειγμα αφορά σε εξισώσεις της μορφής:

$$\varphi(x) = f(x) + g\int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x-x')\varphi(x') \tag{2.45}$$

Εάν πάρουμε τον μετασχηματισμό Fourier και των δύο μελών της τελευταίας εξίσωσης

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}\varphi_F(p)\ ,\ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} f_F(p)\ ,\ K(x-x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{ip(x-x')} K_F(p) \tag{2.46}$$

μπορούμε να την γράψουμε με τη μορφή:

$$\varphi_F(p) = f_F(p) + g\sqrt{2\pi} K_F(p)\varphi_F(p) \tag{2.47}$$

Επομένως, εάν $g\sqrt{2\pi}K_F(p) \neq 1\ \forall p$, θα βρούμε:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} \frac{f_F(p)}{1 - g\sqrt{2\pi}K_F(p)} \tag{2.48}$$

Εάν η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει ανώμαλα σημεία, η αντιστροφή της Εξ. (2.49) μπορεί και πάλι να προχωρήσει όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 4.

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$\varphi(x) = f(x) + g\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-|x-x'|}\varphi(x') \tag{2.49}$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier και των δύο μελών της εξίσωσης βρίσκουμε:

$$\varphi_F(p) = f_F(p) + g\sqrt{2\pi}K_F(p)\varphi_F(p) \qquad (2.50)$$

Εδώ:

$$K_F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-|x|-ipx} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+p^2} \qquad (2.51)$$

Επομένως η λύση της Εξ.(2.50) διαβάζεται:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} \frac{1+p^2}{1+p^2-2g} f_F(p) \qquad (2.52)$$

Εάν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι αρκετά καλά συμπεριφερόμενη ώστε η f_F να είναι παντού αναλυτική, το ολοκλήρωμα στην Εξ. (2.52) εξαρτάται από τον παρονομαστή. Εάν $1-2g>0$ ο υπολογισμός μπορεί να προχωρήσει χωρίς κανένα πρόβλημα. Εάν $1-2g<0$ η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει πόλους στα σημεία $p=\pm\sqrt{2g-1}$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να καταφύγουμε σε κάποια οριακή διαδικασία για τον ορισμό του ολοκληρώματος, όπως γίνεται και με τα αντίστοιχα προβλήματα που συναντάμε στις συναρτήσεις Green. Όπως σε εκείνη την περίπτωση έτσι και εδώ, διαφορετικές οριακές διαδικασίες μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικά αποτελέσματα. Σε μια τέτοια περίπτωση η λύση της Εξ. (2.50) δεν είναι μοναδική. Για να γίνει μοναδική χρειάζονται περισσότερες πληροφορίες οι οποίες θα μπορούσαν να προέρχονται, για παράδειγμα, από το φυσικό πρόβλημα το οποίο βρίσκεται στη βάση της αρχικής εξίσωσης.

Πρόβλημα 4.

Να λύσετε την εξίσωση

$$\varphi(x) = x^{2n}e^{-x^2/2} + g\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-\frac{(x-x')^2}{2}} \varphi(x') \ , \ n\in\mathbb{N}$$

• Μετασχηματισμός Laplace

Εάν ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης έχει τη μορφή

$$K(x-x') = \theta(x-x')F(x-x') \qquad (2.53)$$

είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace:

$$\varphi_L(p) = \int_0^{\infty} dx e^{-px}\varphi(x) \ , \ \operatorname{Re} p > 0 \qquad (2.54)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός έχει τη μορφή

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}dze^{zx}\varphi_L(z) \tag{2.55}$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα η σταθερά $\varepsilon\to+0$ έχει προστεθεί ώστε το ολοκλήρωμα να ορίζεται.

Η πρακτικότητα ενός τέτοιου μετασχηματισμού φαίνεται στην εξίσωση Volterra:

$$\varphi(x)=f(x)+g\int_0^{\infty}dx'K(x-x')\varphi(x')=f(x)+g\int_0^{x}dx'F(x-x')\varphi(x') \tag{2.56}$$

Εάν πάρουμε τον μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\varphi_L(p)&=f_L(p)+g\int_0^{\infty}dx'\left[\int_{x'}^{\infty}dxe^{-px}F(x-x')\right]\varphi(x')=\\&=f_L(p)+g\int_0^{\infty}dx'\left[\int_0^{\infty}dye^{-py}F(y)\right]e^{-px'}\varphi(x')=f_L(p)+gF_L(p)\varphi_L(p)\end{aligned} \tag{2.57}$$

Επομένως , εάν $gF_L(p)\neq 1\ \forall p$, βρίσκουμε:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}dpe^{px}\frac{f_L(p)}{1-gF_L(p)} \tag{2.58}$$

Παράδειγμα 5.

Έστω η εξίσωση:

$$\varphi(x)=1+g\int_0^{x}dx'e^{-(x-x')}\varphi(x') \tag{2.59}$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace θα βρούμε:

$$\varphi_L(p)=\frac{1}{p}+g\frac{1}{p+1}\varphi_L(p) \tag{2.60}$$

Επομένως

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}dpe^{px}\frac{p+1}{p(p+1-g)} \tag{2.61}$$

Με την αλλαγή $p=\varepsilon+it$ το ολοκλήρωμα (2.61) γράφεται:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}dte^{itx}\frac{t-i}{t-i(1-g)}\frac{1}{t-i\varepsilon}=\frac{1}{1-g}\left(1-ge^{-(1-g)x}\theta(1-g)\right) \tag{2.62}$$

Εάν $1-g=+0$ η Εξ. (2.57) θα δώσει:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}dte^{itx}\frac{t-i}{(t-i\varepsilon)^2}=\frac{d}{dt}\left(e^{itx}(t-i)\right)_{t=0}=1+x \tag{2.63}$$

Πρόβλημα 5.

Να λύσετε την εξίσωση

$$\varphi(x)=\frac{x^n}{n!}+\int_0^x dx'e^{-(x-x')}\varphi(x')$$

• Μετασχηματισμός Mellin

Ο μετασχηματισμός Mellin (εάν υπάρχει) μιας συνάρτησης $\varphi(x)$ ορίζεται

$$\varphi_M(p)=\int_0^\infty dxx^{p-1}\varphi(x)\ ,\ \ \mathrm{Re}\,p>0 \tag{2.64}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός έχει τη μορφή:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}dpx^{-p}\varphi_M(p) \tag{2.65}$$

Η λειτουργία της σταθεράς $\varepsilon\to+0$ είναι παρόμοια με αυτήν στην περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace.

Ο μετασχηματισμός Mellin μπορεί να είναι χρήσιμος όταν ο πυρήνας έχει τη μορφή $K(x,x')=F(x/x')/x'$ σε εξισώσεις, δηλαδή, της μορφής:

$$\varphi(x)=f(x)+g\int_0^\infty\frac{dx'}{x'}F\left(\frac{x}{x'}\right)\varphi(x') \tag{2.66}$$

Αν πάρουμε τον μετασχηματισμό Mellin και των δύο μελών της τελευταίας θα βρούμε

$$\begin{aligned}\varphi_M(p)&=f_M(p)+g\int_0^\infty\frac{dx'}{x'}\varphi(x')\int_0^\infty dxx^{p-1}F(x/x')=f_M(p)+g\int_0^\infty dx'x'^{p-1}\varphi(x')\int_0^\infty dxx^{p-1}F(x)=\\&=f_M(p)+g\varphi_M(p)F_M(p)\end{aligned} \tag{2.67}$$

Επομένως, εάν $gF_M(p)\neq1\ \forall p$, βρίσκουμε:

$$\varphi_M(p)=f_M(p)/\left(1-gF_M(p)\right) \tag{2.68}$$

Παράδειγμα 6.

Έστω η εξίσωση:

$$\varphi(x) = e^{-ax} + \int_0^\infty \frac{dx'}{x'} e^{-x/x'} \varphi(x'), \quad a > 0 \tag{2.69}$$

Αν πάρουμε υπόψη ότι

$$\int_0^\infty dx e^{-ax} x^{p-1} = \Gamma(p)/a^p, \ \ \mathrm{Re}\, p > 0 \tag{2.70}$$

βρίσκουμε:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{dp}{(ax)^p} \frac{1}{1/\Gamma(p) - 1} \tag{2.71}$$

Στις τελευταίες σχέσεις $\Gamma(p)$ είναι η λεγόμενη συνάρτηση γάμμα. Εάν $p = n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$. Στη γενική περίπτωση η Εξ. (2.70) (με $a = 1$) μπορεί να θεωρηθεί ως ορισμός της $\Gamma(p)$ όταν $\mathrm{Re}\, p > 0$. Η συνάρτηση γάμμα μπορεί να ορισθεί μέσω της σχέσης $\Gamma(p) = \Gamma(p+1)/p$ σε όλο το μιγαδικό επίπεδο (ακόμα και στην περιοχή όπου $\mathrm{Re}\, p < 0$). Είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία $p = 0, -1, -2, \ldots$ στα οποία έχει πόλους πρώτης τάξης. Επομένως η συνάρτηση $1/\Gamma(p)$ η οποία εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα (2.73) είναι παντού αναλυτική και έχει απλούς μηδενισμούς στους μη θετικούς ακεραίους.
Ο δρόμος ολοκλήρωσης στην Εξ.(2.71) είναι μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των φανταστικών και μετατοπισμένη από αυτόν κατά $\varepsilon = +0$ προς τα δεξιά. Η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει εύκολα εάν κλείσουμε την διαδρομή και εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy. Ο τρόπος που θα κλείσει η διαδρομή εξαρτάται από τον παράγοντα $(ax)^{-p} = e^{-p\ln(ax)}$. Εάν $ax > 1$ η διαδρομή θα κλείσει στο δεξί ημιεπίπεδο όπου τα μόνα σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής στο ολοκλήρωμα (2.71) είναι τα σημεία $p = 1, 2$ για τα οποία $\Gamma(p) = 1$.
Στη γειτονιά των σημείων αυτών έχουμε:

