

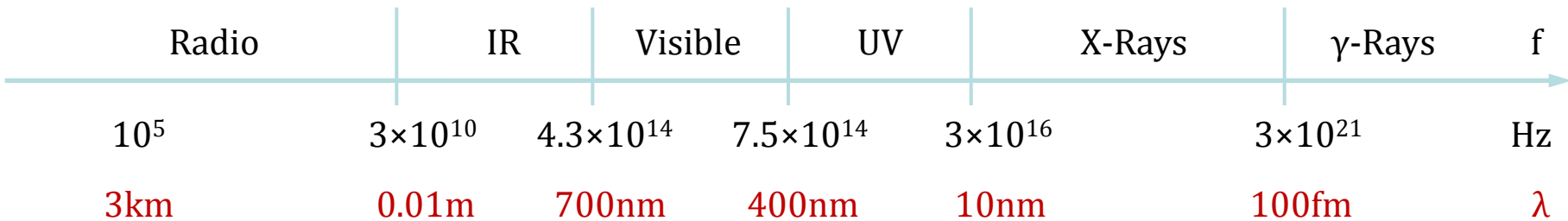
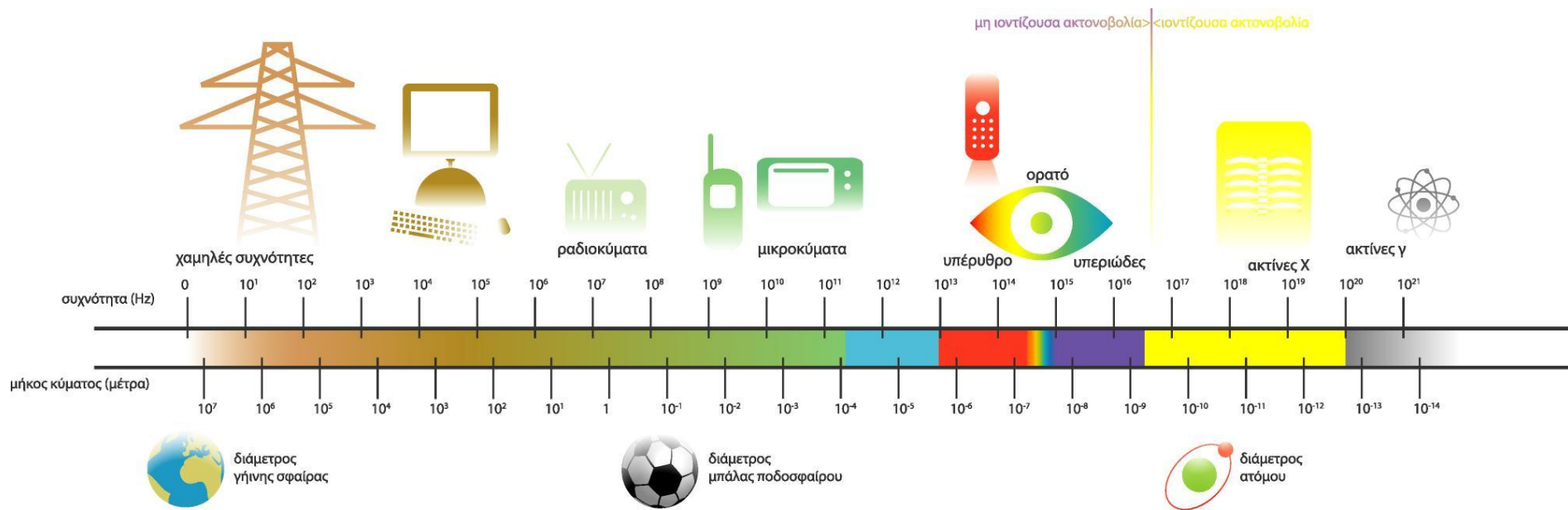
ΙΑΤΡΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Π. Παπαγιάννης & Ε. Στυλιάρης
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
2019 - 2020

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΦΩΤΟΝΙΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΥΛΗ

- Χαρακτηριστικές Ενέργειες & Μήκη Κύματος
- Απορρόφηση Ακτινοβολίας
 - Εκθετικός Νόμος Απορρόφησης
 - Γραμμικός Συντελεστής Απορρόφησης μ
- Βασικές Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις
 - Φωτοηλεκτρικό Φαινόμενο
 - Φαινόμενο Compton, Κινηματική
 - Δίδυμη Γένεση
- Εξάρτηση του Συντελεστή Απορρόφησης μ από την Ενέργεια και το Υλικό

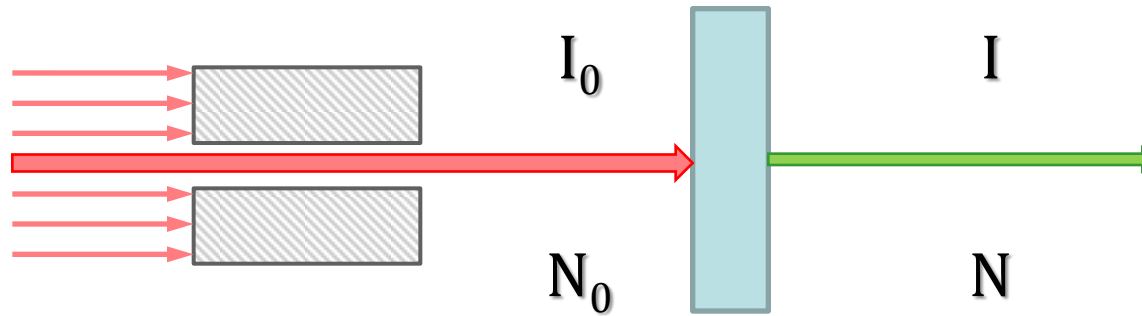
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ



$$c = \lambda \cdot f$$

$$1 \text{ eV} = 2.418 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ



$$\Delta N = -\mu N \Delta x$$

μ : γραμμικός συντελεστής απορρόφησης

$$dN = -\mu N dx \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\mu dx \Rightarrow \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \int_0^x -\mu dx \Rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\mu x$$



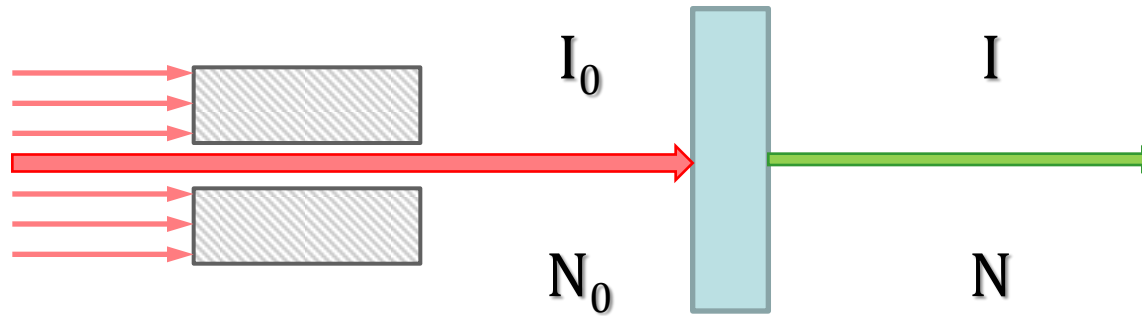
$$N = N_0 e^{-\mu x}$$

N_0 : Εισερχόμενα

N : Διαπερνώντα

$N_0 - N$: Απορροφώμενα

ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ



$$\Delta N = -\mu N \Delta x$$

μ : γραμμικός συντελεστής απορρόφησης

$$dN = -\mu N dx \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\mu dx \Rightarrow \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \int_0^x -\mu dx \Rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\mu x$$



