Τελική εξέταση στη Μηχανική του Μεταπτυχιακού-2023-2024

Λύστε δύο από τα τρία θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Μέγιστος αριθμός μορίων 140.

1. (α) Σωματίδιο κινείται στην ευθεία και δέχεται τυχαίες κρούσεις ανά διαστήματα τ με αποτέλεσμα η ταχύτητά του να μεταβάλλεται ακαριαία κατά μία ποσότητα που είναι κατανεμημένη σύμφωνα με τη γκαουσιανή κατανομή $\lambda N(0,1)$. Προσδιορίστε την κατανομή της ταχύτητας του σωματιδίου στον χρόνο $t = n\tau$. Πώς πρέπει να επιλέξετε το λ έτσι ώστε η διασπορά των ταχυτήτων να είναι ανεξάρτητη του τ και η διασπορά για κάθε t να τείνει στο ίδιο μη μηδενικό όριο όταν $\tau \to 0$; Πώς θα γράφατε την αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό της ταχύτητας; **[20]**

   (β) Η θέση $x(t)$ σωματιδίου έχει στάσιμη κατανομή έτσι ώστε $\forall t$ να είναι $\langle x(t+\tau)x(t)\rangle = \langle x(\tau)x(0)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Xi(\tau)$. Εξηγήστε τι παριστάνει η μέση τιμή $\langle\cdot\rangle$. Δείξτε τώρα ότι αν $\hat{x}(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της στάσιμης τυχαίας μεταβλητής $x(t)$ θα είναι

$$\langle \hat{x}(\omega)\hat{x}^*(\omega')\rangle = S(\omega)\delta(\omega-\omega') \ .$$

   Εκφράστε τη διασπορά $\langle x^2(t)\rangle$ συναρτήσει του $S(\omega)$. **[20]**

   (γ) Ταλαντωτής φυσικής συχνότητας ω_0 διεγείρεται από ασθενή διέγερση $F_s\cos(\omega_0 t)$, στη συχνότητα συντονισμού του ταλαντωτή, την οποίαν θέλουμε να ανιχνεύσουμε. Ο ταλαντωτής όμως βρίσκεται εντός δωματίου θερμοκρασίας T και υπόκειται σε τυχαίες κρούσεις οι οποίες διαταράσσουν την κίνηση του ταλαντωτή προσδίδοντας συγχρόνως ώσεις αλλά και επιβάλλοντας μια γραμμική τριβή στην κίνησή του. Η κίνηση του ταλαντωτή διέπεται από τη δυναμική:

$$m(\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) = F_s\cos(\omega_0 t) + \sigma\xi(t) \ , \tag{1}$$

   όπου $\xi(t)$ λευκός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής, $\langle\xi(t)\rangle = 0$, και και δέλτα συσχέτισης: $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$. Ο συντελεστής τριβής σύμφωνα με το θεώρημα Fluctuation-Dissipation είναι $\gamma = \sigma^2/(4k_B T m)$. Προσδιορίστε την εξίσωση της μέσης τιμής της θέσης μίας άπειρης συλλογής ταλαντωτών και υπολογίστε την ταλάντωση που εκτελεί η μέση τιμή, $\langle x\rangle$. Υπολογίστε τη φασματική ισχύ του $x - \langle x\rangle$ λόγω του θορύβου και έπειτα υπολογίστε τη διασπορά της θέσης λόγω του θορύβου[1]. Τι πρέπει να ικανοποιείται ώστε να μπορέσετε να ανιχνεύσετε το σήμα; **[30]**

Λύση:

1. (α) Επειδή το άθροισμα δύο Γκαουσιανών με κατανομή $N(0,1)$ είναι Γκαουσιανή με κατανομή $N(0,2)$ και είναι $\lambda N(0,1) = N(0,\lambda^2)$, η κατανομή της ταχύτητας στον χρόνο $t = n\tau$ είναι το άθροισμα n Γκαουσιανών με κατανομή $N(0,\lambda^2)$, οπότε έχει κατανομή:

$$N(0, n\lambda^2) = N(0, t\lambda^2/\tau)$$

[1] Είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2 + \epsilon^2 x^2} = \frac{\pi}{\epsilon} \ .$$

