

Κεφάλαιο 10

Ο Χώρος των Φάσεων

“Πολύ παράξενη, είπε, είναι η εικόνα που μου παρουσιάζεις και οι δεσμώτες σου παράξενοι. Όμοιοι με μας είναι, είπα εγώ· και πρώτα-πρώτα, πιστεύεις πως τέτοιοι δεσμώτες, εκτός του εαυτού τους και των συντρόφων τους, έχουν δει τίποτε άλλο εκτός από τις σκιές που προβάλλονται, λόγω της φωτιάς, στον αντικρινό τοίχο του σπηλαίου;”
Πλάτωνας

10.1 Εισαγωγή

Στη χαμιλτονιανή θεώρηση η εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος διαδραματίζεται στο χώρο των φάσεων (q, p) . Όπως έχουμε αναφέρει, για ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας ο χώρος των φάσεων είναι ένας χώρος $2n$ διαστάσεων. Η δυναμική κατάσταση του συστήματος δίνεται από ένα σημείο του χώρου αυτού και προσδιορίζεται από τις n συντεταγμένες των γενικευμένων θέσεων q και τις n συντεταγμένες των γενικευμένων ορμών p . Διαφορετικές καταστάσεις του δυναμικού συστήματος αντιστοιχούν αναγκαστικά σε διαφορετικά σημεία του χώρου των φάσεων.

Κάθε σημείο του χώρου των φάσεων προσδιορίζει πλήρως την κατάσταση του συστήματος και σε κάθε χρονική στιγμή οι κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (10.1)$$

προσδιορίζουν επακριβώς τα σημεία του χώρου των φάσεων στα οποία το σύστημα θα μεταβεί τις επόμενες χρονικές στιγμές ή τα σημεία του χώρου των φάσεων στα οποία το σύστημα βρισκόταν στο παρελθόν. Αυτό ισχύει, διότι οι εξισώσεις του Χάμιλτον είναι πρώτης τάξης και επομένως η αρχική θέση στο χώρο των φάσεων είναι αρκετή για να καθοριστεί πλήρως η τροχιά στο μέλλον και στο παρελθόν. Πράγματι, αν το σύστημα βρίσκεται αρχικά σε κάποιο σημείο του χώρου των φάσεων, η διαφορική μεταβολή της θέσης και της ορμής του συστήματος στο χώρο των φάσεων

Η αρχική θέση μόνο καθορίζει το μέλλον και το παρελθόν

είναι

$$dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt, \quad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt, \quad (10.2)$$

οπότε, η νέα θέση και ορμή είναι κατά προσέγγιση¹ ίση με

$$\begin{aligned} q_i(t + \delta t) &= q_i(t) + \delta t \left. \frac{\partial H}{\partial p_i} \right|_{q(t), p(t)}, \\ p_i(t + \delta t) &= p_i(t) - \delta t \left. \frac{\partial H}{\partial q_i} \right|_{q(t), p(t)}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζεται βήμα προς βήμα η τροχιά του συστήματος στο χώρο των φάσεων, η οποία προσδιορίζει πλήρως την κατάσταση του συστήματος σε όλους τους χρόνους.

Στη συνέχεια της μελέτης μας θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση που η Χαμιλτονιανή H δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο t , είναι δηλαδή συνάρτηση μόνο των θέσεων και των ορμών $H(q, p)$. Εξάρτηση της Χαμιλτονιανής από το χρόνο παρατηρείται, όταν το φυσικό σύστημα που μελετούμε δεν είναι απομονωμένο και δέχεται κάποια χρονοεξαρτώμενη επίδραση. Χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα είναι η μελέτη της κίνησης ενός εξαναγκασμένου αρμονικού ταλαντωτή. Τα θεμελιώδη φυσικά συστήματα έχουν χρονοανεξάρτητη Λαγκρανζιανή λόγω της συνήθους υπόθεσης ότι ο φυσικός κόσμος είναι ομογενής στο χρόνο και, συνεπώς, η χαμιλτονιανή συνάρτηση αυτών είναι χρονοανεξάρτητη. Εντούτοις, για λόγους πληρότητας και εξαιτίας του ότι δεν αποκλείσαμε και στη λαγκρανζιανή θεώρηση τη χρονική εξάρτηση, θα ασχοληθούμε στο παρόν κεφάλαιο και με χρονοεξαρτώμενες Χαμιλτονιανές.