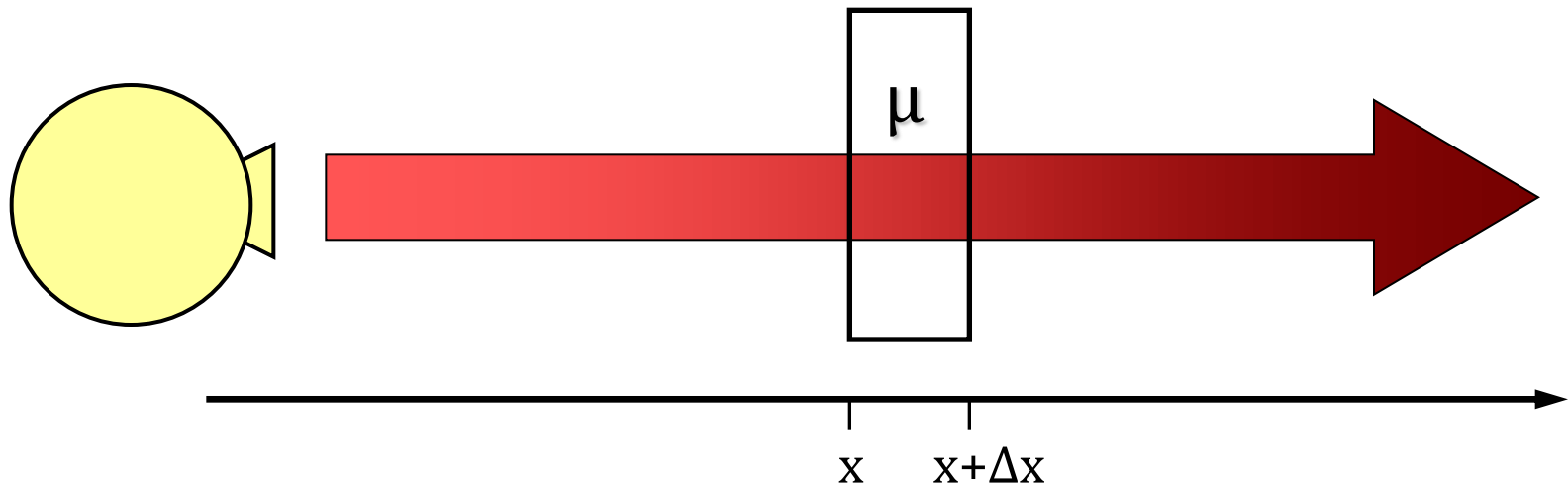
$$N = N_0 e^{-\mu x}$$

N_0 : Εισερχόμενα

N : Διαπερνώντα

$N_0 - N$: Απορροφώμενα

ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ



$$\frac{dI}{I(x)} = -\mu dx \Rightarrow \int \frac{dI}{I(x)} = -\mu \int dx \Rightarrow I(x) = I_0 e^{-\mu x}$$

μ : γραμμικός συντελεστής απορρόφησης

ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

μ : γραμμικός συντελεστής απορρόφησης \implies

$$N = N_0 e^{-\mu x}$$

Μονάδες του μ : $[\mu] = [L]^{-1} \implies [\mu] = m^{-1}$ ή cm^{-1}

$$N = N_0 e^{-\mu x} \implies N = N_0 e^{-\frac{\mu}{\rho} x \rho} = N_0 e^{-\mu_\rho x \rho} \implies$$

$$N = N_0 e^{-\mu_\rho x \rho}$$

μ_ρ : μαζικός συντελεστής απορρόφησης

ρ : Πυκνότητα του υλικού

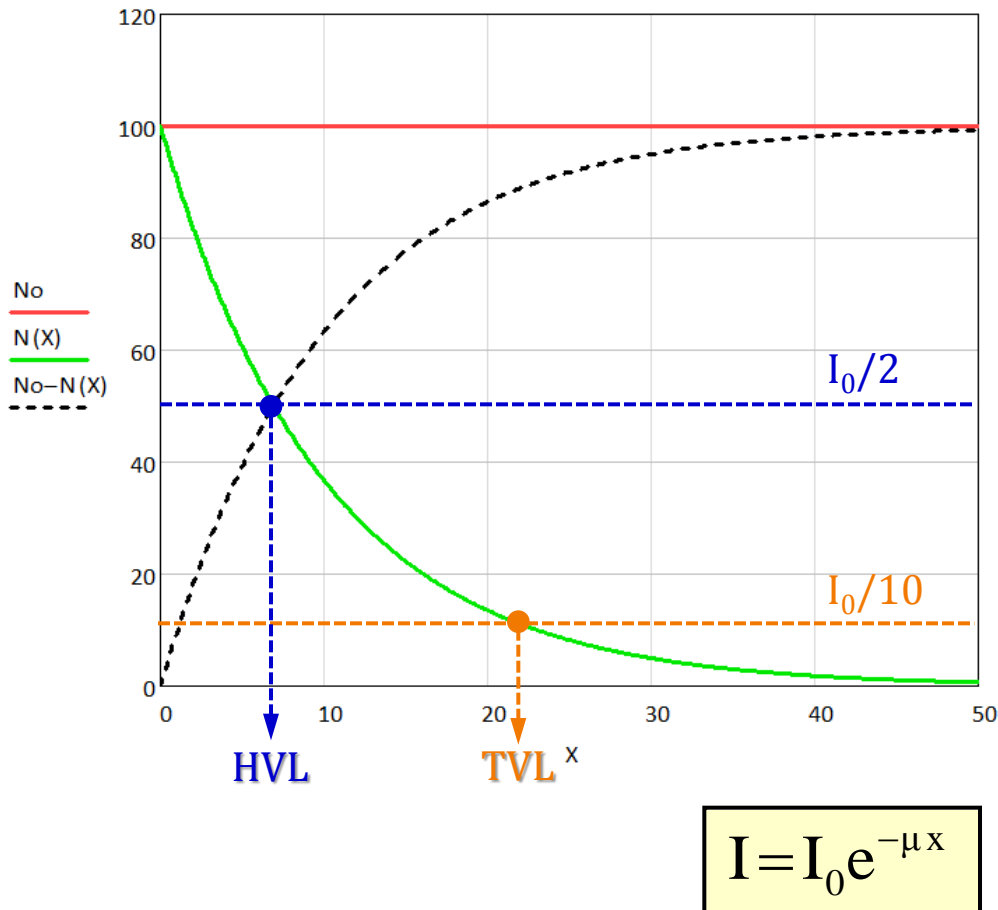
Μονάδες του μ_ρ : $[\mu_\rho] = [\mu]/[\rho] = [L]^{-1} / ([M]^{-1}[L]^3) \implies [\mu_\rho] = [M]^{-1} [L]^2$

Το $x \cdot \rho$ εκφράζει επιφανειακή πυκνότητα (g/cm^2)

$$[\mu_\rho] = [M]^{-1} [L]^2 = (\text{επιφανειακή πυκνότητα})^{-1}$$

ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

Χαρακτηριστικά πάχη υλικού συσχετισμένα με τον συντελεστή απορρόφησης.