Αν λάβω $\lambda = \sigma\sqrt{\tau}$ τότε η διασπορά γίνετα $\sigma^2 t$, ανεξάρτητη από το τ. Η αναδρομική σχέση είναι:

$$v(t+\tau) - v(t) = \sigma\sqrt{\tau}N(0,1)\ .$$

(β) Στασιμότητα σημαίνει ότι όλες οι στατιστικές ποσότητες της μεταβλητής x είναι ανεξάρτητες από τον χρόνο αναφοράς t. Συνεπώς αν $t' = t - \tau$

$$\begin{aligned}\langle x(t)x(t')\rangle &= \langle x(t'+\tau)x(t')\rangle \\ &= \langle x(\tau)x(0)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Xi(\tau)\ .\end{aligned}$$

Η μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή t λαμβάνεται ως προς την πιθανότητα ή ισοδύναμα ως μέση τιμή μίας συλλογής πανομοιότυπων συστημάτων. Είναι

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}(\omega)\hat{x}^*(\omega')\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{e^{\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \frac{e^{-\mathrm{i}\omega' t'}}{\sqrt{2\pi}} \langle x(t)x(t')\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{e^{\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \frac{e^{-\mathrm{i}\omega' t'}}{\sqrt{2\pi}}\, \Xi(\tau)\end{aligned}$$

έχοντας ορίσει $\tau = t - t'$. Αλλάζοντας τις μεταβλητές $(t, t') \to (t, \tau)$ έχω:

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}(\omega)\hat{x}^*(\omega')\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{e^{\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \frac{e^{-\mathrm{i}\omega'(t-\tau)}}{\sqrt{2\pi}}\, \Xi(\tau) \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega'\tau}\, \Xi(\tau)\right)}_{S(\omega')} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{e^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}}{2\pi}}_{\delta(\omega-\omega')}\end{aligned}$$

Συνεπώς η φασματική ισχύς $S(\omega)$ είναι μετασχηματισμός Fourier της χρονικής συσχέτισης $\Xi(\tau)$, οπότε

$$\Xi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega\tau}\, S(\omega)\ ,\ \ S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau}\, \Xi(\tau)\ ,$$

και η διασπορά είναι:

$$\langle x^2\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Xi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, S(\omega)\ ,$$

(γ) Λαμβάνοντας τη μέση τιμή της (1), η εξίσωση της μέσης απόκρισης του ταλαντωτή επειδή $d/dt\langle x\rangle = \langle \dot{x}\rangle$ είναι:

$$m(\langle \ddot{x}\rangle + 2\gamma\langle \dot{x}\rangle + \omega_0^2\langle x\rangle) = F_s\cos(\omega_0 t),$$

Η μέση απόκριση του ταλαντωτή είναι τελικά:

$$\langle x \rangle = \frac{F_s}{2m\gamma\omega_0}\sin(\omega_0 t) = \frac{2F_s k_B T}{\omega_0 \sigma^2}\sin(\omega_0 t)\ .$$

Οι αποκλίσεις από τη μέση ταλάντωση $y = x - \langle x \rangle$ ικανοποιούν την

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{\sigma}{m}\xi(t)\ ,$$

και λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Fourier του $y(t) = 1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{y}(\omega)e^{-i\omega t}$, βρίσκουμε ότι

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\sigma}{m}\frac{\hat{\xi}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}\ .$$

Επειδή $\Xi(\tau) = \delta(\tau)$ είναι $\langle \hat{\xi}(\omega)\hat{\xi}^*(\omega')\rangle = \delta(\omega - \omega')$ και

$$\langle \hat{y}(\omega)\hat{y}^*(\omega')\rangle = \frac{\sigma^2}{m^2}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}\delta(\omega - \omega')\ .$$

Συνεπώς η φασματική ισχύς του y είναι:

$$S_y(\omega) = \frac{\sigma^2}{m^2}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\ .$$

και η διασπορά του x λόγω του θορύβου

$$\begin{aligned}
\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ S_y(\omega) \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi m^2 \omega_0^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2 - 1)^2 + \varepsilon^2 x^2} \qquad ,\ \varepsilon = 2\gamma/\omega_0 \\
&= \frac{k_B T}{m\omega_0^2}
\end{aligned}$$

Για να μπορεί να ανιχνευθεί το σήμα πρέπει

$$\frac{2F_s k_B T}{\omega_0 \sigma^2} \gg \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_0^2}}$$

δηλαδή το πλάτος του σήματος να ικανοποιεί την ανισότητα:

$$F_s \gg \frac{\sigma^2}{\sqrt{4mk_B T}} = \gamma\ \sqrt{4mk_B T}.$$

2. Σύστημα εκτελεί μικρές ταλαντώσεις με εξίσωση $M\ddot{x} + Kx = 0$ όπου M, K είναι 2×2 πραγματικοί πίνακες και x η κατάσταση του ταλαντωτή που προσδιορίζεται από τη κολώνα που σχηματίζεται από τις τιμές των μετατοπίσεων των δύο συντεταγμένων του ταλαντωτή: $x = [x_1, x_2]^T$. Η δυναμική αυτή παράγεται από σύστημα το οποίο επιδέχεται Λαγκραντζιανή περιγραφή.