Όταν η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από το χρόνο, σε κάθε σημείο του χώρου των φάσεων αντιστοιχεί μόνο μία τροχιά: πρόκειται γι' αυτήν η οποία βαίνει προς τη διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας του συστήματος στο χώρο των φάσεων:²

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Το διάνυσμα αυτό καθορίζει το ρυθμό μεταβολής των θέσεων και των ορμών σε κάθε σημείο του χώρου των φάσεων. Μπορούμε, έτσι, να φανταστούμε όλο το χώρο των φάσεων ως μια ροή κάποιου υποθετικού ρευστού

¹Η προσέγγιση στις παραπάνω σχέσεις έγκειται στο ότι οι παράγωγοι της Χαμιλτονιανής υπολογίστηκαν στο αρχικό σημείο. Από το θεώρημα της μέσης τιμής γνωρίζουμε ότι οι σχέσεις είναι ακριβείς, αν οι παράγωγοι υπολογιστούν σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο της τροχιάς $(q(t + \theta\delta t), p(t + \theta\delta t))$ με $0 \leq \theta \leq 1$. Τα ενδιάμεσα σημεία δεν είναι, όμως, γνωστά και γι' αυτό καταφύγαμε σε αυτή την προσέγγιση, η οποία ονομάζεται και ολοκλήρωση κατά Euler και καθίσταται ακριβής στο όριο $\delta t \rightarrow 0$. Υπάρχουν ακριβέστεροι τρόποι αριθμητικής ολοκλήρωσης, στους οποίους, όμως, θα αναφερθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

²Η κατάσταση είναι ανάλογη με την αριστοτέλεια μηχανική σύμφωνα με την οποία κάποιο αίτιο –εδώ οι παράγωγοι της Χαμιλτονιανής– προκαλεί άμεσα την ταχύτητα κίνησης του σώματος –εδώ την ταχύτητα μεταβολής της κατάστασης του σώματος στο χώρο των φάσεων.

με πεδίο ταχυτήτων \vec{v} . Οι τροχιές του συστήματος θα είναι οι καμπύλες, οι οποίες είναι εφαπτόμενες στα \vec{v} σε κάθε σημείο και ταυτίζονται με την τροχιά ενός νοητού μικροσκοπικού κόκκου σκόνης που παρασύρεται από τη ροή της οποίας το πεδίο των ταχυτήτων είναι το \vec{v} . Επειδή σε κάθε σημείο αντιστοιχεί μόνο ένα διάνυσμα \vec{v} , οι τροχιές του συστήματος δεν μπορούν να τμηθούν· σε αντίθετη περίπτωση στο σημείο αυτό θα αντιστοιχούσαν δύο διαφορετικές κατευθύνσεις.³ Επιπλέον, είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι οι τροχιές δεν μπορούν ούτε και να καταστούν εφαπτόμενες η μία στην άλλη, αν το πεδίο των ταχυτήτων \vec{v} είναι συνεχής συνάρτηση, ενώ το ίδιο συμβαίνει και με όλες τις μερικές παραγώγους αυτής. Το γεγονός αυτό πηγάζει από το θεώρημα μοναδικότητας της λύσης των διαφορικών εξισώσεων.⁴

Η Χαμιλτονιανή, στην περίπτωση που δεν εξαρτάται από το χρόνο, διατηρείται κατά την κίνηση με αποτέλεσμα οι τροχιές του συστήματος να κείνται σε επιφάνειες $H(q, p) = C$ του χώρου των φάσεων, όπου η σταθερά προσδιορίζεται από την αρχική θέση και ορμή του συστήματος $C = H(q(0), p(0))$. Διαπιστώνουμε ότι, εφαρμόζοντας τις εξισώσεις του Χάμιλτον, προκύπτει μηδενική μεταβολή της Χαμιλτονιανής κατά μήκος της τροχιάς του συστήματος