$X_{1/2}$: Πάχος Υποδιπλασιασμού
(Half Value Layer, HVL)

$$I = I_0 / 2$$



$$\text{HVL} = \ln 2 / \mu$$

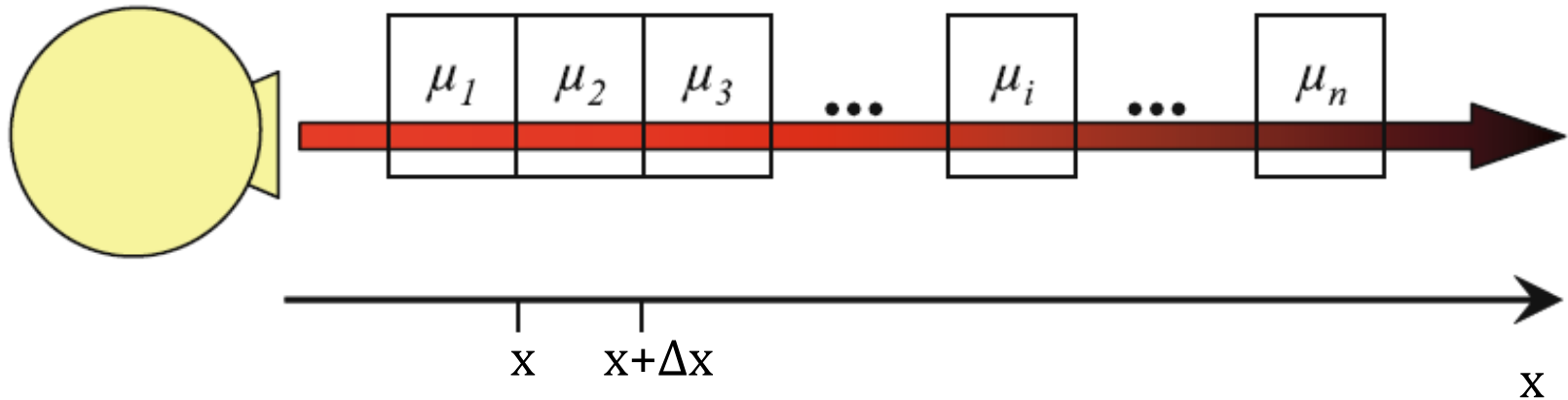
$X_{1/10}$: Πάχος Υποδεκαπλασιασμού
(Tenth Value Layer, TVL)

$$I = I_0 / 10$$



$$\text{TVL} = \ln 10 / \mu$$

ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

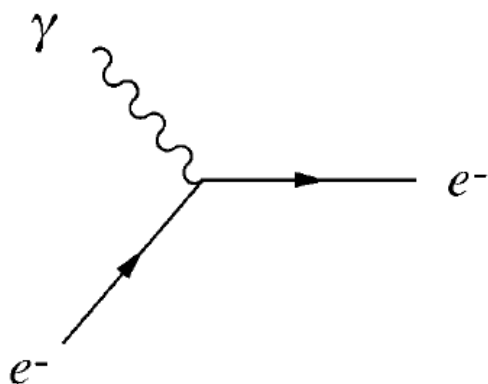


$$\frac{dI}{I(x)} = -\mu_1 \Delta x - \mu_2 \Delta x \cdots - \mu_n \Delta x \Rightarrow I(x) = I_0 e^{-\sum \mu_i \Delta x}$$

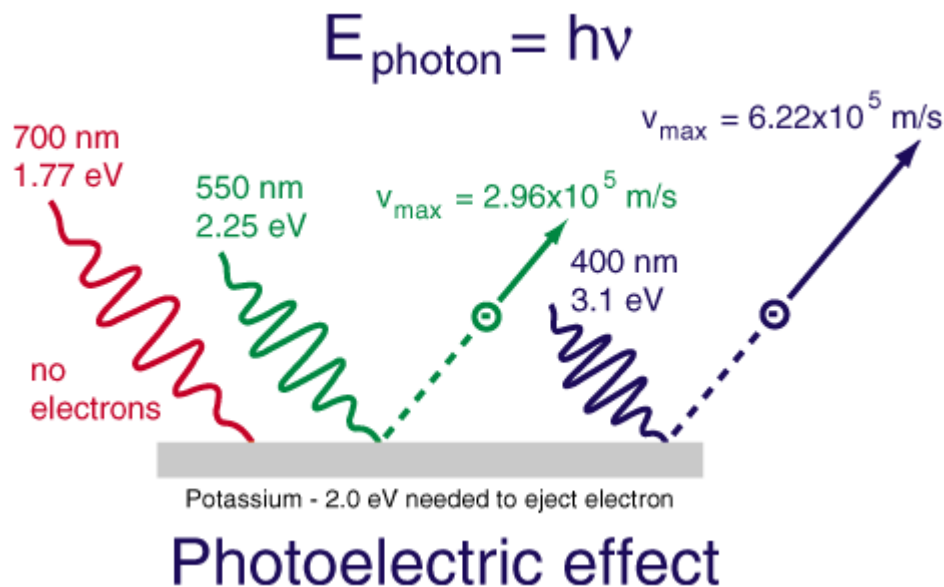
$$I(x) = I_0 e^{-\int \mu(x) dx}$$

ΦΩΤΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

Κβαντική διεργασία κατά την οποία απελευθερώνονται ηλεκτρόνια από μια επιφάνεια αγωγού όταν προσπέσει σε αυτή ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συχνότητας τέτοιας ώστε τα ηλεκτρόνια να κατορθώσουν να υπερπηδήσουν το φράγμα δυναμικής ενέργειας που τα συγκρατεί στην επιφάνεια αυτή.



