Συμμετρίες και θεώρημα της Noether

18 Δεκεμβρίου 2023

1 Εισαγωγή

Θεωρούμε ένα σύστημα πεδίων $\varphi_A(\mathbf{x})$, $A = 1, \cdots, N$, όπου $\mathbf{x}$ το σημείο στο χωρόχρονο με συντεταγμένες x^μ, όπου $x^0 = t$, $x^1 = x$; $x^2 = y$, $x^3 = z$. Η μετρική του χώρου είναι

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{cases} \;\;1 \quad \text{όταν} \quad \mu = \nu = 0 \\ -1 \quad \text{όταν} \quad \mu = \nu = 1,2,3 \\ 0 \quad \text{όταν} \quad \mu \neq \nu \end{cases}$$

έτσι ώστε το μέτρο $x_\mu x^\mu$ να παραμένει αναλλοίωτο στους μετασχηματισμούς Lorentz ($c = 1$). Εδώ η συναλλοίωτη συντεταγμένη x_μ προσδιορίζεται από $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ έτσι ώστε $x_0 = t$, $x_1 = -x$; $x_2 = -y$, $x_3 = -z$. Τα ίδια ισχύουν και για όλα τα τετραδιανύσματα και τους αντίστοιχους τανυστές και η αθροιστική σύμβαση θα χρησιμοποιείται παντού. Ο πίνακας με στοιχεία $g_{\mu\nu}$ είναι ο αντίστροφος του πίνακα με στοιχεία $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = g_{\nu\alpha} g^{\alpha\mu} = \delta^\mu_\nu \ ,$$

όπου δ^μ_ν τα στοιχεία του μοναδιαίου πίνακα. Θα χρησιμοποιήσουμε τη σύμβαση όπου οι μεν ελληνικοί δείκτες $\mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \ldots$ επαναλαμβανόμενοι υπονοούν άθροισμα επί των χωροχρονικών συνιστωσών $0, 1, 2, 3$, ενώ επαναλαμβανόμενοι λατινικοί δείκτες $i, j, k, l, \ldots$ υπονοούν άθροισμα επί των χωρικών συνιστωσών $1, 2, 3$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό της ποσότητας

$$S = \int_\Omega d^4x \ \ \mathcal{L}(\varphi_A, \partial_\mu \varphi_A, x^\mu) \ , \tag{1}$$

στους συνεχείς μετασχηματισμούς με παράμετρο ε:

$$x'^\mu \quad = \quad x^\mu + \varepsilon \xi^m (x^\mu) \ , \tag{2}$$

$$\varphi'_A \quad = \quad \varphi_A + \varepsilon \psi_A \ \ , \tag{3}$$

ενός πεδίου φ_A που ικανοποιεί τις πεδιακές Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_A)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A} = 0 \quad , A = 1, \cdots, N \ . \tag{4}$$

Το Ω είναι ένα τυχαίο χωρίο του χωρόχρονου και δεν καλύπτει αναγκαστικά όλη τη χωρική έκταση του φυσικού συστήματος. Σημειώνουμε ότι οι μετασχηματισμοί των πεδίων (3) προσδιορίζουν πως μετασχηματίζονται τα πεδία στο ίδιο σημείο του χωρόχρονου.

Αν η ποσότητα (1) είναι αναλλοίωτη στους συνεχείς μετασχηματισμούς (2) και (3) πεδίων που ικανοποιούν τις πεδιακές εξισώσεις (4) για κάθε χωροχρονικό χωρίο Ω, τότε οι μετασχηματισμοί (2) και (3) αποτελούν συμμετρία του συστήματος και σε αυτήν την συμμετρία αντιστοιχεί διατηρούμενο ρεύμα j^μ που ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \ . \tag{5}$$

Το ρεύμα j^μ ονομάζεται ρεύμα Noether. Αυτή είναι το πεδιακό θεώρημα της Noether.

Η ύπαρξη ρεύματος που ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας συνεπάγεται τη διατήρηση της ποσότητας

$$Q = \int_V j^0 d^3x \ , \tag{6}$$

όπου V είναι όλο το χωρικό μέρος του χωροχρονικού χωρίου που καταλαμβάνει το φυσικό σύστημα. Η ποσότητα Q ονομάζεται και φορτίο Noether.