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \simeq \frac{1}{\Gamma(p_j)} - (p - p_j) \frac{1}{\Gamma(p_j)} \frac{d}{dp} \ln \Gamma(p) \Big|_{p=p_j} = 1 - (p - p_j) \psi_1(p_j) \tag{2.72}$$

Στην τελευταία σχέση η συνάρτηση $\psi_1 = \dfrac{1}{\Gamma(p)} \dfrac{d}{dp} \Gamma(p)$ λέγεται, για προφανή λόγο, λογαριθμική παράγωγος της συνάρτησης γάμμα. Μπορεί να δειχθεί ότι $\psi_1(1) = -\gamma_E$, $\psi_1(2) = 1 - \gamma_E$ όπου η σταθερά $\gamma_E = 0.5772157$ είναι γνωστή ως σταθερά Euler-Mascheroni.
Επομένως στην περιοχή $ax > 1$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(ax)\psi_1(1)} + \frac{1}{(ax)^2 \psi_1(2)} \tag{2.73}$$

Στην περιοχή $ax < 1$ η διαδρομή στο ολοκλήρωμα (2.74) θα κλείσει στο αριστερό ημιεπίπεδο. Εκεί η εξίσωση $1/\Gamma(p) = 1$ έχει άπειρες λύσεις p_j , $j = 1, 2, 3, \ldots$ αφού η $1/\Gamma$ είναι αναλυτική συνάρτηση με μηδενισμούς πρώτης τάξης στα σημεία $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$ και επομένως μπορεί να γραφεί ως $\Gamma^{-1}(z) = \prod_{n=0}^{\infty} c_n(z)(z+n)$ όπου οι συντελεστές είναι αναλυτικές συναρτήσεις του z . Έτσι, στην περιοχή $ax < 1$ θα βρούμε:

$$\varphi(x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(ax)^{p_j} \psi_1(p_j)} \tag{2.74}$$

Πρόβλημα 6.

Να λύσετε την εξίσωση

$$\varphi(x) = e^{-\alpha x} + \int_0^{\infty} \frac{dx'}{x'} e^{-(x/x')^2} \varphi(x'), \quad a > 0$$

Από τα λίγα αυτά παραδείγματα είναι κατανοητό ότι τόσο η ακριβής επίλυση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης όσο και η αντίστοιχη τεχνική είναι πολύ στενά συνδεδεμένες με τη μορφή του πυρήνα. Στη βιβλιογραφία ([1]-[3]) μπορεί να βρει κανείς πολλά παραδείγματα εξισώσεων οι οποίες μπορούν να λυθούν ακριβώς. Εντούτοις, οι περισσότερες (και οι φυσικά πιο ενδιαφέρουσες) περιπτώσεις ολοκληρωτικών εξισώσεων δεν εμπίπτουν στην κατηγορία αυτή.

3. Επαναληπτικές Προσεγγίσεις.

Οι συναρτήσεις Green περιγράφουν τις συσχετίσεις σε κάποιο φυσικό σύστημα και η γνώση τους είναι πολύ σημαντική αφού είναι ισοδύναμη με την πλήρη γνώση της δυναμικής του εν λόγω συστήματος. Δυστυχώς, όμως, τα συστήματα στα οποία γνωρίζουμε την ακριβή μορφή των συναρτήσεων Green είναι ελάχιστα.
Σε ορισμένες περιπτώσεις το πρόβλημα του προσδιορισμού της συνάρτησης Green διατυπώνεται μέσω μιας εξίσωσης με τη μορφή

$$\left(L_x + gV(x)\right)G(x, x') = -\delta(x - x') \tag{3.1}$$

όπου L_x είναι κάποιος διαφορικός τελεστής για τον οποίο η αντίστοιχη συνάρτηση Green είναι γνωστή

$$L_x G^{(0)}(x, x') = -\delta(x - x') \tag{3.2}$$

αλλά η ύπαρξη του όρου $V(x)$ στον πλήρη διαφορικό τελεστή, κάνει την ακριβή λύση της Εξ. (3.1) εξαιρετικά δύσκολη ή και αδύνατη.
Ένας τρόπος χειρισμού του προβλήματος (3.1) ξεκινάει με την μετακίνηση του μέρους του πλήρους διαφορικού τελεστή το οποίο μας δημιουργεί δυσκολία, στο δεξί μέλος της εξίσωσης:

$$L_x G(x,x') = -\delta(x-x') - gV(x) \tag{3.3}$$

Αν την τελευταία τη χειριστούμε ως μη ομογενή διαφορική εξίσωση με όρο μη ομογένειας $f(x,x') = \delta(x-x') + gV(x)$, μπορούμε να γράψουμε:

$$G(x,x') = \int_V dx_1 G^{(0)}(x,x_1)\, f(x_1) = G^{(0)}(x,x') + g\int_V dx_1 G^{(0)}(x,x_1) V(x_1) G(x_1,x') \tag{3.4}$$

Η τελευταία είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση με πυρήνα

$$K(x,x') = G^{(0)}(x,x') V(x') \tag{3.5}$$

Είναι ιδιαίτερα βολικό να διατυπώσουμε την Εξ. (3.4) μέσω τελεστών:

$$\hat{G} = \hat{G}^{(0)} + g\hat{K}\hat{G} \tag{3.6}$$

όπου

$$\langle x|\hat{G}|x'\rangle = G(x,x') \;,\; \langle x|\hat{K}|x'\rangle = G^{(0)}(x,x')V(x') \tag{3.7}$$

Για τις μαθηματικές λεπτομέρειες (συμβολισμούς, ορισμούς κλπ.) αυτού του εδαφίου παραπέμπουμε στο Παράρτημα Α.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\hat{G} &= \hat{G}^{(0)} + g\hat{K}\left(\hat{G}^{(0)} + g\hat{K}\hat{G}\right) = \hat{G}^{(0)} + g\hat{K}\hat{G}^{(0)} + g^2\hat{K}^2\hat{G} = \\ &= \hat{G}^{(0)} + g\hat{K}\hat{G}^{(0)} + g^2\hat{K}^2\hat{G}^{(0)} + \ldots + g^N\hat{K}^N\hat{G}^{(0)} + g^{N+1}\hat{K}^{N+1}\hat{G} = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N} g^n\hat{K}^n\right)\hat{G}^{(0)} + g^{N+1}\hat{K}^{N+1}\hat{G} \equiv \hat{S}_N\hat{G}^{(0)} + \hat{R}_N\end{aligned} \tag{3.8}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε τα εξής: Το αποτέλεσμα (3.8) είναι ακριβές υπό την έννοια ότι είναι ταυτόσημο με την αρχική εξίσωση αφού το μόνο το οποίο έγινε είναι η επαναληπτική εφαρμογή της ίδιας σχέσης (της Εξ. (3.6)). Η χρησιμότητά του (εάν υπάρχει κάποια) βρίσκεται στη δυνατότητα να κρατήσουμε μόνο τον πρώτο όρο στο δεύτερο σκέλος της Εξ. (3.8) και να έχουμε μια καλή προσέγγιση του πραγματικού αποτελέσματος:

$$\hat{G} \simeq \left(\sum_{n=0}^{N} g^n \hat{K}^n \right) \hat{G}^{(0)} \equiv \hat{S}_N \hat{G}^{(0)} \tag{3.9}$$

Αυτό το οποίο υπονοεί η προηγούμενη σχέση είναι ότι η παράλειψη του τελευταίου όρου στην Εξ. (3.8) , $\hat{R}_N = g^{N+1}\hat{K}^{N+1}\hat{G}$, επιφέρει ένα συγκριτικά μικρό σφάλμα $\sim O\left(g^{N+1}\right)$ το οποίο γίνεται τόσο μικρότερο όσους περισσότερους όρους συναθροίζουμε στον πρώτο όρο.

Για να ποσοτικοποιήσουμε αυτή την δυνατότητα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

$$\left\|\hat{R}_N\right\| = \left\|g^{N+1}\hat{K}^{N+1}\hat{G}\right\| \le \left\|\left(g\hat{K}\right)^{N+1}\right\| \left\|\hat{G}\right\| \le \left\|g\hat{K}\right\|^{N+1} \left\|\hat{G}\right\| \tag{3.10}$$

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι

$$\left\|g\hat{K}\right\| < 1 \tag{3.11}$$

και ότι $\left\|\hat{G}\right\| < \infty$, βλέπουμε ότι:

$$\left\|\hat{R}_N\right\| \le e^{-(N+1)\ln 1/\left\|g\hat{K}\right\|} \left\|\hat{G}\right\| \underset{N\to\infty}{\to} 0 \tag{3.12}$$

Επομένως:

$$\lim_{N\to\infty} \left\|\hat{G} - \hat{S}_N \hat{G}^{(0)}\right\| = 0 \tag{3.13}$$

Για να καταλάβουμε καλύτερα τι σημαίνει αυτό ας ξαναγράψουμε την Εξ. (3.6) ως

$$\left(1 - g\hat{K}\right)\hat{G} = \hat{G}^{(0)} \tag{3.14}$$

Αν υποθέσουμε ότι ο τελεστής $1 - g\hat{K}$ αντιστρέφεται (μια εύλογη υπόθεση αφού, σε διαφορετική περίπτωση η Εξ.(3.14) δεν λύνεται) μπορούμε να γράψουμε:

$$\hat{G} = \frac{1}{1 - g\hat{K}} \hat{G}^{(0)} \tag{3.15}$$

Η υπόθεση αυτή εκφράζεται, μαθηματικά, από την απαίτηση η εξίσωση $\left(1 - g\hat{K}\right)|\varphi\rangle = 0$ να έχει μόνο την τετριμμένη λύση $|\varphi\rangle = 0$ ή, αλλιώς $\ker\left(1 - g\hat{K}\right) = \varnothing$.