Διάγραμμα Feynman

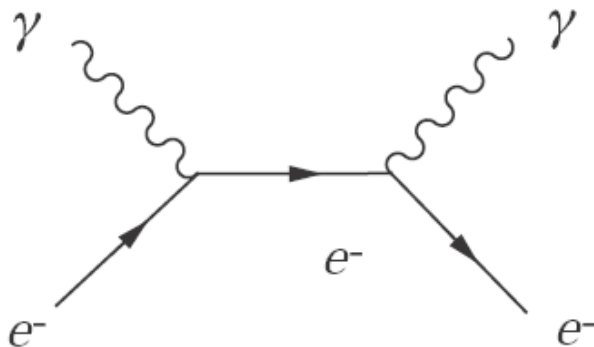


$$E_e = h\nu - b$$

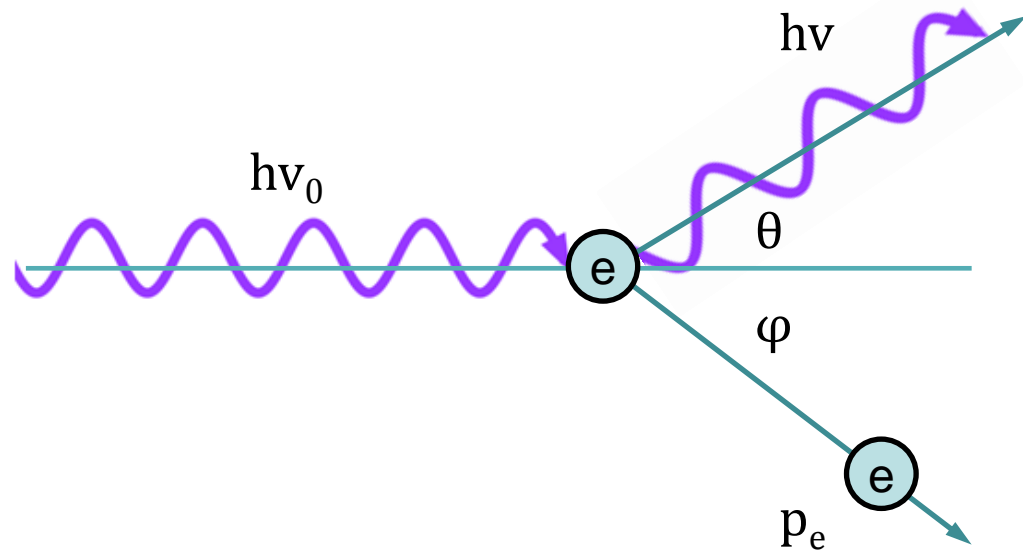
b: Έργο εξαγωγής ηλεκτρονίου

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ Compton

Σκέδαση φωτονίου από ηλεκτρόνιο με μεταφορά μέρους της ορμής του φωτονίου στο ηλεκτρόνιο. Το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχει μικρότερη ενέργεια και κατά συνέπεια μεγαλύτερο μήκος κύματος του εισερχομένου.



Διάγραμμα Feynman

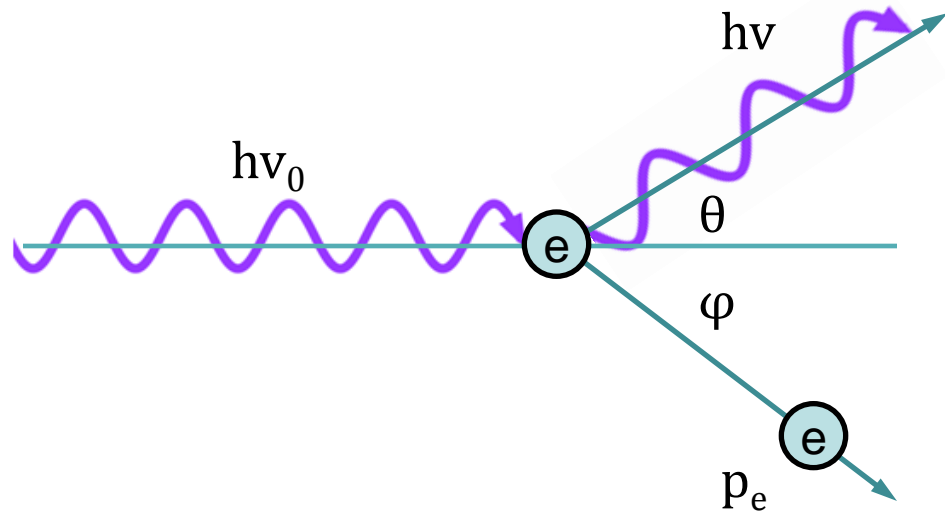


$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta)$$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ Compton

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Φωτόνιο: $E = pc$



Διατήρηση Ορμής

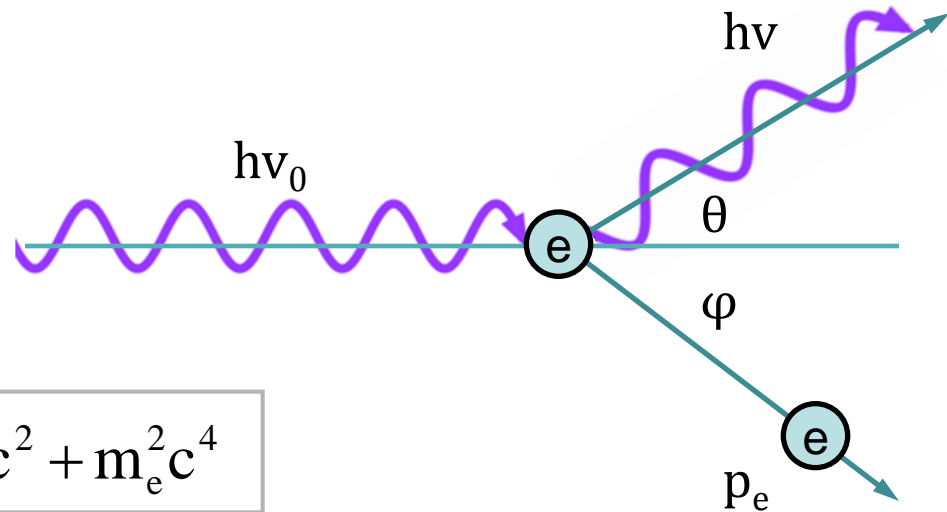
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c} \cos\theta + p_e \cos\varphi \\ 0 = \frac{h\nu}{c} \sin\theta - p_e \sin\varphi \end{array} \right\} \Rightarrow p_e^2 c^2 = (h\nu_0)^2 + (h\nu)^2 - 2(h\nu_0)(h\nu)\cos\theta$$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ Compton

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Διατήρηση Ενέργειας

$$[(h\nu_0 - h\nu) + m_e c^2]^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4$$



Αντικαθιστώντας τον όρο $p_e^2 c^2$ από την προηγούμενη σχέση:

$$(h\nu_0 - h\nu)^2 + 2(h\nu_0 - h\nu)m_e c^2 = (h\nu_0)^2 + (h\nu)^2 - 2(h\nu_0)(h\nu)\cos\theta$$

$$-2(h\nu_0)(h\nu) + 2(h\nu_0 - h\nu)m_e c^2 = -2(h\nu_0)(h\nu)\cos\theta$$

$$h\nu_0 - h\nu = \frac{(h\nu_0)(h\nu)(1 - \cos\theta)}{m_e c^2}$$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ Compton

$$h\nu_0 - h\nu = \frac{(h\nu_0)(h\nu)(1 - \cos\theta)}{m_e c^2}$$

Πολλαπλασιάζοντας με

$$\frac{c}{h\nu_0}$$

$$\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) = \lambda - \lambda_0 = \Delta\lambda$$