Καταλήγουμε στη διατήρηση (6) διότι η εξίσωση συνέχειας (5) έχει τη 3-διάστατη διανυσματική μορφή

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0 \ , \tag{7}$$

όπου

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial j^i}{\partial x^i} \ .$$

Αν θεωρήσουμε κάποιο σταθερό χωρικό χωρίο $\mathcal{D}$ τότε από την (7) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} d^3x \, \frac{\partial j^0}{\partial t} &= -\int_{\mathcal{D}} d^3x \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} \\ &= -\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \ , \end{aligned}$$

όπου S η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο $\mathcal{D}$ και $d\mathbf{S}$ το στοιχείο επιφάνειας με διεύθυνση την προς το εξωτερικό του χωρίου κάθετο επί του στοιχείου της επιφάνειας. Και επειδή ο όγκος είναι χρονικά σταθερός, μπορεί να εξάγουμε την χρονική μερική παράγωγο εκτός του χωρικού ολοκληρώματος καταλήγοντας στην

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathcal{D}} d^3x \, j^0 \right) = -\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \ ,$$

η οποία εκφράζει ότι η χρονική μεταβολή της ολικής ποσότητας του j^0 που βρίσκεται σε κάθε δοθέν χωρίο $\mathcal{D}$ αντισταθμίζεται ακριβώς από τη ροή του ρεύματος $\mathbf{j}$ που εισέρχεται στο χωρίο $\mathcal{D}$. Δηλαδή δεν υπάρχουν ούτε πηγές ούτε καταβόθρες οι οποίες μπορούν να μεταβάλουν την ολική ποσότητα του j^0 στο $\mathcal{D}$ και συνεπώς αν ολοκληρώσουμε την ποσότητα του j^0 σε όλο τον χώρο θα ισχύει ο νόμος διατήρησης

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_V j^0 d^3x\right) = 0\,, \tag{8}$$

όπου τώρα ο όγκος V είναι όλος ο χωρικός όγκος του φυσικού συστήματος, υπό την προϋπόθεση ότι τα πεδία μηδενίζονται στο σύνορο του χωρίου.

Σημειώνουμε ότι οι μετασχηματισμοί των συντεταγμένων των πεδίων που προσδιορίζονται από την (2) είναι αντίστοιχοι των μετασχηματισμών της χρονικής κλίμακας

$$t' = t + \varepsilon\tau(q_A, t)\,,\; A = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

που εξετάσαμε στο σωματιδιακό θεώρημα της Noether, ενώ οι μετασχηματισμοί των πεδίων (3) αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς

$$q'_A = q_A + \varepsilon K_A(q_A, t)\,,\; A = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

των συντεταγμένων της Λαγκρανζιανής στη σωματιδιακή θεώρηση.

1.1 Η ταυτότητα της Noether

Θα δείξουμε ότι σε κάθε μετασχηματισμό (2), (3) πεδίων που ικανοποιούν τις εξισώσεις (4) ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της δράσης ως προς την παράμετρο του μετασχηματισμού ε ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\left.\frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \;=\; \int_\Omega d^4x\;\partial_\nu j^\nu\,, \tag{11}$$

με το εξής ρεύμα j^ν:

$$j^\nu = \psi_A \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_A)} - \xi^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_A)}\partial_\mu\varphi_A - \mathcal{L}\delta^\nu_\mu\right)\,, \tag{12}$$

με αθροιστική σύμβαση ως προς τα A. Σημειώνουμε ότι η ταυτότητα αυτή ισχύει για κάθε μετασχηματισμό (2), (3) και δεν απαιτείται ο μετασχηματισμός να είναι συμμετρία.

Είναι χρήσιμο να σημειώσουμε την παράλληλη ταυτότητα που ισχύει στην περίπτωση της σωματιδιακής θεώρησης. Για τους μετασχηματισμούς (9), (10) της δράσης σωματιδίων ισχύει η αντίστοιχη στην (11) ταυτότητα:

$$\left.\frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \;=\; \int_{t_1}^{t_2} dt\;\frac{dq}{dt}\,, \tag{13}$$

με το εξής φορτίο q:

$$q = K_A\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_A} - \tau\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_A}\dot{q}_A - L\right)\,. \tag{14}$$

Η απόδειξη της ταυτότητας ακολουθεί τα ίδια βήματα που ακολουθήσαμε στην απόδειξη της σωματιδιακής ταυτότητας. Η μετασχηματισμένη δράση είναι

$$S' = \int_{\Omega'} d^4x' \;\; \mathcal{L}(\varphi'_A, \partial'_\mu \varphi'_A, x'^\mu) \; ,$$