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \left(\vec{\nabla}_{q,p} H \right) \cdot \vec{v} = \dot{p}_i \dot{q}_i - \dot{q}_i \dot{p}_i = 0, \quad (10.5)$$

όπου \vec{v} είναι η ταχύτητα στο χώρο των φάσεων (με διεύθυνση εφαπτομενική της τροχιάς) που δίνεται από την έκφραση (10.4) και $\vec{\nabla}_{q,p}$ η βαθμίδα της Χαμιλτονιανής ως προς όλες τις συντεταγμένες του χώρου των φάσεων. Από την (10.5) συνάγεται η διατήρηση της Χαμιλτονιανής κατά την κίνηση του συστήματος, αφού η ταχύτητα, που είναι εφαπτόμενη στην τροχιά, είναι κάθετη στη βαθμίδα της Χαμιλτονιανής και συνεπώς είναι κάθετη στην κάθετο της επιφάνειας $H(q, p) = C$. Η τροχιά, λοιπόν, κείται στην επιφάνεια $H(q, p) = C$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τρία παραδείγματα μηχανικών συστημάτων, και αναλύουμε την τροχιά τους στο χώρο των φάσεων.

• **Παράδειγμα 1:** Η Χαμιλτονιανή ελεύθερου σωματιδίου που κινείται σε μία διάσταση είναι

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m}. \quad (10.6)$$

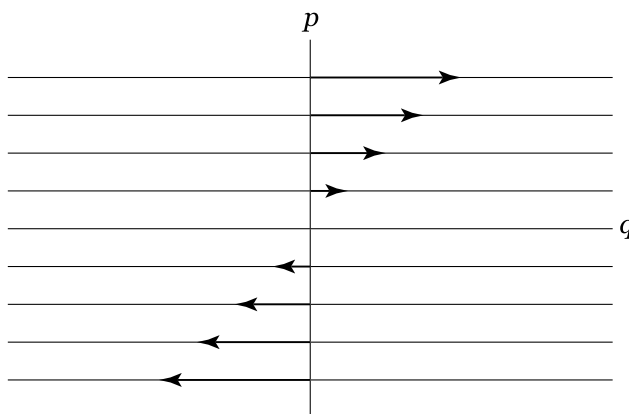
³ Όμως, εάν η Χαμιλτονιανή εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, σε κάθε σημείο του χώρου των φάσεων η κατεύθυνση αλλάζει με την πάροδο του χρόνου και ως αποτέλεσμα αυτής της αλλαγής, η τροχιά είναι δυνατόν να τέμνει τον εαυτό της. Στην περίπτωση αυτή η μοναδικότητα της λύσης δεν αποκλείει την τομή των τροχιών.

⁴ Το θεώρημα μοναδικότητας αποδεικνύεται κάτω από πολύ χαλαρότερες συνθήκες. Αρκεί το πεδίο ταχυτήτων \vec{v} να είναι Lipschitz. Μια απεικόνιση λέγεται Lipschitz αν η απόσταση μεταξύ της απεικόνισής δύο σημείων είναι το πολύ L φορές μεγαλύτερη από την απόσταση μεταξύ των αρχικών σημείων, δηλαδή ισχύει ότι $|\vec{v}(\vec{x}_2) - \vec{v}(\vec{x}_1)| \leq L|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$, όπου $\vec{x} \equiv (q, p)$. Οι συνθήκες, όμως, Χαμιλτονιανές που συναντούμε στη φυσική έχουν συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης και έτσι δεν απαιτείται η αναφορά στη χαλαρότερη συνθήκη Lipschitz.

Οι τροχιές στο χώρο των φάσεων προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$dq = \frac{p}{m} dt, \quad dp = 0 \quad (10.7)$$

και κατά συνέπεια η ταχύτητα στο χώρο των φάσεων είναι $\vec{v} = (p/m, 0)$.



Σχήμα 10.1: Η ροή στο χώρο των φάσεων ενός ελεύθερου σωματιδίου, μοναδιαίας μάζας, το οποίο κινείται σε μία διάσταση. Οι τροχιές είναι ευθείες και η ταχύτητα (βέλη του σχήματος) του εκάστοτε σημείου του χώρου των φάσεων, που αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη αρχική κατάσταση, είναι ανάλογη της συντεταγμένης p του εν λόγω σημείου.