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.13) και (3.15) βλέπουμε ότι:

$$\left\|g\hat{K}\right\| < 1 \to \lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{1 - g\hat{K}} - \sum_{n=0}^{N} g^n \hat{K}^n \right\| = 0 \tag{3.16}$$

Για να δούμε τις αναλογίες μπορούμε να σκεφθούμε ότι, εάν οι όροι στις Εξ. (3.8) ήταν αριθμοί, η προσέγγιση (3.9) είναι ισοδύναμη με την απαίτηση η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} g^n K^n$ να συγκλίνει. Για κάτι τέτοιο αρκεί να $|gK|<1$ οπότε $\sum_{n=0}^{\infty} g^n K^n = \dfrac{1}{1-gK}$.

Δύο είναι τα σημεία τα οποία πρέπει να υπογραμμισθούν σχετικά με την απόδειξη της συνθήκης (3.16).

Το πρώτο είναι ότι το μόνο που απαιτεί (πέραν του να έχει νόημα η Εξ. (3.15)) είναι να είναι επαρκώς φραγμένος ο ολοκληρωτικός τελεστής: $\left\|g\hat{K}\right\|<1$.

Το δεύτερο, ότι αφορά μόνο το ικανό, όχι το αναγκαίο: Αν, δηλαδή, η προηγούμενη δέσμευση ισχύει, η σειρά συγκλίνει. Αν δεν ισχύει, δεν έχουμε αποδείξει ότι η σειρά αποκλίνει κατ' ανάγκη.

Θα πρέπει, επίσης, να σημειώσουμε το εξής: Όπως θα δούμε στο Παράρτημα Α, ο τελεστής $\hat{K}$ ως ολοκληρωτικός, είναι συμπαγής. Έτσι, η σειρά $\hat{T}_N = \sum_{n=0}^{N} g^n \hat{K}^n$ είναι μια σειρά συμπαγών τελεστών.

Μπορεί να αποδειχθεί, ότι ένας τελεστής ο οποίος έχει την ιδιότητα (3.16): $\lim_{N\to\infty}\left\|\hat{T}-\hat{T}_N\right\|=0$ είναι επίσης συμπαγής. Επομένως εάν $\left\|g\hat{K}\right\|<1$ ο τελεστής $\left(1-g\hat{K}\right)^{-1}$ είναι συμπαγής.

Πριν προχωρήσουμε πρέπει να σημειώσουμε ότι η λογική η οποία οδήγησε στην Εξ. (3.8) μπορεί να εφαρμοσθεί και σε ολοκληρωτικές εξισώσεις οι οποίες δεν συνδέονται κατ' ανάγκη με συναρτήσεις Green. Μια τέτοια εξίσωση μπορεί φορμαλιστικά να γραφεί (βλέπε και Εξ. (1.7)):

$$|\varphi\rangle = |f\rangle + g\hat{K}|\varphi\rangle \tag{3.17}$$

Με τα ίδια βήματα όπως πριν, βρίσκουμε

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{N} g^n \hat{K}^n |f\rangle + g^{N+1}\hat{K}^{N+1}|\varphi\rangle \equiv \hat{S}_N|f\rangle + |R_N\rangle \tag{3.18}$$

Αν γράψουμε $\varphi_N(x) = \int_V dx' \langle x|\hat{S}_N|x'\rangle f(x')$, η μετάφραση της Εξ. (3.13) στη συγκεκριμένη περίπτωση διαβάζεται ως εξής:

$$\lim_{N\to\infty}\|\varphi-\varphi_N\| = \lim_{N\to\infty}\|R_N\| = 0 \tag{3.19}$$

Είναι χρήσιμο, πριν από οτιδήποτε άλλο, να συζητήσουμε ως παράδειγμα ένα πρόβλημα (βλέπε Εξ.(2.14) την ακριβή λύση του οποίου γνωρίζουμε:

$$\varphi(\theta)=1+g\int_0^{\pi}d\theta'\sin(\theta+\theta')\varphi(\theta')$$

Η επαναληπτική διαδικασία θα μας δώσει:

$$\varphi(\theta)=1+\sum_{n=1}^{N}g^n\int_0^{\pi}d\theta'\sin(\theta+\theta')\varphi_{n-1}(\theta')+O\left(g^{N+1}\right)=\sum_{n=0}^{N}g^n\varphi_n(\theta)+R_N(\theta) \quad (3.20)$$

Στην τελευταία εξίσωση γράψαμε:

$$\varphi_n(\theta)=\int_0^{\pi}d\theta'\sin(\theta+\theta')\varphi_{n-1}(\theta')\ ,\ \varphi_0(\theta)=1 \quad (3.21)$$

Εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι:

$$\varphi_1=2\cos\theta\ ,\ \varphi_2=\pi\sin\theta,\ \varphi_3=\frac{\pi^2}{4}2\cos\theta,\ \varphi_4=\frac{\pi^2}{4}\pi\sin\theta,... \quad (3.22)$$

Τα αποτελέσματα αυτά γενικεύονται άμεσα:

$$\varphi_{2n-1}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(n-1)}2\cos\theta\ ,\ \varphi_{2n}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(n-1)}\pi\sin\theta\ ,\ n=1,2,... \quad (3.23)$$

Επομένως :

$$\varphi(\theta)=\varphi_N(\theta)+R_N(\theta) \quad (3.24)$$

όπου

$$\varphi_N(\theta)=1+2g\cos\theta\sum_{n=0}^{N_1}\left(\frac{g\pi}{2}\right)^{2n}+g^2\sin\theta\sum_{n=0}^{N_2}\left(\frac{g\pi}{2}\right)^{2n} \quad (3.25)$$

Στην τελευταία σχέση N_1 = το ακέραιο μέρος του $\frac{N-1}{2}$: $N_1=\left[\frac{N-1}{2}\right]$ και $N_2=\left[\frac{N-2}{2}\right]$

Μπορούμε να τώρα δούμε ότι εάν $|g|<2/\pi$ μπορούμε να πάρουμε το όριο $N\to\infty$ αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty}(g\pi/2)^{2n}=\frac{1}{1-g^2\pi^2/4}\ ,\ |g|\pi/2<1 \quad (3.26)$$

και να αναπαραγάγουμε το ακριβές αποτέλεσμα (Εξ.(2.19)).
Επομένως, η διαφορά

$$R_N(\theta)=\varphi(\theta)-\varphi_N(\theta)=O\left(g^{N+1}\right) \quad (3.27)$$

γίνεται ολοένα και μικρότερη καθώς το πλήθος των όρων, N , αυξάνει και μηδενίζεται στο όριο $N\to\infty$. Σε ένα πιο πρακτικό επίπεδο, η ανάλυση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στη σχέση (3.24) κρατήσουμε μόνο τον πρώτο όρο το λάθος που κάνουμε είναι

$$\delta\varphi \le 2g\cos\theta\left(\frac{g\pi}{2}\right)^{2(N_1+1)} + g^2\sin\theta\left(\frac{g\pi}{2}\right)^{2(N_2+1)} \tag{3.28}$$

Μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε στη γενική διαχείριση του προβλήματος (3.6) ή (3.17) και να τη δούμε και από μια διαφορετική οπτική:

$$\left(1-g\hat{K}\right)|\varphi\rangle = |f\rangle \tag{3.29}$$

Ας υποθέσουμε ότι ο τελεστής $\hat{K}$ έχει όλες τις καλές ιδιότητες (συμπαγής, αυτοσυζυγής)) που χρειάζονται ώστε να γράψουμε (βλέπε Εξ. (2.25)):

$$\hat{K} = \sum_n k_n |n\rangle\langle n| \tag{3.30}$$

Στην περίπτωση αυτή η Εξ.(3.29) παίρνει τη μορφή :

$$\left(1-gk_n\right)\langle n|\varphi\rangle = \langle n|f\rangle \tag{3.31}$$

Αν δεν υπάρχει καμία ιδιοτιμή για την οποία $gk_n = 1$ βρίσκουμε

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{1-g\hat{K}}|f\rangle = \sum_n \frac{1}{1-gk_n}|n\rangle\langle n|f\rangle \tag{3.32}$$

Αν συγκρίνουμε την τελευταία με την Εξ. (3.18) η οποία προέκυψε με την επαναληπτική διαδικασία βλέπουμε ότι:

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{N} g^n k^n |n\rangle\langle n|f\rangle + O\left(g^{N+1}\right) = \sum_n \frac{1}{1-gk_n}|n\rangle\langle n|f\rangle \tag{3.33}$$

Επομένως

$$\left[\sum_{\nu=0}^{N}\left(gk_n\right)^{\nu} - \sum_n \frac{1}{1-gk_n}\right]\tilde{f}_n u_n(x) = R_N(x) \tag{3.34}$$

όπου $\tilde{f}_n = \int_V dx\, f(x) u_n^*(x)$.