$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta)$$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ Compton

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta)$$

Μετατροπές Μονάδων

$$\frac{h}{m_e c} = \frac{hc}{m_e c^2} = \frac{2\pi \cdot 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0.511 \text{ MeV}} \approx 2422 \text{ fm} \approx 0.00242 \text{ nm}$$

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1.24}{\lambda} \text{ keV} \cdot \text{nm}$$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ Compton

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1.24}{\lambda} \text{ keV} \cdot \text{nm}$$

Παράδειγμα

Φωτόνιο αρχικής ενέργειας $E_0 = 2\text{MeV}$ οπισθοσκεδάζεται ($\theta = 180^\circ$) από ηλεκτρόνιο. Ποια η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου;

$$\lambda_0 = \frac{hc}{h\nu_0} = \frac{1.24}{2000} \text{ nm} = 0.00062 \text{ nm}$$

Σκέδαση Compton

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) = 0.00242 [1 - \cos(180^\circ)] \text{ nm} = 0.00484 \text{ nm}$$

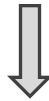


$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0.00546 \text{ nm} \Rightarrow E = \frac{1.24}{0.00546} \text{ keV} = 226 \text{ keV}$$

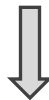
ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ Compton

Μια χρήσιμη αναλογία

$$v = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta v = -\frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda \Rightarrow \Delta v = -\frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$



$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$



$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό της ενέργειας του κατά Compton σκεδαζομένου φωτονίου.

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ Compton

Ενέργεια φωτονίου μετά από σκέδαση Compton

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$



$$-\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \Rightarrow -\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) = \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{h}{mc^2} (1 - \cos \theta) = \frac{h\nu}{mc^2} (1 - \cos \theta)$$



$$-\frac{E - E_0}{E_0} = \frac{E}{mc^2} (1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{E_0 - E}{E} = \frac{E_0}{mc^2} (1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{E_0}{E} = 1 + \frac{E_0}{mc^2} (1 - \cos \theta)$$



$$E = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{mc^2} (1 - \cos \theta)}$$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ Compton

Η αντίστοιχη ενέργεια του ηλεκτρονίου θα είναι:

$$T = E_e = E_0 - E$$



$$T = E_0 - \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{mc^2}(1 - \cos\theta)} = \frac{E_0 + \frac{E_0^2}{mc^2}(1 - \cos\theta) - E_0}{1 + \frac{E_0}{mc^2}(1 - \cos\theta)}$$



$$T = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{mc^2}(1 - \cos\theta)}$$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ Compton

Για οπισθοσκέδαση του φωτονίου ($\theta=180^\circ$) οι αντίστοιχες ενέργειες φωτονίου και ηλεκτρονίου γίνονται

Photon

$$E = \frac{E_0}{1 + \frac{2E_0}{mc^2}}$$

Electron

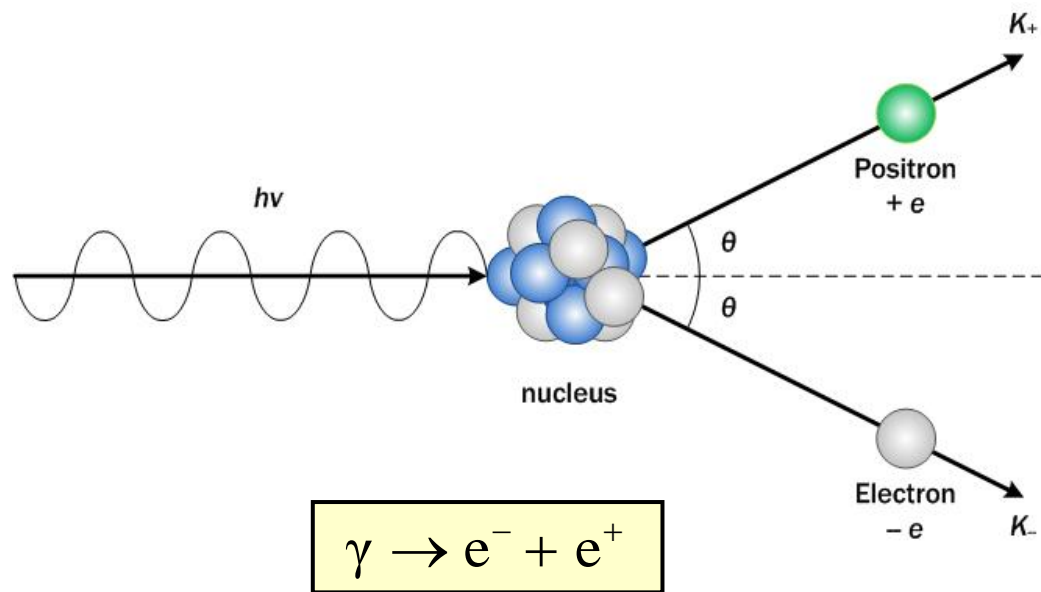
$$T = \frac{E_0}{1 + \frac{mc^2}{2E_0}}$$

Αριθμητική Εφαρμογή

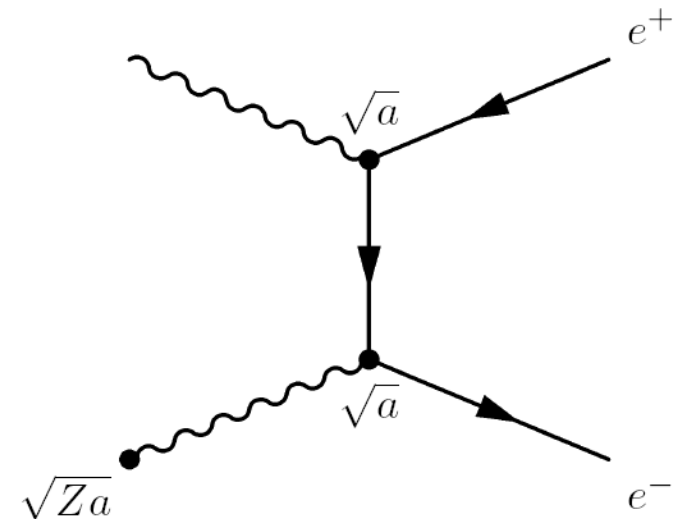
E_0 (keV)	E (keV)	T (keV)
511	170	341
1000	204	796
2000	226	1774

ΔΙΔΥΜΗ ΓΕΝΕΣΗ

Δημιουργία ενός ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου, όταν ένα ικανής ενέργειας φωτόνιο αλληλεπιδράσει με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του πυρήνα. Γενικότερα, η έννοια της δίδυμης γένεσης εμπεριέχει τη δημιουργία ενός σωματιδίου-αντισωματιδίου από ουδέτερο μποζόνιο.