(α) Προσδιορίστε μία Λαγκραντζιανή συνάρτηση που παράγει αυτή τη δυναμική. Δείξτε ότι οι πίνακες M και K πρέπει να ληφθούν συμμετρικοί. **[10]**

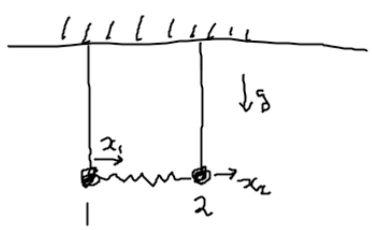
(β) Δείξτε ότι αν υπάρχει μετασχηματισμός με πίνακα S ο οποίος μετατίθεται με τους πίνακες M και K και οι ιδιοκαταστάσεις του S δεν είναι εκφυλισμένες τότε οι ιδιοκαταστάσεις του S είναι οι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος. Εξηγήστε γιατί ο S μπορεί να θεωρηθεί ως διακριτή συμμετρία του συστήματος. **[20]**

(γ) Προσδιορίστε συμμετρία S συστήματος με τους εξής πίνακες

$$M = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\; K = m \begin{pmatrix} \omega_g^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_g^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} .$$

Οι πίνακες M και K περιγράφουν τη δυναμική των εκκρεμών στο Σχ. 1. Μέσω της S προσδιορίστε και σχεδιάστε τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος καθώς και τις αντίστοιχες χαρακτηριστικές συχνότητες. **[30]**

(δ) Φασματική ανάλυση της κίνησης του συστήματος προσδιορίζει ότι η μία χαρακτηριστική συχνότητα έχει πλάτος A ενώ η δεύτερη B. Από τα στοιχεία αυτά προσδιορίστε τη χρονική εξέλιξη της κατάστασης του ταλαντωτή και προσδιορίστε την ενέργειά του. Από όλες τις αρχικές συνθήκες με $A^2 + B^2 = L^2$ ποιά αρχική συνθήκη οδηγεί σε ελάχιστη ενέργεια ταλάντωσης και ποιά σε μέγιστη. **[10]**



Σχήμα 1: Δύο εκκρεμή ίδιας μάζας και μήκους l είναι συνδεμένα με ένα ελατηριο σταθεράς k και εκτελούν επίπεδες κινήσεις στο πεδίο βαρύτητας έντασης g. Η συχνότητα ταλάντωσης κάθε εκκρεμούς λόγω της βαρύτητας είναι $\omega_g^2 = g/l$ και $\omega_0^2 = k/m$ λόγω του ελατηρίου.

Λύση: (α) $L = 1/2(\dot{x}^T M\dot{x} - x^T K x)$. Οι πίνακες M και K μπορούν να αναλυθούν στον συμμετρικό και αντισυμμετρικό τους: $M = M_s + M_a$ και $K = K_s + K_a$. Το αντισυμμετρικό μέρος, όμως, δεν συμβάλει στη δυναμική, διότι είναι $\dot{x}^T M_a \dot{x} = 0$ και $x^T K_a x = 0$. Συνεπώς μόνο τα συμμετρικά τμήματα έχουν επίπτωση στη δυναμική και οι πίνακες M και K όταν εμφανίζονται σε άλλες εκφράσεις από τη Λαγκραντζιανή πρέπει να λαμβάνονται ως συμμετρικοί.