όπου Ω' είναι ο μετασχηματισμός του χωρίου Ω στον μετασχηματισμό $x^\mu \to x'^\mu$, και ∂' είναι η παράγωγος ως προς x'^μ. Αλλάζοντας μεταβλητές στο ολοκλήρωμα από x'^μ σε x^μ η μετασχηματισμένη δράση μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ολοκλήρωμα στο αρχικό χωρίο:

$$S' = \int_{\Omega'} d^4x' \;\; \mathcal{L}(\varphi'_A, \partial'_\mu \varphi'_A, x'^\mu) \;\; = \;\; \int_{\Omega} d^4x \;\; J\, \mathcal{L}\left(\varphi'_A, \partial_\nu \varphi'_A \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}, x'^\mu\right) \; ,$$

όπου J η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού από $x^\mu \to x'^\mu$:

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| \\ &= \left| \delta^\mu_\nu + \varepsilon \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \right| \\ &= 1 + \varepsilon \partial_\alpha \xi^\alpha + O(\varepsilon^2) \; . \end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι σε πρώτη τάξη ως προς ε ο αντίστροφος του πίνακα με στοιχεία

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \varepsilon \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}$$

είναι ο πίνακας με στοιχεία

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu_\nu - \varepsilon \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \; .$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} &= \left(\delta^\mu_\alpha + \varepsilon \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \left(\delta^\alpha_\nu - \varepsilon \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \delta^\mu_\alpha \delta^\alpha_\nu + \varepsilon \left(\delta^\alpha_\nu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} - \delta^\mu_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \right) + O(\varepsilon^2) \\ &= \delta^\mu_\nu + \varepsilon \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \right) + O(\varepsilon^2) \\ &= \delta^\mu_\nu + O(\varepsilon^2) \; . \end{aligned}$$

Η δράση S' που προκύπτει από τους μετασχηματισμούς (2) και (3) είναι συνάρτηση του ε με το εξής ανάπτυγμα σε σειρά Taylor ως προς ε:

$$\begin{aligned}
S' &= \int_\Omega d^4x \;\, J\, \mathcal{L}\left(\varphi'_A, \partial_\nu \varphi'_A \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}, x'^\mu\right) \\
&= \int_\Omega d^4x \,(1 + \varepsilon \partial_\alpha \xi^\alpha + O(\varepsilon^2))\mathcal{L}(\varphi_A + \varepsilon\psi_A, (\partial_\nu\varphi_A + \varepsilon\partial_\nu\psi_A)(\delta^\nu_\mu - \varepsilon\partial_\mu\xi^\nu + O(\varepsilon^2)), x^\mu + \varepsilon\xi^\mu) \\
&= \int_\Omega d^4x \;\, \left[\mathcal{L}(\varphi_A + \varepsilon\psi_A, \partial_\mu\varphi_A + \varepsilon(\partial_\mu\psi_A - \partial_\nu\varphi_A\partial_\mu\xi^\nu), x^\mu + \varepsilon\xi^\mu) + \varepsilon(\partial_\alpha\xi^\alpha)\mathcal{L}(\varphi_A, \partial_\mu\varphi_A, x^\mu)\right] + O(\varepsilon^2) \\
&= S + \varepsilon\int_\Omega d^4x \;\, \left[\psi_A\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_A} + (\partial_\mu\psi_A - \partial_\nu\varphi_A\partial_\mu\xi^\nu)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)} + \xi^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} + (\partial_\mu\xi^\mu)\mathcal{L}\right] + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Εξ'αυτού συμπεραίνουμε ότι

$$\left.\frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_\Omega d^4x \;\, \left[\psi_A\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_A} + (\partial_\mu\psi_A - \partial_\nu\varphi_A\partial_\mu\xi^\nu)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)} + \xi^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} + (\partial_\mu\xi^\mu)\mathcal{L}\right] . \tag{15}$$

Ακόμα δεν έχουμε χρησιμοποιήσει ότι τα πεδία εξελίσσονται σύμφωνα με τις πεδιακές εξισώσεις Euler-Lagrange . Επειδή η φ_A ικανοποιεί την (4) η ολοκληρωτέα ποσότητα στην (15) είναι ίση με:

$$\begin{aligned}
&\psi_A\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_A} + (\partial_\mu\psi_A - (\partial_\nu\varphi_A)\partial_\mu\xi^\nu)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)} + \xi^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} + (\partial_\mu\xi^\mu)\mathcal{L} = \\
&\psi_A\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)}\right) + \partial_\mu\psi_A\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)} - (\partial_\nu\varphi_A)(\partial_\mu\xi^\nu)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)} + \xi^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} + (\partial_\mu\xi^\mu)\mathcal{L} \\
&\partial_\mu\left(\psi_A\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)}\right) - (\partial_\nu\varphi_A)(\partial_\mu\xi^\nu)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)} + \xi^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} + (\partial_\mu\xi^\mu)\mathcal{L} \,.
\end{aligned}$$