Είναι τώρα προφανές ότι προκειμένου να ισχύει η σχέση (3.19) πρέπει και αρκεί η μεγαλύτερη από τις ιδιοτιμές του τελεστή $\hat{K}$ να είναι τέτοια ώστε $k_{\max} < 1/|g|$. Η συνθήκη αυτή σημαίνει ότι $\left\|g\hat{K}\right\| < 1$ (Δες Παράρτημα Α).

Επομένως, για τελεστές οι οποίοι είναι συμπαγείς και αυτοσυζυγείς, στη σχέση (3.18) (ή στην (3.8) αφού η λογική είναι η ίδια) η συνθήκη $\left\|g\hat{K}\right\|<1$ είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε κρατώντας ένα πεπερασμένο πλήθος όρων να έχουμε μια καλή εκτίμηση του αποτελέσματος, τόσο καλύτερη όσο περισσότερους όρους κρατάμε.

Είναι προφανές ότι εάν επαναλάβουμε τα ίδια βήματα για την Εξ. (3.6) θα καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα.
Στο σημείο αυτό μπορούν να υπάρξουν ενστάσεις για την περίπτωση που ο πυρήνας του ολοκληρωτικού τελεστή έχει τη μορφή που φαίνεται στην Εξ. (3.5). Ο λόγος είναι ότι ένας αυτοσυζυγής τελεστής θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε $K(x,x')=K^{*}(x',x)$.Το πρόβλημα αυτό, σε ορισμένες περιπτώσεις τουλάχιστον, μπορούμε να το διαχειριστούμε:

Εάν γυρίσουμε στην Εξ. (3.6)

$$\hat{G}=\hat{G}^{(0)}+g\hat{G}^{(0)}\hat{V}\hat{G} \tag{3.35}$$

και ορίσουμε τους τελεστές

$$\hat{G}'=\sqrt{\hat{V}}\hat{G}\ ,\ \hat{G}'^{(0)}=\sqrt{\hat{V}}\hat{G}^{(0)}\ \text{και}\ \hat{K}'=\sqrt{\hat{V}}\hat{G}^{(0)}\sqrt{\hat{V}} \tag{3.36}$$

η Εξ. (3.35) γράφεται:

$$\hat{G}'=\hat{G}'^{(0)}+g\hat{K}'\hat{G}' \tag{3.37}$$

Ο πυρήνας του νέου ολοκληρωτικού τελεστή είναι

$$K'(x,x')=\sqrt{V(x)}G^{(0)}(x,x')\sqrt{V(x')} \tag{3.38}$$

Εάν η συνάρτηση $V(x)$ είναι μη αρνητική στην περιοχή ολοκλήρωσης και ο διαφορικός τελεστής στον οποίο αντιστοιχεί η συνάρτηση $G^{(0)}(x,x')$ είναι αυτοσυζυγής τότε

$$K'(x,x')=K'^{*}(x',x) \tag{3.39}$$

Σε μια τέτοια περίπτωση η προηγούμενη ανάλυση εξακολουθεί να είναι ισχυρή.

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η συνάρτηση $G^{(0)}(x,x')$, ακόμα και αν αντιστοιχεί σε αυτοσυζυγή διαφορικό τελεστή, είναι δυνατόν να μην ικανοποιεί την απαίτηση $G^{(0)}(x,x')=G^{(0)*}(x',x)$. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν ο χώρος στον οποίο ορίζεται το υπό μελέτη σύστημα, είναι απεριόριστος. Στην περίπτωση αυτή είναι απαραίτητη μια οριακή διαδικασία για τον ορισμό της συνάρτησης Green με την προσθήκη ενός μικρού φανταστικού μέρους στον διαφορικό τελεστή γεγονός που τον κάνει μη αυτοσυζυγή.

Στην περίπτωση αυτή (η οποία είναι ο κανόνας σε προβλήματα σκέδασης) ακόμα και αν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις της προηγούμενης ανάλυσης (ο ολοκληρωτικός τελεστής δεν είναι αυτοσυζυγής), η απαίτηση (3.11) παραμένει ικανή , ώστε η επαναληπτική διαδικασία να οδηγήσει σε αξιόπιστη εκτίμηση της λύσης του προβλήματος.

Παράδειγμα 7.

Στο παράδειγμα αυτό θα συζητήσουμε ένα πρόβλημα κβαντικής μηχανικής το οποίο αφορά σε σκέδαση σε μια χωρική διάσταση. Η εξίσωση Schrödinger που μας ενδιαφέρει είναι:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+gV(x)\right)\varphi(x)=E\varphi(x) \tag{3.40}$$

Στην εξίσωση αυτή η συνάρτηση $V(x)$ περιγράφει τις δυνάμεις που συναντά η εισερχόμενη δέσμη (ας πούμε από τα δεξιά) αρχικά ελευθέρων σωματίων. Η ενέργεια της δέσμης $E>0$ είναι σταθερή επειδή η σκέδαση θεωρείται ελαστική. Με μια προφανή αναδιάταξη των όρων η Εξ. (3.40) γράφεται:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)\varphi(x)=\frac{2m}{\hbar^2}gV(x)\varphi(x)\ ,\ k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E>0 \tag{3.41}$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής μπορεί να γραφεί ως:

$$\varphi(x)=\varphi^{(0)}(x)-\frac{2m}{\hbar^2}g\int_{-\infty}^{\infty}dx'G^{(+)}(x,x')V(x')\varphi(x') \tag{3.42}$$

Στην τελευταία εξίσωση

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)\varphi^{(0)}(x)=0\to\varphi^{(0)}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}dpe^{ipx}\delta\left(p^2-k^2\right)C(p),\ \forall C \tag{3.43}$$

και

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+(k+i\varepsilon)^2\right)G^{(+)}(x,x')=-\delta(x-x')\ ,\ \varepsilon\to+0 \tag{3.44}$$

Η εξίσωση Green (3.44) λύνεται εύκολα:

$$G^{(+)}(x,x')=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2-(k+i\varepsilon)^2}=\frac{i}{2k}e^{ik|x-x'|} \tag{3.45}$$

Ο λόγος για τον οποίο διαλέξαμε την συγκεκριμένη οριακή διαδικασία για να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση Green είναι η φυσική του συστήματος που θέλουμε να περιγράψουμε: Εφόσον η δέσμη των σωματιδίων έρχεται από τα αριστερά περιμένουμε, καθώς $x\to+\infty$, η λύση της Εξ. (3.42) να συμπεριφέρεται ως $\varphi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}e^{ikx}$. Η ίδια φυσική μας οδηγεί να διαλέξουμε και την λύση της ομογενούς ως $\varphi_0(x)\sim e^{ikx}$.

Έτσι, η αρχική Εξ.(3.40) παίρνει τη μορφή:

$$\varphi(x) = Ae^{ikx} - \frac{im}{\hbar^2 k} g \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ik|x-x'|} V(x') \varphi(x') \tag{3.46}$$

Ο πυρήνας της τελευταίας ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$K(x, x') = e^{ik|x-x'|} V(x') \tag{3.47}$$

δεν είναι αυτοσυζυγής αφού $K^*(x', x) = e^{-ik|x-x'|} V(x) \neq K(x, x')$ αλλά ούτε και τετραγωνικά ολοκληρώσιμος αφού

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left| K(x, x') \right|^2 = (2\infty) \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| V(x) \right|^2 \tag{3.48}$$

Μπορούμε όμως να διαπιστώσουμε ότι ο ολοκληρωτικός τελεστής είναι φραγμένος αρκεί $\int_{-\infty}^{\infty} dx \left| V(x) \right| < \infty$.

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{K} | f \rangle &= (\hat{K} f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x, x') f(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ik|x-x'|} V(x') f(x') \\ \Rightarrow \left\| \hat{K} f \right\|_{\infty} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| V(x) \right| \left| f(x) \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \left| V(x) \right| \right) \| f \|_{\infty} \underset{\| f \|_{\infty} = 1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| V(x) \right| \end{aligned} \tag{3.49}$$

Επομένως ο ολοκληρωτικός τελεστής είναι φραγμένος εάν η εμβέλεια του δυναμικού είναι πεπερασμένη. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή τη φυσική απαίτηση, βλέπουμε ότι ο απειρισμός στην Εξ. (3.48) είναι τεχνητός: Στην πραγματικότητα τα όρια της ολοκλήρωσης δεν μπορούν να εκτείνονται έως το άπειρο.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε το εξής. Πολλές φορές, και πάντα σε προβλήματα σκέδασης, η περιοχή της ολοκλήρωσης είναι μη συμπαγής: $(-\infty, \infty)$. Αυτό είναι περισσότερο τεχνικό παρά φυσικό πρόβλημα. Μπορούμε να σκεφτούμε (τουλάχιστον σε μη σχετικιστικά προβλήματα) μια οριακή διαδικασία στην οποία το πρόβλημά μας ορίζεται, αρχικά, σε μια κλειστή περιοχή $x \in [-L, L]$ και μετά το πέρας των υπολογισμών παίρνουμε το όριο $L \to \infty$.