(β) Οι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης είναι οι ιδιοκαταστάσεις του $M^{-1}K$. Αν $[M,S] = 0$ και $[K,S] = 0$ τότε και $[M^{-1}K, S] = 0$ (αν $[M,S] = 0$ θα είναι και $[M^{-1}, S] = 0$. Πράγματι: η $MS = SM$ είναι ισοδύναμη με την $SM^{-1} = M^{-1}S$, εφόσον υπάρχει ο αντίστροφος). Έτσι $M^{-1}KS = M^{-1}SK = SM^{-1}K$. Θα δείξουμε τώρα ότι οι ιδιοκαταστάσεις του S είναι και ιδιοκαταστάσεις του $M^{-1}K$, εφόσον ο S δεν έχει εκφυλισμένες ιδιοκαταστάσεις, δηλαδή ο χώρος που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή έχει μοναδιαία διάσταση. Αν λοιπόν $Sx = \lambda x$ τότε διαδοχικά $M^{-1}KSx = \lambda M^{-1}Kx$ και $S(M^{-1}Kx) = \lambda(M^{-1}Kx)$ που σημαίνει ότι αν x είναι ιδιοκτάσταση του S με ιδιοτιμή λ και το $(M^{-1}Kx)$ είναι ιδιοκατάσταση του S με την ίδια τιμή. Επειδή όμως, όπως υποθέσαμε ο χώρος των ιδιοκατάστασεων με ιδιοτιμή λ είναι μονοδιάστατος, θα είναι το $M^{-1}Kx$ γραμμικά εξαρτημένο από το x και συνεπώς θα είναι το x ιδιοκατάσταση του $M^{-1}K$ διότι θα υπάρχει μ έτσι ώστε $M^{-1}Kx = \mu x$.

Αν $[M,S] = 0$ και $[K,S] = 0$ το S θεωρείται διακριτή συμμετρία διότι αν η x ικανοποιεί την $M\ddot{x} + Kx = 0$ τότε και η Sx θα την ικανοποιεί.

(γ) Οι μετασχηματισμοί $x_1 \to -x_2$, $x_2 \to -x_1$ και $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_1$ με πίνακες

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

είναι συμμετρίες διότι είναι $[M,S] = 0$ $[K,S] = 0$. Οι δύο συμμετρίες δεν είναι προφανώς ανεξάρτητες, αλλά έχουν διαφορετικό φυσικό περιεχόμενο. Ο μεν πρώτος μετασχηματισμός αντιστοιχεί σε κατοπτρισμό των μετατοπίσεων των εκκρεμών, ενώ ο δεύτερος σε ανταλλαγή των σωματιδίων με τις μετατοπίσεις τους. Είναι συμμετρίες διότι αν $[x_1(t), x_2(t)]^T$ είναι λύση των εξισώσεων κίνησης και η $[\mp x_2(t), \mp x_1(t)]^T$ θα είναι επίσης. Πράγματι οι εξισώσεις που ικανοποιούν οι $[x_1(t), x_2(t)]^T$ είναι

$$\ddot{x}_1 + (\omega_g^2 + \omega_0^2)x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \;,\; \ddot{x}_2 + (\omega_g^2 + \omega_0^2)x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0\,,$$

οι οποίες ικανοποιούνται αν αντικαταστήσουμε $x_1 \to \mp x_2$ και $x_2 \to \mp x_1$.

Οι ιδιοκαταστάσεις των S είναι οι $[1,1]^T$ και $[1,-1]^T$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές ∓ 1 και 0, συνεπώς αυτές είναι και οι ιδιοκαταστάσεις του συστήματος με χαρακτηριστικές συχνότητες αντίστοιχα: ω_g^2, $\omega_g^2 + 2\omega_0^2$. Η ταλάντωση χαμηλότερης ενέργειας είναι η $[1,1]^T$.

(δ) Η γενική λύση είναι

$$x = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(\omega_g t + \theta_1) + B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos(\omega_2 t + \theta_2),$$

όπου $\omega_2 = \sqrt{\omega_g^2 + 2\omega_0^2}$. Η ενέργεια είναι αν $A^2 + B^2 = L^2$:

$$E = \frac{m}{2}(\omega_g^2 A^2 + (\omega_g^2 + 2\omega_0^2)B^2)\ ,$$

και είναι

$$\frac{m}{2}(\omega_g^2 + 2\omega_0^2)L^2 \geq E \geq \frac{m}{2}\omega_g^2 L^2\ .$$

Η ελάχιστη ενέργεια επιτυγχάνεται αν διεγερθεί μόνο η ταλάντωση με την μικρότερη συχνότητα ($B = 0$), με αρχικές συνθήκες π.χ. $x(0) = L\cos(\theta_1)[1,1]^T$, $\dot{x}(0) = -\omega_g L\sin(\theta_1)[1,1]^T$, $\forall\theta_1 \in [0, 2\pi)$.