Διάγραμμα Feynman



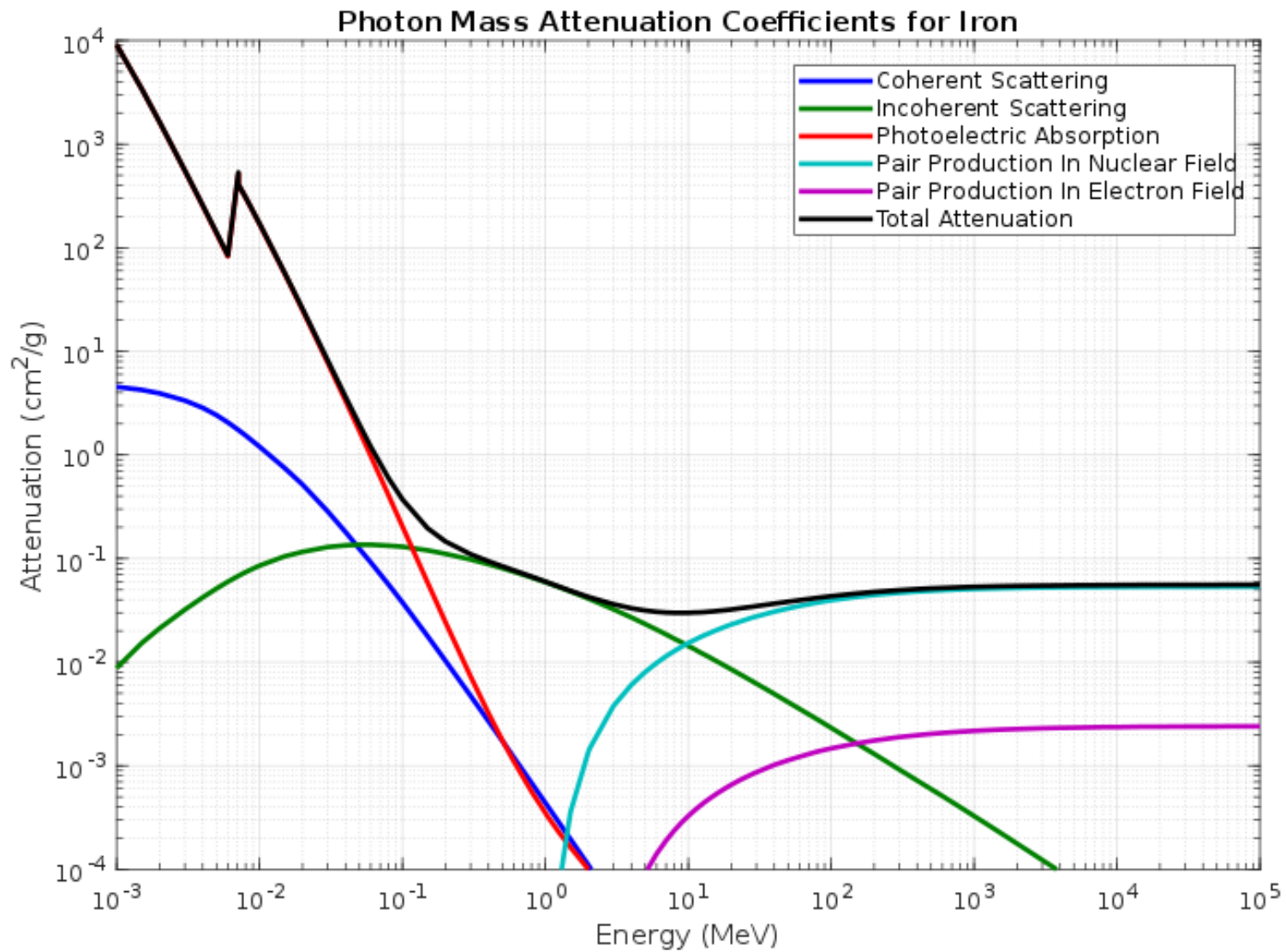
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ

Ο γραμμικός συντελεστής απορρόφησης υλικού εξαρτάται από την **Ενέργεια E** του προσπίπτοντος φωτονίου και τη φύση του υλικού (**Ατομικός Αριθμός Z**, **Πυκνότητα ρ**).

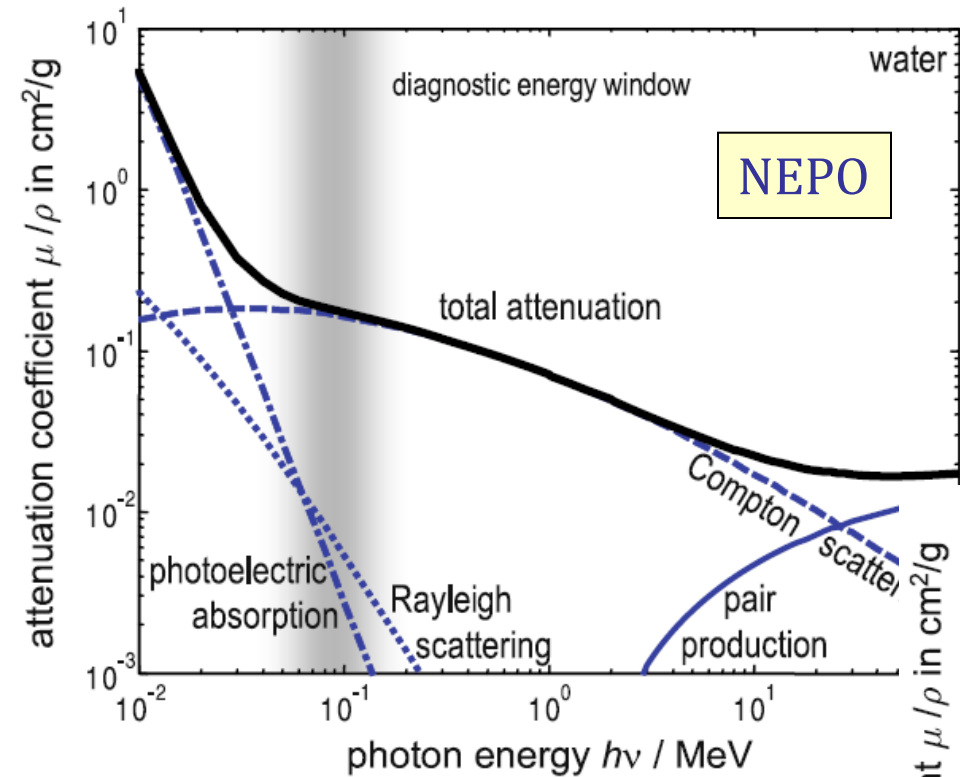
$$\mu = \mu(E, Z, \rho)$$

	Photon Energy	Atomic Number Z	Density ρ	e-Density
Photoelectric	$1/(h\nu)^3$	Z^3	ρ	---
Compton	$1/(h\nu)$	---	ρ	ρ_e
Pair Production	$h\nu$	Z	ρ	---