Μετά από αυτά καταλήγουμε ότι η προσέγγιση της λύσης με διαδοχικές επαναλήψεις μπορεί να προχωρήσει αρκεί

$$\left| \frac{mg}{\hbar^2 k} \right| \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| V(x) \right| < 1 \tag{3.50}$$

Για να ελέγξουμε τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να εξετάσουμε μια περίπτωση την οποία μπορούμε να λύσουμε ακριβώς:

$$V(x)=\delta(x)\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}dx\left|V(x)\right|=1 \tag{3.51}$$

Στην περίπτωση αυτή η Εξ.(3.39) μπορεί να λυθεί εύκολα:

$$\varphi(x)=Ae^{ikx}-\frac{im}{\hbar^2 k}ge^{ik|x|}\varphi(0)\to\varphi(x)=A\left(e^{ikx}-\frac{i\lambda}{1+i\lambda}e^{ik|x|}\right)\ ,\ \lambda=\frac{mg}{\hbar^2 k} \tag{3.52}$$

Αν προσπαθήσουμε να λύσουμε την Εξ. (3.41) με επαναληπτικές προσεγγίσεις βρίσκουμε:

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{N}(-i\lambda)^n\int_{-\infty}^{\infty}dx'e^{ik|x-x'|}V(x')\varphi_n(x')+O\left(\lambda^{N+1}\right) \tag{3.53}$$

όπου

$$\varphi_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}dx'e^{ik|x-x'|}V(x')\varphi_{n-1}(x')\ ,\ \varphi_0(x)=Ae^{ikx} \tag{3.54}$$

Λόγω της πολύ απλής μορφής του δυναμικού βρίσκουμε αμέσως ότι:

$$\varphi(x)=Ae^{ikx}+\sum_{n=1}^{N}(-i\lambda)^n Ae^{ik|x|}+O\left(\lambda^{N+1}\right) \tag{3.55}$$

Επομένως στην περιοχή $|\lambda|=\left|\frac{mg}{\hbar^2 k}\right|<1$ αναπαράγεται το ακριβές αποτέλεσμα.

Για να συνδεθούμε με γνωστά αποτελέσματα μπορούμε να δούμε ότι η λύση (3.52) μας οδηγεί στο συμπέρασμα:

$$\varphi(x)\underset{x\to\infty}{=}\frac{A}{1+i\lambda}e^{ikx}\ ,\ \varphi(x)\underset{x\to-\infty}{=}A\left(e^{ikx}-\frac{i\lambda}{1+i\lambda}e^{-ikx}\right) \tag{3.56}$$

Αμέσως βρίσκονται οι συντελεστές ανάκλασης και διέλευσης:

$$R=\frac{|J_R|}{|J_I|}=\frac{|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}\ ,\ T=\frac{|J_T|}{|J_I|}=\frac{1}{1+|\lambda|^2}\ ,\ \lambda=\frac{mg}{\hbar^2 k} \tag{3.57}$$

Πρόβλημα 7.

Να επαναλάβετε το Πρόβλημα 1 λύνοντας τις εξισώσεις μέσω επαναληπτικών προσεγγίσεων.

4. Αναλυτική Συνέχιση-Σειρά Fredholm.

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια τεχνική μέσω της οποίας μπορούμε να επεκτείνουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα πέραν των ορίων που επιβάλει η δέσμευση $\left\|g\hat{K}\right\|<1$ για την ισχύ των επαναληπτικών προσεγγίσεων που ήδη παρουσιάσαμε. Η τεχνική αυτή είναι η βάση για την ακριβή επίλυση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης.

Η αρχική ιδέα μπορεί να αναζητηθεί στη σχέση

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ , \ |z|<1 \tag{4.1}$$

Είναι προφανές ότι το αριστερό μέρος της τελευταίας σχέσης η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το σημείο $z=1$ όπου έχει πόλο πρώτης τάξης. Από την άλλη πλευρά η συνάρτηση $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ορίζεται μόνο στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=1$. Μπορούμε, έτσι, να πούμε ότι η συνάρτηση $f_1(z)$ αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $f(z)$ στην περιοχή $|z|<1$.

Μπορούμε, τώρα, να γράψουμε

$$f(z)=\frac{1}{1-i/2-(z-i/2)}=\frac{1}{1-i/2}\frac{1}{1-\dfrac{z-i/2}{1-i/2}} \tag{4.2}$$

Έτσι, στην περιοχή

$$\left|\frac{z-i/2}{1-i/2}\right|<1 \to |z-i/2|<\sqrt{5}/2 \tag{4.3}$$

η συνάρτηση $f(z)$ αντιπροσωπεύεται από τη συνάρτηση:

$$f_2(z)=\frac{1}{1-i/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i/2}{1-i/2}\right)^n \tag{4.4}$$

Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι διαφορετικές μεταξύ τους αφού ορίζονται σε διαφορετικές περιοχές του μιγαδικού επιπέδου D_1 και D_2. Υπάρχει , βέβαια, μια περιοχή $D_1 \cup D_2 \neq \varnothing$ η οποία είναι κοινή και όπου οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται: $f_1 = f_2$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα λέμε ότι η μία συνάρτηση είναι αναλυτική συνέχιση της άλλης. Γενικεύοντας, θα λέμε ότι οι συναρτήσεις f_1, f_2 αποτελούν η μία **αναλυτική συνέχιση** της άλλης εάν:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) \ , \ z \in D_1 \\ f_2(z) \ , \ z \in D_2 \end{cases} \quad \tilde{D} = D_1 \cap D_2 \neq \varnothing \ ; \ f_1(z) = f_2(z) \ , \ z \in \tilde{D} \tag{4.5}$$

Η συνάρτηση $f(z)$ δεν είναι κατ' ανάγκη γνωστή και αυτό είναι που κάνει ιδιαίτερα χρήσιμη την ιδέα της αναλυτικής συνέχισης. Στο προηγούμενο απλό παράδειγμα η συνάρτηση f_2 και επομένως, η αναλυτική συνέχιση της f_1 μπορεί να επιτευχθεί εύκολα αρκεί να αναπτύξουμε την τελευταία κατά Taylor γύρω από το σημείο $z_0 = i/2$ το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της:

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(i/2)(z - i/2)^n \tag{4.6}$$

Αυτή η τεχνική αναλυτικής συνέχισης παρότι μπορεί να εφαρμοσθεί σε πολλές περιπτώσεις, δεν είναι πάντα και η πλέον οικονομική. Έτσι, έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές για διάφορες περιπτώσεις. Μια από τις πιο γνωστές αφορά στην συνάρτηση γάμμα:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t} \tag{4.7}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται μόνο όταν $\operatorname{Re} z > 0$. Όταν η παράμετρος z είναι κάποιος μη αρνητικός ακέραιος $\Gamma(n) = (n-1)!$ Η συνάρτηση γάμμα μπορεί να επεκταθεί σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εάν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ την οποία μπορούμε να ελέγξουμε αμέσως από την Εξ. (4.7). Έτσι γράφουμε:

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t} & \operatorname{Re} z > 0 \\ \Gamma(z+1)/z = \Gamma(z+2)/z(z+1) = \ldots & z \neq 0, -1, -2, \ldots \end{cases} \tag{4.8}$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε ορίσουμε τη συνάρτηση γάμμα σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από τους μη θετικούς ακεραίους όπου υπάρχουν πόλοι πρώτης τάξης. Για παράδειγμα: $\Gamma(-1/2) = -2\Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi}$.

Ο λόγος για αυτήν την μακρά εισαγωγή είναι διότι θέλουμε να επεκτείνουμε αναλυτικά τη σχέση

$$\frac{1}{1-g\hat{K}}=\sum_{n=0}^{\infty}g^n\hat{K}^n \tag{4.9}$$

πέραν των ορίων που επιβάλει η απαίτηση $\left\|g\hat{K}\right\|<1$. Η τεχνική που θα ακολουθήσουμε έχει χρησιμοποιηθεί πρώτα από τον Helmholtz [4] αλλά εδώ θα παρουσιάσουμε την εκδοχή που παρουσιάζεται στην αναφορά [1].
Το πρώτο βήμα για την τεχνική αυτή ξεκινάει από την ταυτότητα

$$\frac{1}{1-g\hat{K}}=\frac{1}{D(g)}\frac{D(g)}{1-g\hat{K}}\ ,\ D(g)\equiv\det\left(1-g\hat{K}\right) \tag{4.10}$$

Η ορίζουσα $D(g)$ είναι γνωστή ως **ορίζουσα του Helmholtz.** Πριν προχωρήσουμε πρέπει να διευκρινίσουμε ότι η ορίζουσα $\det\left(1-g\hat{K}\right)$ μπορεί να ορισθεί και έχει νόημα για την κλάση (trace-class operators) των συμπαγών τελεστών $\hat{K}$ για τους οποίους το ίχνος $Tr\hat{K}\equiv\sum_n\langle e_n|\hat{K}|e_n\rangle$ είναι ανεξάρτητο της βάσης $\{|e_n\rangle\}$ και επιπλέον

$$Tr\left|\hat{K}\right|=Tr\sqrt{\hat{K}^{\dagger}\hat{K}}=Tr\sqrt{\hat{K}\hat{K}^{\dagger}}<\infty \tag{4.11}$$

Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.10) μπορεί να γίνει κατανοητός εάν θεωρήσουμε ότι ο τελεστής $\hat{K}$ είναι αυτοσυζυγής και συμπαγής. Σε μια τέτοια περίπτωση μπορούμε να γράψουμε (βλ. Εξ. (3.31)):

$$\frac{1}{1-g\hat{K}}=\sum_n\frac{1}{1-gk_n}|n\rangle\langle n| \tag{4.12}$$

Είναι προφανές ότι ο τελεστής $1-g\hat{K}$ είναι αντιστρέψιμος εάν δεν υπάρχει καμία ιδιοτιμή τέτοια ώστε $gk_n=1$. Ακριβώς αυτά τα σημεία $g=1/k_n$ είναι μηδενικά της συνάρτησης $D(g)=\prod_n(1-gk_n)$.