3. Ελαστικό νήμα υπό τάση είναι στερεωμένο στα δύο άκρα του, A και B, στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας a και εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις επί της επιφανείας της σφαίρας (βλ. Σχήμα 2). Στην κατάσταση ισορροπίας το νήμα κείται επί του μέγιστου κύκλου, μήκους l, που συνδέει τα A και B. Την κίνηση του ελαστικού νήματος περιγράφουμε με σφαιρικές πολικές συντεταγμένες όπου φ είναι η αζιμουθιακή συντεταγμένη και θ η συμπληρωματική της πολικής γωνίας, έτσι ώστε στην κατάσταση ισορροπίας το νήμα να είναι στη θέση $\theta(\varphi) = 0$ με $\varphi \in [0, l/a]$, ενώ η "εγκάρσια" μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του μεσημβρινού του σημείου φ του νήματος είναι $\theta(\varphi, t)$. Το ελαστικό νήμα μπορεί να θεωρηθεί σημειακό και ομογενές με σταθερή γραμμική πυκνότητα ρ. Θεωρούμε μόνο μικρές εγκάρσιες κινήσεις από την κατάσταση ισορροπίας με την τάση, T, σταθερή κατά την κίνηση.

(α) Εξηγήστε τον λόγο που στην κατάσταση ισορροπίας το νήμα πρέπει να κείται επί μέγιστου κύκλου. **[10]**

(β) Δείξτε ότι η Λαγκραντζιανή πυκνότητα που διέπει μικρές εγκάρσιες ταλαντώσεις είναι

$$\mathcal{L} = \frac{a^3\rho}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{aT}{2}\left(\theta'^2 - \theta^2\right) \ , \ \dot{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \theta}{\partial t} \ , \ \theta' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \ .$$

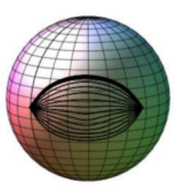
και γράψτε την εξίσωση κίνησης του ελαστικού νήματος. **[20]**

(γ) Συνεχείς μεταθέσεις στον χρόνο είναι συμμετρία της Λαγκραντζιανής. Προσδιορίστε το αντιστοιχούν φορτίο και ρεύμα Noether και επιβεβαιώστε τη διατήρηση του. **[10]**

(δ) Προσδιορίστε τους κανονικούς τρόπους και τις χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης όταν $l/a < \pi$. Ποιά είναι η θεμελιώδης συχνότητα; Πως έχουν μεταβληθεί οι χαρακτηριστικές συχνότητες από την καμπυλότητα; **[10]**

(ε) Γράψτε την $\theta(\varphi, t)$ στη βάση των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης και προσδιορίστε την ολική ενέργεια του ελαστικού νήματος όταν εκτελεί μια γενική κίνηση. **[10]**

(στ) Ποιά η θεμελιώδης συχνότητα όταν $l/a = \pi$; Τι συμβαίνει όταν είναι $l/a > \pi$; Είναι αναμενόμενο αυτό που βρήκατε; **[10]**



Σχήμα 2: Η θεμελιώδης ταλάντωση ελαστικού νήματος στην επιφάνεια της σφαίρας. Με τι συχνότητα ταλαντώνεται;

Λύση:

(α) Η δυναμική ενέργεια είναι ανάλογη του μήκους του ελαστικού. Στην κατάσταση ισορροπίας η δυναμική ενέργεια θα είναι ελάχιστη, συνεπώς το νήμα πρεπει να βρίσκεται επί της γεωδαισιακής της επιφάνειας ώστε να ελαχιστοποιείται το μήκος του ελαστικού νήματος.