Στην παραπάνω έκφραση είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η παράγωγος

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi_A,\partial_\mu\varphi} ,$$

είναι η μερική παράγωγος ως προς x^μ και όχι η ολική (στην οποία λαμβάνεται υπόψη και η μεταβολή των πεδίων σε μεταβολές στις x^μ), ενώ η

$$\partial_\mu\left(\psi_A\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)}\right) ,$$

είναι η ολική παράγωγος ως προς x^μ. Για να μετατρέψουμε την υπολειπόμενη ποσότητα

$$\xi^\mu \left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi_A,\partial_\mu\varphi} + (\partial_\mu\xi^\mu)\mathcal{L} - (\partial_\nu\varphi_A)(\partial_\mu\xi^\nu)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)} , \tag{16}$$

σε απόκλιση παρατηρούμε ότι η ολική παράγωγος της Λαγκρανζιανής πυκνότητας είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi_A, \partial_\mu \varphi} + (\partial_\mu \varphi_A)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A} + (\partial_\mu(\partial_\nu \varphi_A))\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)} \\
&= \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi_A, \partial_\mu \varphi} + (\partial_\mu \varphi_A)\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\right) + (\partial_\mu(\partial_\nu \varphi_A))\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)} \\
&= \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi_A, \partial_\mu \varphi} + (\partial_\mu \varphi_A)\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\right) + (\partial_\nu(\partial_\mu \varphi_A))\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)} \\
&= \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi_A, \partial_\mu \varphi} + \partial_\nu \left(\partial_\mu \varphi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\right) ,
\end{aligned}$$

και η (16) γίνεται

$$\begin{aligned}
&\xi^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \xi^\mu \partial_\nu \left(\partial_\mu \varphi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\right) + (\partial_\mu \xi^\mu)\mathcal{L} - (\partial_\nu \varphi_A)(\partial_\mu \xi^\nu)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_A)} \\
&= \partial_\mu(\xi^\mu \mathcal{L}) - \xi^\mu \partial_\nu \left(\partial_\mu \varphi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\right) - (\partial_\nu \xi^\mu)\left(\partial_\mu \varphi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\right) \\
&= \partial_\nu \left(\xi^\mu \left(\mathcal{L}\delta^\nu_\mu - \partial_\mu \varphi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\right)\right) .
\end{aligned}$$

Τελικά καταλήγουμε στην ταυτότητα της Noether:

$$\begin{aligned}
&\psi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A} + (\partial_\mu \psi_A - \partial_\nu \varphi_A \partial_\mu \xi^\nu)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_A)} + \xi^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} + (\partial_\mu \xi^\mu)\mathcal{L} \\
&= \partial_\nu \left(\psi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)} - \xi^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}\partial_\mu \varphi_A - \mathcal{L}\delta^\nu_\mu\right)\right) ,
\end{aligned}$$

η οποία και ολοκληρώνει την απόδειξη της (11).

Αν τέλος οι μετασχηματισμοί (2) (3) είναι συμμετρία, δηλαδή η δράση δεν αλλάζει σε πρώτη τάξη, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της δράσης

$$S = \int_\Omega d^4x \;\; \mathcal{L}(\varphi_A, \partial_\mu \varphi, x^\mu) ,$$

ως προς την παράμετρο του μετασχηματισμού είναι μηδενικός για κάθε χωροχρονικό χωρίο Ω:

$$\left.\frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 , \tag{17}$$

τότε λόγω της ταυτότητας (11) το ρεύμα j^ν πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας

$$\partial_\nu j^\nu = 0 , \tag{18}$$

και συνεπώς το φορτίο

$$Q = \int_V j^0 d^3x, \tag{19}$$

όπου ο όγκος V είναι όλος ο χωρικός όγκος του φυσικού συστήματος, να διατηρείται κατά την εξέλιξη υπό την προϋπόθεση ότι τα πεδία μηδενίζονται στο σύνορο του χωρίου ή τείνουν με αρμόζοντα ρυθμό στο μηδέν άν ο χώρος είναι άπειρος.