Επομένως η έκφραση

$$\hat{B}(g)=\frac{D(g)}{1-g\hat{K}} \tag{4.13}$$

είναι ολόμορφη συνάρτηση του g και επομένως μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά ως προς g:

$$\hat{B}(g)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^n}{n!}\frac{d^n}{dg^n}\hat{B}(g)\bigg|_{g=0}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^n}{n!}\hat{B}^{(n)}(0) \tag{4.14}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε ακόμα και εάν ο ολοκληρωτικός τελεστής είναι απλώς συμπαγής (γεγονός που συμβαίνει σχεδόν πάντα σε μια ολοκληρωτική εξίσωση) και όχι αυτοσυζυγής.

Εάν στην σειρά (4.14) επενέβαιναν μόνο αριθμοί αυτή θα συνέκλινε για κάθε πεπερασμένη τιμή του g . Στην συγκεκριμένη περίπτωση η ανάλυση πρέπει να είναι πιο προσεκτική αλλά, ήδη, διαφαίνεται η δυνατότητα να συγκλίνει ακόμα και έξω από την περιοχή $\left\|g\hat{K}\right\|<1$. Η συνάρτηση $D(g)$ είναι και αυτή παντού στο πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο του g , αναλυτική συνάρτηση και επομένως:

$$D(g)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^n}{n!}\frac{d^n}{dg^n}D(g)\bigg|_{g=0}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^n}{n!}D^{(n)}(0) \qquad (4.15)$$

Οι συντελεστές στη σχέση αυτή μπορούν να βρεθούν σχετικά εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα (η οποία ισχύει όταν $\ker\left(1-g\hat{K}\right)=\varnothing$):

$$D(g)=\exp Tr\ln\left(1-g\hat{K}\right)=\exp\left(-\int_0^g d\tilde{g}Tr\,\frac{\hat{K}}{1-\tilde{g}\hat{K}}\right) \qquad (4.16)$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&D(0)=1,\;\; D^{(1)}(0)=-Tr\hat{K},\;\; D^{(2)}(0)=\left(Tr\hat{K}\right)^2-Tr\hat{K}^2,\\
&D^{(3)}(0)=-2Tr\hat{K}^3+3\left(Tr\hat{K}\right)\left(Tr\hat{K}^2\right)-\left(Tr\hat{K}\right)^3,\\
&D^{(4)}(0)=-6Tr\hat{K}^4+8\left(Tr\hat{K}\right)\left(Tr\hat{K}^3\right)-6\left(Tr\hat{K}^2\right)\left(Tr\hat{K}\right)^2+3\left(Tr\hat{K}^2\right)^2+\left(Tr\hat{K}\right)^4,\\
&.......
\end{aligned} \qquad (4.17)$$

Υπάρχει ένας γενικός τύπος μέσω του οποίου υπολογίζονται οι συντελεστές στο ανάπτυγμα (4.14) :

$$D^{(n)}(0)=-\det\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & . & . & . & t_1\\
t_1 & 2 & 0 & . & . & . & t_2\\
t_2 & t_1 & 3 & . & . & . & t_3\\
. & t_2 & t_1 & . & . & . & t_4\\
. & . & t_2 & . & . & . & t_5\\
. & . & . & . & . & . & .\\
t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & . & . & . & t_n
\end{pmatrix},\quad t_n\equiv Tr\hat{K}^n \qquad (4.18)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η $D(g)$ (Παράρτημα Α) είναι μια ολόμορφη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι

$$\left|D(g)\right| \le \exp\left[Tr\left|g\hat{K}\right|\right] \tag{4.19}$$

Επομένως, η σειρά (4.14) συγκλίνει για ολοκληρωτικούς τελεστές για τους οποίους

$$Tr\left|g\hat{K}\right| < \infty \tag{4.20}$$

Τους συντελεστές στο ανάπτυγμα (4.14) μπορούμε να τους βρούμε από την Εξ. (4.13)

$$\left(1 - g\hat{K}\right)\hat{B}(g) = D(g)$$

από την οποία μπορούμε να καταλήξουμε σε μια αναγωγική σχέση:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[g^n B^{(n)}(0) - g^{n+1}\hat{K}B^{(n)}(0)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}g^n D^{(n)}(0) \tag{4.21}$$

Από αυτήν βρίσκουμε αμέσως ότι $B^{(0)}(0) = D^{(0)}(0) = 1$ και ότι

$$B^{(n)}(0) - n\hat{K}B^{(n-1)}(0) = D^{(n)}(0)\ , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.22}$$

Οι συντελεστές αυτοί μπορούν επιτευχθούν μέσω της ορίζουσας (4.17) μέσω της αντικατάστασης

$$Tr\hat{K}^n \to Tr\hat{K}^n - \hat{K}^n\ ,\ t_n \to t_n - \hat{K}^n \tag{4.23}$$

Έτσι βρίσκουμε:

$$\begin{gathered}\hat{B}^{(1)}(0) = \hat{K} - \left(Tr\hat{K}\right)\hat{I},\ \ B^{(2)}(0) = 2\hat{K}^2 - 2\left(Tr\hat{K}\right)\hat{K} + \left[\left(Tr\hat{K}\right)^2 - Tr\hat{K}^2\right]\hat{I}, \\ \hat{B}^{(3)}(0) = 6\hat{K}^3 - 6\hat{K}^2\left(Tr\hat{K}\right) + 3\left[\left(Tr\hat{K}\right)^2 - Tr\hat{K}^2\right]\hat{K} - \left[2Tr\hat{K}^3 - 3\left(Tr\hat{K}^2\right)\left(Tr\hat{K}\right) + \left(Tr\hat{K}\right)^3\right]\hat{I}, \\ \ldots\ldots\end{gathered} \tag{4.24}$$

Μαζεύοντας τα αποτελέσματα μπορούμε να γράψουμε τη λύση της Εξ. (3.29) (και αντίστοιχα της (3.14)):

$$\left|\varphi\right\rangle = \frac{1}{1-g\hat{K}}\left| f\right\rangle = \left| f\right\rangle + \frac{g\hat{K}}{1-g\hat{K}}\left| f\right\rangle = \left| f\right\rangle + \frac{1}{D(g)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}g^{n+1}\hat{K}\hat{B}_n(0)\left| f\right\rangle \qquad (4.25)$$

Όπως μπορεί να αποδειχθεί (Παράρτημα Α) η σειρά στην τελευταία εξίσωση συγκλίνει εάν ισχύει η δέσμευση (4.20).

Το συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από την ανάλυση του τελευταίου εδαφίου είναι ότι, κάτω από αρκετά γενικούς όρους, μια ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί να λυθεί ακριβώς έστω και εάν λύση παρουσιάζεται μέσω μια συγκλίνουσας σειράς. Προφανώς, η πρακτικότητα της λύσης (4.25) συναρτάται με το πλήθος των όρων οι οποίοι είναι αναγκαίοι ώστε να έχουμε μια αρκετά καλή εκτίμηση του ακριβούς αποτελέσματος.

Παράδειγμα 8.

Εδώ θα εξετάσουμε, και πάλι, το παράδειγμα 7 αλλά υπό την οπτική της τελευταίας παραγράφου.
Η εξίσωση που μας ενδιαφέρει είναι η (3.46):

$$\varphi(x) = Ae^{ikx} - \frac{im}{\hbar^2 k} g\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ik|x-x'|} V(x')\varphi(x')$$

Εάν υποθέσουμε ότι η εμβέλεια του δυναμικού δεν είναι άπειρη (όπως είναι η φυσική πραγματικότητα) θα έχουμε ότι:

$$\left|Tr\hat{K}\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} dx V(x)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} dx \left|V(x) < \infty\right| \qquad (4.26)$$

Επομένως η σειρά Fredholm συγκλίνει και το πρόβλημα μπορεί να λυθεί ακριβώς.
Ως μια πρώτη εφαρμογή μπορούμε να δούμε την περίπτωση μπορούμε να εξετάσουμε το δυναμικό $V(x) = \delta(x)$. Στην περίπτωση αυτή:

$$Tr\hat{K} = \int_{-\infty}^{\infty} dx K(x,x) = 1\ ,\ Tr\hat{K}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 K(x_2,x_1) K(x_1,x_2) = 1,...,$$
$$Tr\hat{K}^n = \int_{-\infty}^{\infty} dx_n ... \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 K(x_n,x_{n-1}) ... K(x_1,x_n) = 1` \qquad (4.27)$$

Έτσι, βρίσκουμε:

$$D^{(n)}(0) = 0 \text{ για } n \ge 2 \to D(g) = 1 + \frac{im}{\hbar k} g = 1 + i\lambda$$
$$\left\langle x\right|\hat{K}^n\left| f\right\rangle = e^{ik|x|} f(0) \quad \forall n \ge 1 \qquad (4.28)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (4.25) για $\left\langle x\right| f\left.\right\rangle = Ae^{ikx}$ θα πάρουμε το ακριβές αποτέλεσμα:

$$\varphi(x) = A\left(e^{ikx} - \frac{i\lambda}{1+i\lambda} e^{ik|x|}\right) \ , \ \lambda = \frac{mg}{\hbar^2 k}$$

Παράρτημα Α

Στο Παράρτημα αυτό θα παρουσιάσουμε περισσότερο συστηματικά κάποιες έννοιες που έχουμε χρησιμοποιήσει στο κυρίως κείμενο και θα δείξουμε ότι οι γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις, υπό πολύ γενικούς περιορισμούς, μπορούν να λυθούν ακριβώς (προφανώς, για μια πλήρη μελέτη κάποιος πρέπει να αναφερθεί στη σχετική βιβλιογραφία).