(β) Η κινητική ενέργεια του ελαστικού είναι

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{l/a} ad\varphi\, \rho(a\dot{\theta})^2$$

Εκτός ισορροπίας το στοιχειώδες μήκος τόξου σε προσέγγιση δεύτερης τάξης είναι:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(ad\theta)^2 + (a\cos\theta d\varphi)^2} \\ &= ad\varphi\sqrt{\theta'^2 + \cos^2\theta} \\ &\approx ad\varphi\sqrt{1-\theta^2+\theta'^2} \\ &\approx ad\varphi\left(1+\frac{\theta'^2}{2}-\frac{\theta^2}{2}\right) . \end{aligned}$$

Συνεπώς η δυναμική ενέργεια στην αντίστοιχη προσέγγιση είναι:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{l/a} T(ds - ad\varphi) \\ &\approx \int_0^{l/a} aTd\varphi\left(\frac{\theta'^2}{2}-\frac{\theta^2}{2}\right) , \end{aligned}$$

και η Λαγκραντζιανή πυκνότητα μικρών ταλαντώσεων επί της σφαίρας:

$$\mathcal{L} = \frac{a^3\rho}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{aT}{2}\left(\theta'^2-\theta^2\right) .$$

Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$\rho a^2\ddot{\theta} - T(\theta'' + \theta) = 0 .$$

(γ) Η πυκνότητα ενέργειας είναι

$$\begin{aligned} j^0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta} - \mathcal{L} \\ &= \frac{a^3\rho}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{aT}{2}\left(\theta'^2-\theta^2\right) , \end{aligned}$$

και το ρεύμα ενέργειας:

$$\begin{aligned} j^1 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta'}\dot{\theta} \\ &= -aT\dot{\theta}\,\theta' . \end{aligned}$$

Τα οποία και ικανοποιούν τον νόμο διατήρησης:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial j^0}{\partial t} + \frac{\partial j^1}{\partial \varphi} &= a^3 \rho \dot{\theta} \ddot{\theta} + aT(\cancel{\theta' \dot{\theta}'} - \theta \dot{\theta}) - aT \cancel{\dot{\theta}' \theta'} - aT \dot{\theta} \theta'' \\
&= aT \dot{\theta}(\theta'' + \theta) - aT(\theta \dot{\theta} + \dot{\theta} \theta'') \\
&= 0 \, .
\end{aligned}
$$

(δ) Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης έχουν την μορφή $\theta = \hat{\theta}(\varphi) \;\; e^{-i\omega t}$ με το $\hat{\theta}(\varphi)$ να πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$
\hat{\theta}'' + \left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{c^2}\right) \hat{\theta} = 0 \;\; \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}(l/a) = 0,
$$

με $c^2 = T/\rho$. Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι:

$$
\hat{\theta}_n = A \sin\left(\frac{n a \pi}{l} \varphi\right) \;\; , \;\; n = 1, 2, \ldots
$$

και οι χαρακτηριστικές συχνότητες

$$
\omega_n = \frac{c}{l} \sqrt{n^2 \pi^2 - \frac{l^2}{a^2}} \;\; , \;\; n = 1, 2, \ldots
$$

Οι τόνοι γίνονται χαμηλότερης συχνότητας, και ιδίως τα μπάσα. Όταν $a \to \infty$ ανακτούμε τις χαρακτηριστικές συχνότητες στον επίπεδο χώρο. Η θεμελιώδης συχνότητα είναι

$$
\omega_1 = \frac{c}{l} \sqrt{\pi^2 - \frac{l^2}{a^2}} \;\; ,
$$

που απαιτεί το μήκος τόξου να είναι μικρότερο από το μισό μήκος του ισημερινού: $l < a\pi$.

(ε)

$$
\theta(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \; A_n \sin\left(\frac{n a \pi}{l} \varphi\right) \cos(\omega_n t + \psi_n) \, .
$$

Επειδή

$$
\int_0^{l/a} d\varphi \, \theta^2 = \frac{l}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \; A_n^2 \cos^2(\omega_n t + \psi_n) \, ,
$$

η συνολική ενέργεια είναι

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\rho a^3}{2} \int_0^{l/a} d\varphi \, \dot{\theta}^2 + \frac{aT}{2} \int_0^{l/a} d\varphi \; \left(\theta'^2 - \theta^2\right) \\
&= \frac{\rho l a^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \; A_n^2 \omega_n^2 \, .
\end{aligned}
$$

(στ) Όταν $l/a = \pi$ το μήκος της χορδής δεν αλλάζει και η θεμελιώδης συχνότητα είναι μηδενική. Όταν $l > a\pi$ η θεμελιώδης συχνότητα γίνεται μιγαδική, που σημαίνει ότι η κατάσταση ισορροπίας είναι ασταθής. Αυτό είναι αναμενόμενο διότι όταν το νήμα τεντωθεί σε μήκος μεγαλύτερο από το μισό μήκος του ισημερινού το μήκος του τόξου δεν είναι ελάχιστο και η ισορροπία είναι ασταθής.