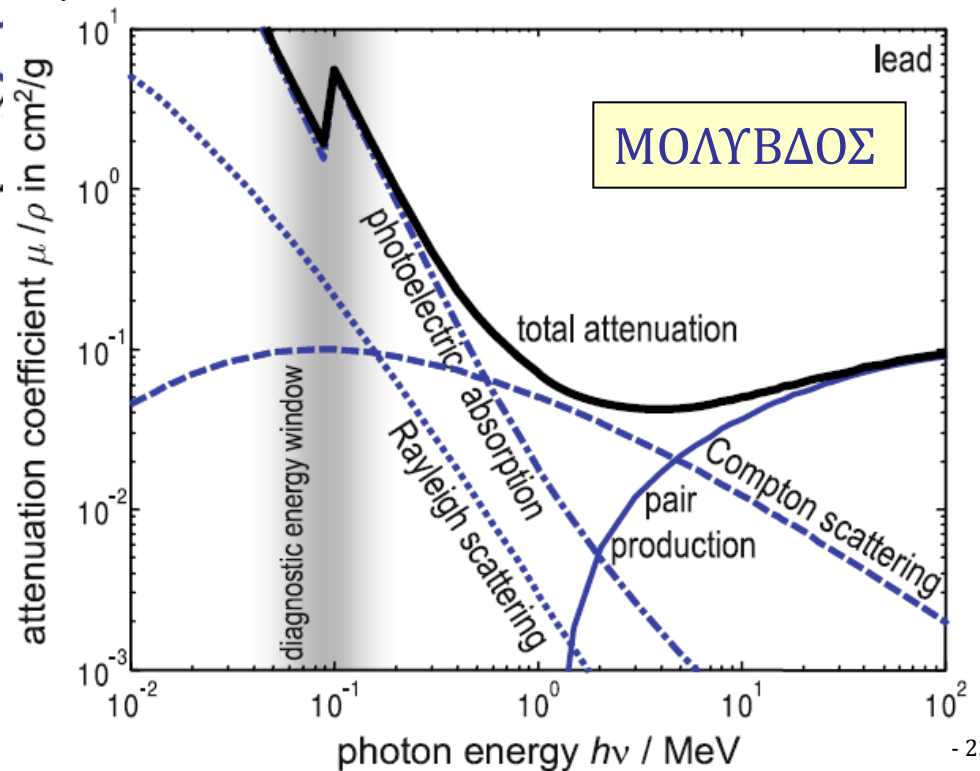
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ



ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ

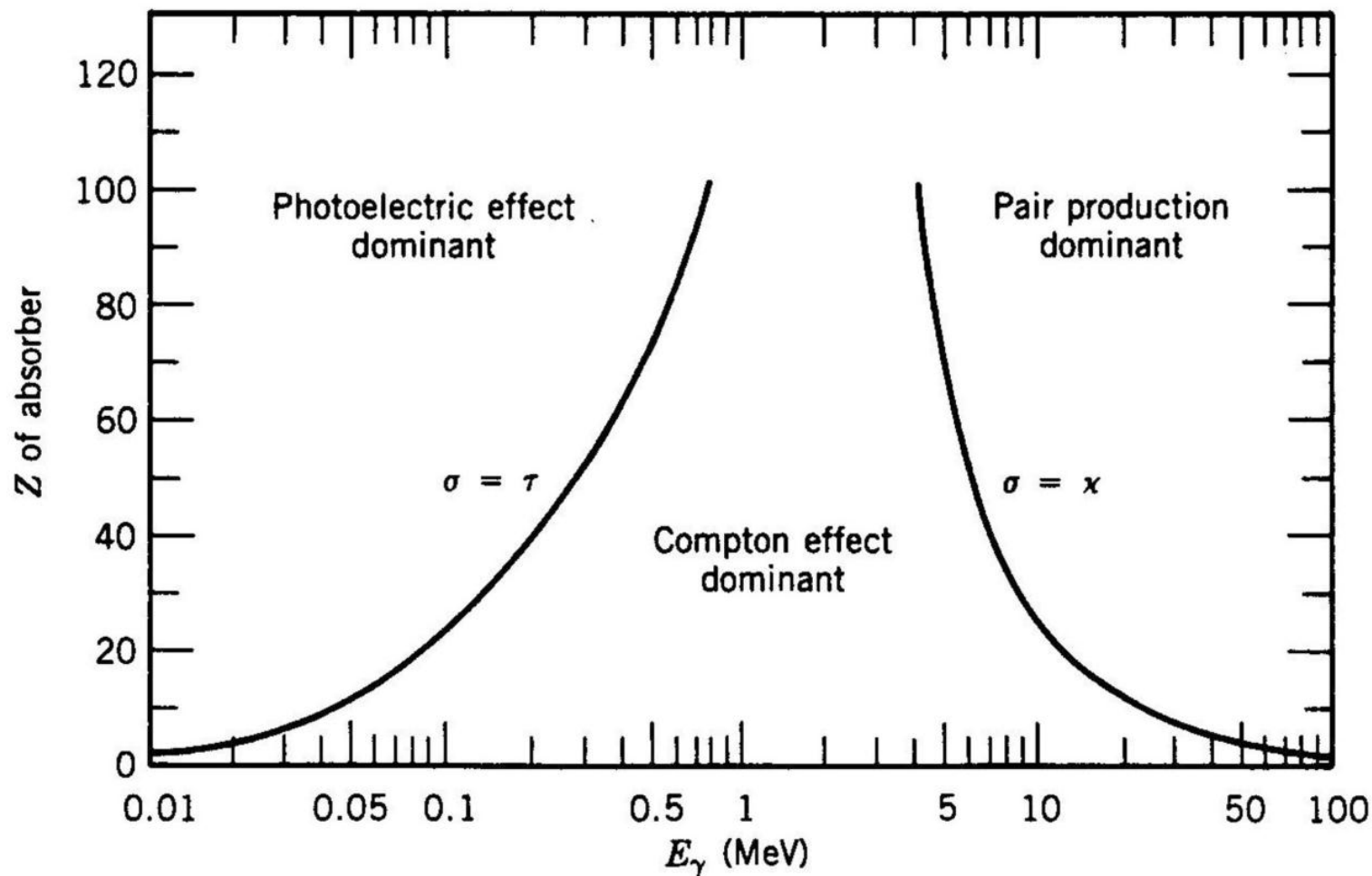


Μαζικός συντελεστής απορρόφησης
 μ/ρ
στην ενεργειακή περιοχή των
ακτίνων X



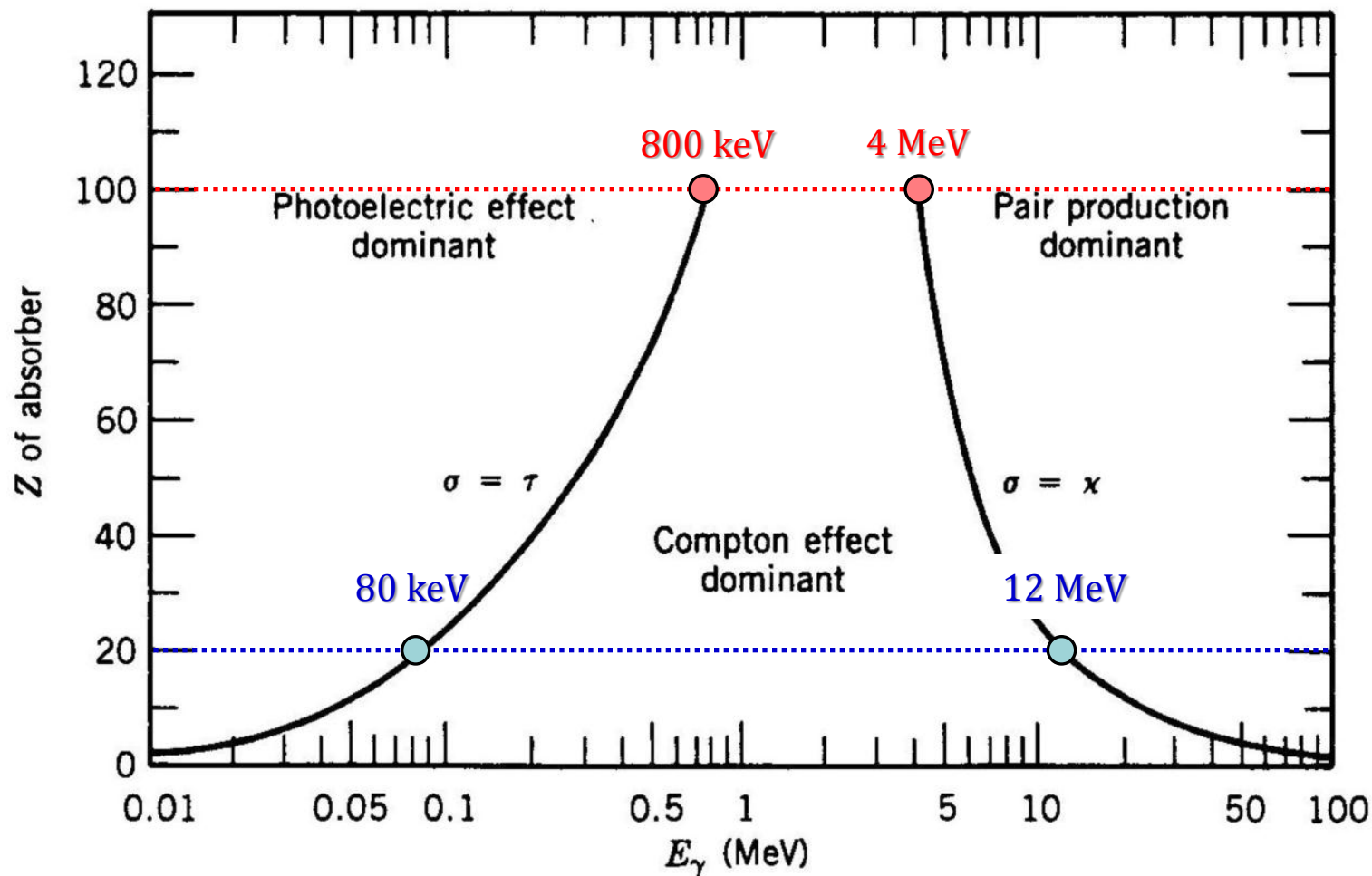
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ

Relative importance of γ -ray interactions



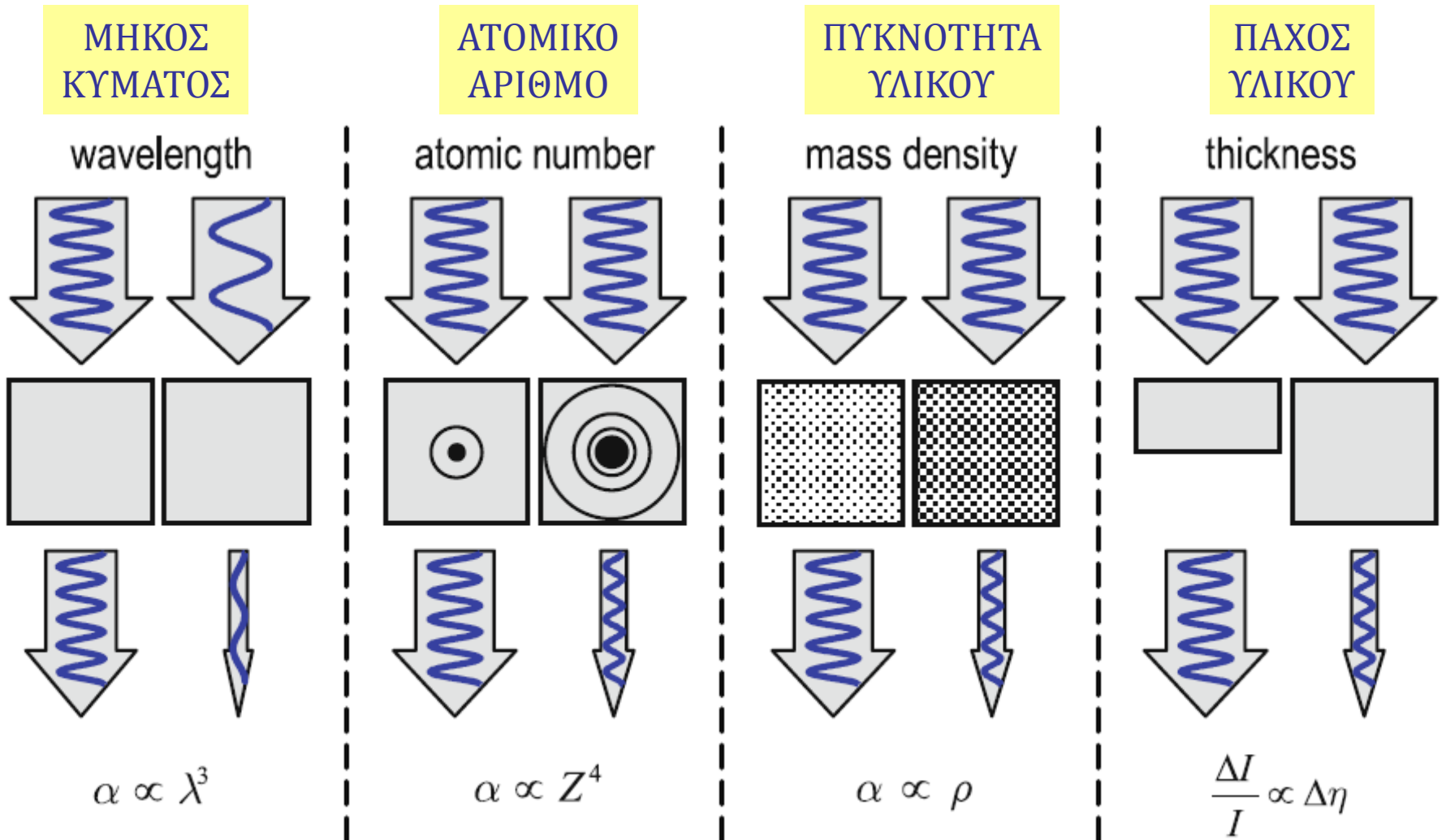
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ

Relative importance of γ -ray interactions



ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ

Εξάρτηση της απορρόφησης ακτινοβολίας από:



T. Laubenberger / J. Laubenberger: «Technik der medizinischen Radiologie» (1999)