1. Στις σημειώσεις αυτές αναφερόμαστε σε ολοκληρωτικές εξισώσεις στις οποίες οι συναρτήσεις που εμπλέκονται είναι συνεχείς. Όταν αυτές ορίζονται σε κάποιον συμπαγή χώρο V (π.χ. στο κλειστό διάστημα $[x_a, x_b]$) δεν είναι απλά συνεχείς αλλά **ομοιόμορφα συνεχείς:**

$$\left|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\right|_{|x_1 - x_2| \to 0} \to 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in V \qquad \text{(A.1)}$$

Οι χώροι των συναρτήσεων X που μας ενδιαφέρουν είναι αυτοί στους οποίους μπορούμε να ορίσουμε απόσταση ή, ισοδύναμα, αυτοί οι οποίοι είναι εφοδιασμένοι με κάποια **norm** $\|\varphi\|$. Η έννοια της norm (ή του μέτρου) ορίζεται μέσω κάποιων βασικών απαιτήσεων όπως οι :

$$\|\varphi_1 + \varphi_2\| \le \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\| \ \ , \ \ \|\lambda\varphi\| = |\lambda|\|\varphi\| \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \ , \ \ \|\varphi\| = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

(A.2)

Υπάρχουν περισσότερες από μία norms οι οποίες είναι συμβατές με τις απαιτήσεις αυτές. Η συνήθης, για έναν χώρο συναρτήσεων, norm είναι η λεγόμενη supremum norm:

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\left\{|\varphi(x)|; x \in V\right\} \qquad \text{(A.3)}$$

Εάν οι συναρτήσεις αντιπροσωπεύουν στοιχεία ενός χώρου Hilbert μπορούμε να ορίσουμε και την λεγόμενη Euclidean norm

$$\|\varphi\|_2 = \left[\int_V dx |\varphi|^2\right]^{1/2} \qquad \text{(A.4)}$$

για την οποία μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι $\|\varphi\|_\infty \le \|\varphi\|_2$. Στο κυρίως κείμενο δεν χρησιμοποιούμε κάποιον δείκτη για την norm στον βαθμό που ό,τι γράφεται δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη norm. Όπου είναι αναγκαίο, διευκρινίζουμε σε ποια αναφερόμαστε.
Σημαντική έννοια στην θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι αυτή του **συμπαγούς συνόλου** συναρτήσεων. Όταν ο χώρος των συναρτήσεων $\left(X,\|\ldots\|\right)$ στον οποίο αναφερόμαστε είναι πεπερασμένων διαστάσεων, $\dim\left(X\right)<\infty$, ένα σύνολο $A\subseteq X$ είναι συμπαγές εάν είναι φραγμένο και κλειστό. Αυτό ισχύει και αντίστροφα: Σε χώρους πεπερασμένων διαστάσεων ένα φραγμένο και κλειστό σύνολο είναι και συμπαγές. Αυτό, όμως, δεν ισχύει όταν ο χώρος στον οποίο αναφερόμαστε είναι απείρων διαστάσεων. Στην περίπτωση αυτή ο ορισμός ενός συμπαγούς συνόλου είναι ο ακόλουθος:

Ένα σύνολο $A\subseteq X$ λέγεται συμπαγές εάν για κάθε ακολουθία στοιχείων του $\left(x_n\right)_{n\in N}\in A$ μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία $\left(x_{n_k}\right)_{k\in N}$ η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του A: $\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k}\right)_{k\in N}=\tilde{x}\in A$. Με τον ορισμό αυτό μπορεί κανείς εύκολα να αποδείξει ότι **ένα συμπαγές σύνολο είναι κλειστό και φραγμένο.**

Υπάρχει ένα ιδιαίτερα χρήσιμο θεώρημα, αυτό των **Arzela-Ascoli**, το οποίο βοηθά πολύ στον χαρακτηρισμό της συμπαγότητας σε ένα χώρο συναρτήσεων και το οποίο βεβαιώνει ότι ένα σύνολο $A\subseteq X$ στοιχείων αυτού του χώρου είναι συμπαγές εάν είναι **κλειστό**, **φραγμένο** και οι συναρτήσεις που το απαρτίζουν είναι **ομοιόμορφα συνεχείς** :

$$\left\|\varphi\left(x\right)-\varphi\left(x'\right)\right\| \underset{|x-x'|\to 0}{\to} 0 \quad \forall\varphi\in A \tag{A.4}$$

2. Ορίζουμε έναν **γραμμικό ολοκληρωτικό τελεστή** $\hat{K}$, μέσω της σχέσης

$$\left(\hat{K}\varphi\right)\left(x\right)=\int_V dx' K\left(x,x'\right)\varphi\left(x'\right) \tag{A.5}$$

Είναι πολύ βολικό (και το κάνουμε στις σημειώσεις αυτές) να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό Dirac:

$$\varphi\left(x\right)=\left\langle x|\varphi\right\rangle\ ,\ \left\langle\varphi|\varphi\right\rangle=\int_V dx\left|\varphi\right|^2=\|\varphi\|_2<\infty\ ,\ \hat{K}=\int_V dx\int_V dx'\left|x\right\rangle K\left(x,x'\right)\left\langle x'\right| \tag{A.6}$$

Με τον συμβολισμό αυτόν οι Εξ. (2.1) και (3.4) παίρνουν τη μορφή:

$$\left|\varphi\right\rangle=\left|f\right\rangle+g\hat{K}\left|\varphi\right\rangle\to\left(1-g\hat{K}\right)\left|\varphi\right\rangle=\left|f\right\rangle \tag{A.7}$$

και

$$\hat{G}=\hat{G}_0+g\hat{K}\hat{G}\to\left(1-g\hat{K}\right)\hat{G}=\hat{G}_0 \tag{A.8}$$

Ο συζυγής ενός ολοκληρωτικού τελεστή ορίζεται μέσω του συζυγούς πυρήνα:

$$\langle x|\hat{K}^{\dagger}|x'\rangle = \langle x'|\hat{K}|x\rangle^{*} = K^{*}(x,x') \qquad (A.9)$$

Λέμε έναν τελεστή **αυτοσυζυγή** εάν:

$$\hat{K} = \hat{K}^{\dagger} \to \langle x|\hat{K}|x'\rangle = \langle x'|\hat{K}|x\rangle^{*} \to K(x,x') = K^{*}(x',x) \qquad (A.10)$$

Η norm ενός τελεστή ορίζεται ως:

$$\left\|\hat{K}\right\| = \sup\left\{\left\|\hat{K}\varphi\right\| : \|\varphi\| = 1 \,,\ \varphi \in X\right\} \qquad (A.11)$$

Οι τελεστές $\hat{K}$ για τους οποίους συζητάμε είναι **φραγμένοι**: $\left\|\hat{K}\right\| < \infty$.
Αυτό σημαίνει ότι η δράση τους σε κάποια φραγμένη συνάρτηση $\varphi(x)$ παράγει συναρτήσεις $\tilde{\varphi}(x) = (\hat{K}\varphi)(x)$ οι οποίες είναι επίσης φραγμένες:

$$\left\|\hat{K}\varphi\right\| = \|\tilde{\varphi}\| \le \left\|\hat{K}\right\|\|\varphi\| < \infty \qquad (A.12)$$

Εάν η δράση ενός (ολοκληρωτικού) τελεστή σε μια συνεχή συνάρτηση παράγει συνεχή συνάρτηση ο τελεστής λέγεται **συνεχής.** Αυτό σημαίνει ότι ο αντίστοιχος ολοκληρωτικός πυρήνας $K(x,x')$ είναι συνεχής συνάρτηση των μεταβλητών του. Εάν το πεδίο ορισμού του είναι συμπαγές, ο πυρήνας είναι **ομοιόμορφα συνεχής**.

$$\left\|K(x,x') - K(y,y')\right\| \to 0 \ \ \forall \left\|(x-x') - (y-y')\right\|_2 \to 0 \qquad (A.13)$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ένας φραγμένος τελεστής είναι συνεχής και αντίστροφα.

Στη θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων έχουν ιδιαίτερη θέση οι τελεστές οι οποίοι είναι συμπαγείς. Είναι, σχεδόν αυτονόητος ο ορισμός του συμπαγούς τελεστή:
Θα λέμε ένα τελεστή **συμπαγή** όταν η δράση του σε ένα φραγμένο σύνολο συναρτήσεων $A \subseteq X$ παράγει ένα συμπαγές σύνολο συναρτήσεων $K(A) \subseteq X$.
Μπορούμε να δείξουμε ότι σε μια τυπική ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm:

$$\varphi(x) = f(x) + g\int_{x_a}^{x_b} dx' K(x,x')\varphi(x') \qquad (A.14)$$

ο αντίστοιχος ολοκληρωτικός τελεστής είναι **συμπαγής.**

Πριν από αυτό, να παρατηρήσουμε ότι στην Εξ.(A.14) η μεταβλητή x κινείται στο κλειστό (συμπαγές) διάστημα $[x_a, x_b]$. Αυτό δεν είναι πάντα έτσι αφού υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα όρια της ολοκλήρωσης εκτείνονται έως το άπειρο όπως, για παράδειγμα, συμβαίνει σε προβλήματα σκέδασης. Όπως είχαμε σχολιάσει στο παράδειγμα 7, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τέτοιου τύπου προβλήματα με την μεταβλητή να κινείται σε ένα συμπαγές διάστημα $\left[-L,L\right]$ θεωρώντας ότι η απόσταση L, συγκρινόμενη με τα υπόλοιπα διαστατά μεγέθη του προβλήματος , θεωρείται πολύ μεγάλη: $L\to\infty$.

Στις σημειώσεις μας θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις φ (και f) είναι συνεχείς. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και η συνάρτηση $\tilde{\varphi}(x)=\int\limits_{x_a}^{x_b} dx' K(x,x')\varphi(x')$ είναι συνεχής.

Πράγματι, μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι :

$$\left\|\tilde{\varphi}(x_1)-\tilde{\varphi}(x_2)\right\|=\left\|\int\limits_{x_a}^{x_b} dx'\left[K(x_1,x')-K(x_2,x')\right]\right\|\varphi(x')\le\int\limits_{x_a}^{x_b} dx'\left\|K(x_1,x')-K(x_2,x')\right\|\left\|\varphi\right\| \tag{A.15}$$

Ο ολοκληρωτικός πυρήνας είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση (δες Εξ. (Α.13)) και αφού η συνάρτηση φ είναι φραγμένη, $\left\|\varphi\right\|=M<\infty$, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

$$\left\|\tilde{\varphi}(x_1)-\tilde{\varphi}(x_2)\right\|\le M\int\limits_{x_a}^{x_b} dx'\left\|K(x_1,x')-K(x_2,x')\right\| \tag{A.16}$$

Λόγω της Εξ. (Α.13) και του γεγονότος ότι η ολοκλήρωση είναι σε ένα συμπαγές διάστημα βγάζουμε το συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις που παράγονται από τη δράση του ολοκληρωτικού τελεστή δεν είναι απλώς συνεχείς αλλά ομοιόμορφα συνεχείς:

$$\left\|\tilde{\varphi}(x_1)-\tilde{\varphi}(x_2)\right\|\to 0 \quad \forall\left|x_1-x_2\right|\to 0 \tag{A.17}$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε αμέσως ότι οι συναρτήσεις $\tilde{\varphi}$ είναι φραγμένες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο ολοκληρωτικός τελεστής είναι φραγμένος:

$$\left\|\tilde{\varphi}\right\|\le\int\limits_{x_a}^{x_b} dx'\left\|K(x,x')\right\|\le(x_b-x_a)\left\|K\right\|<\infty \tag{A.18}$$

Έτσι, το σύνολο $K(A)$ των συναρτήσεων που παράγονται από τη δράση ενός ολοκληρωτικού τελεστή σε ένα φραγμένο σύνολο συναρτήσεων είναι ένα φραγμένο σύνολο συναρτήσεων οι οποίες είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Επιπλέον, είναι ένα κλειστό σύνολο. Πράγματι, αν πάρουμε μια συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του $\varphi_n\in A$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\psi$, $\left\|\psi\right\|<\infty$ η ακολουθία $\tilde{\varphi}_n(x)=\int\limits_{x_a}^{x_b} dx' K(x,x')\varphi_n(x')$ συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του $K(A)$:

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\varphi}_n(x)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{x_a}^{x_b} dx' K(x,x')\varphi_n(x')=\tilde{\psi}(x)\in K(A). \tag{A.19}$$

Μετά από αυτά και σύμφωνα με το θεώρημα Arzela-Ascoli, συμπεραίνουμε ότι ο **ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής**. Στην περίπτωση αυτή ο τελεστής $\hat{I} - g\hat{K}$ ο οποίος εμφανίζεται στις εξισώσεις (A.7) και (A.8) λέγεται **τελεστής Fredholm.** Η σημασία του είναι προφανής αφού η λύση της αντίστοιχης ολοκληρωτικής εξίσωσης βρίσκεται στη δυνατότητα να αντιστραφεί.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στις ιδιοτιμές ενός συμπαγούς τελεστή. Αφήνοντας τις μαθηματικές λεπτομέρειες για την βιβλιογραφία να σημειώσουμε ότι το σύνολο αυτών των ιδιοτιμών είναι ένα συμπαγές σύνολο στοιχείων το πλήθος των οποίων μπορεί να είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο (στην τελευταία περίπτωση πάντα υπάρχει το μηδέν ανάμεσα στα στοιχεία του). Αν σημειώσουμε ως $\{k_n\}_{n=1}^{N(K)}$ το σύνολο των (διαφορετικών μεταξύ τους) μη μηδενικών ιδιοτιμών ενός συμπαγούς τελεστή, αποδεικνύεται ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$\hat{K} = \sum_n |k_n| |\tilde{n}\rangle\langle n| \qquad \text{(A.20)}$$

Στη σχέση αυτή τα ανύσματα $\{|n\rangle\}$ και $\{|\tilde{n}\rangle\}$:

$$\hat{K}^\dagger \hat{K} |n\rangle = k_n^2 |n\rangle \ , \ \hat{K}\hat{K}^\dagger |\tilde{n}\rangle = k_n^2 |\tilde{n}\rangle \qquad \text{(A.21)}$$

είναι ιδιοκαταστάσεις αυτοσυζυγών (και συμπαγών) τελεστών και επομένως αποτελούν βάσεις στον χώρο των συναρτήσεων που μας απασχολεί. Όπως και να έχει, οι παραπάνω σχέσεις θα μπορούσαν να συνοψισθούν ως εξής:

$$\hat{K} |n\rangle = k_n |\tilde{n}\rangle \ , \ \hat{K}^\dagger |\tilde{n}\rangle = k_n^* |n\rangle$$

(A.22)

Η ορίζουσα Fredholm στην οποία αναφερθήκαμε στο κυρίως κείμενο ορίζεται από τη σχέση

$$D(g) = \det\left(1 - g\hat{K}\right) = \prod_n (1 - gk_n) \qquad \text{(A.23)}$$

Αν $gk_n \neq 1 \ \forall n$ (εάν $\ker\left(\hat{I} - g\hat{K}\right) = \varnothing$) ο τελεστής Fredholm είναι αντιστρεπτός και η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση έχει μοναδική λύση. Εάν το πλήθος των ιδιοτιμών είναι πεπερασμένο, $N(K) < \infty$, η έκφραση (A.23) έχει, προφανώς, νόημα. Εάν $N(K) = \infty$, η ορίζουσα Fredholm (A.23) έχει νόημα για τους λεγόμενους trace-class συμπαγείς τελεστές. Αυτοί είναι τελεστές για τους οποίους το ίχνος το οποίο ορίζεται ως $Tr\hat{K} = \sum_n \langle e_n | \hat{K} | e_n \rangle$ -ορισμός ο οποίος είναι ανεξάρτητος της βάσης $\{|e_n\rangle\}$ -είναι τέτοιο ώστε:

$$Tr\left|\hat{K}\right| = Tr\hat{K}^\dagger \hat{K} = Tr\hat{K}\hat{K}^\dagger = \sum_n |k_n| < \infty \qquad \text{(A.24)}$$

Για να το δείξουμε αυτό μπορούμε να αναφερθούμε στα αποτελέσματα του τελευταίου εδαφίου (δες Εξ. (4.17), (4.18)). Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι:

$$\left|D^{(1)}(0)\right| = \left|Tr\hat{K}\right| = \left|\sum_n k_n\right| \le \sum_n |k_n| = Tr\left|\hat{K}\right|$$

$$\left|D^{(2)}(0)\right| = \left|\left(Tr\hat{K}\right)^2 - Tr\hat{K}\right|^2 = 2\left|k_1k_2 + k_1k_3 + \ldots\right| \le 2\left(|k_1k_2| + |k_1k_3| + \ldots\right) \le \left(|k_1| + \ldots + |k_n|\right)^2 = \left(Tr\left|\hat{K}\right|\right)^2$$

$$\left|D^{(3)}(0)\right| = \left|-2\left(k_1^3 + \ldots + k_n^3\right) + 3\left(k_1 + \ldots + k_n\right)\left(k_1^2 + \ldots + k_n^2\right) - \left(k_1 + \ldots + k_n\right)^3\right| =$$

$$= \left|6k_1k_2k_3 + \ldots\right| \le 6\left|k_1k_2k_3\right| + \ldots \le \left(|k_1| + \ldots + |k_n|\right)^3 = \left(Tr\left|\hat{K}\right|\right)^3$$

....

$$\left|D^{(n)}(0)\right| \le \left(Tr\left|\hat{K}\right|\right)^n \tag{A.25}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.15) του κυρίως κειμένου διαπιστώνουμε ότι

$$\left|D(g)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(Tr\left|g\hat{K}\right|\right)^n = \exp\left(Tr\left|g\hat{K}\right|\right) \tag{A.26}$$

Επομένως η ορίζουσα Fredholm έχει νόημα για κάθε trace-class συμπαγή τελεστή (A.24).
Αν αναφερθούμε, τώρα, στο αποτέλεσμα το οποίο φαίνεται στην Εξ. (4.24) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη ανάλυση η οποία μαζί με το γεγονός ότι ο τελεστής $\hat{K}$ είναι φραγμένος , $\left|\hat{K}\varphi\right| < \infty$, μπορούμε αβίαστα να καταλήξουμε ότι η σειρά (4.25) συγκλίνει και επομένως αποτελεί λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. D. Porter, D.S.G. Stirling ***"Integral Equations"*** Cambridge University Press
2. P.M. Morse, H. Feshbach ***"Methods of Theoretical Physics"*** Mc Graw-Hill
3. F.W. Byron, R.W. Fuller ***"Mathematics of Classical and Quantum Physics"*** Dover Publications