Εάν θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό διάγραμμα του χώρου των φάσεων με ορθογώνιους άξονες (q, p) , οι τροχιές του συστήματος είναι ευθείες, παράλληλες στον άξονα q , που ως αφετηρία τους έχουν το σημείο όπου βρισκόταν αρχικά το σύστημα και διατρέχουν την ευθεία $p = \text{σταθερό}$ με ταχύτητα σταθερή και ανάλογη της αρχικής ορμής. Αν $p = 0$, το σωματίδιο παραμένει στο αρχικό του σημείο $q(0)$ και η τροχιά εκφυλίζεται σε σημείο. Οι τροχιές $p = \text{σταθερό}$ είναι προφανώς επιφάνειες σταθερής Χαμιλτονιανής $H = C$. Η ροή στο χώρο των φάσεων απεικονίζεται στο Σχήμα 10.1. Το πεδίο ταχύτητας εμφανίζει την εικόνα μιας διαστρωματωμένης ροής ρευστού με γραμμικό προφίλ.

• **Παράδειγμα 2:** Η Χαμιλτονιανή ενός αρμονικού ταλαντωτή σε μία διάσταση είναι

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{k}{2} q^2. \quad (10.8)$$

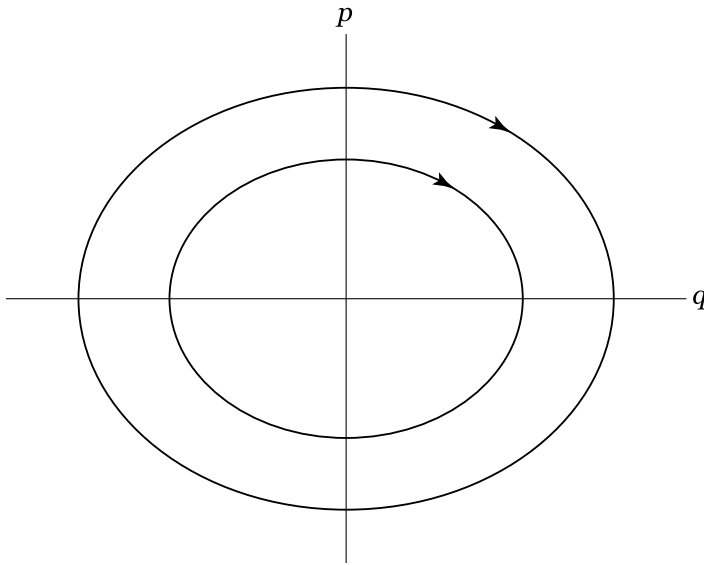
Οι τροχιές στο χώρο των φάσεων προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$dq = \frac{p}{m} dt, \quad dp = -kq dt. \quad (10.9)$$

Επομένως, η ταχύτητα στο χώρο των φάσεων είναι

$$\vec{v} = \left(\frac{p}{m}, -kq \right)$$

ενώ, εάν θεωρήσουμε και πάλι ένα καρτεσιανό διάγραμμα του χώρου των φάσεων με ορθογώνιους άξονες (q, p) , οι τροχιές του συστήματος είναι οι καμπύλες $H(q, p) = C$, οι οποίες είναι ελλείψεις που διαγράφονται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Η ροή στο χώρο των φάσεων απεικονίζεται στο Σχήμα 10.2. Όλες οι ελλείψεις είναι ίδιου σχήματος, δηλαδή



Σχήμα 10.2: Η ροή στο χώρο των φάσεων ενός αρμονικού ταλαντωτή σε μία διάσταση. Οι τροχιές είναι ελλείψεις, οι οποίες διαγράφονται με την φορά των δεικτών του ρολογιού.

έχουν ίδιο λόγο μεγάλου – μικρού ημιάξονα. Επειδή, μάλιστα, και οι δύο ημιάξονες είναι ανάλογοι της τετραγωνικής ρίζας της ενέργειας (της τιμής της Χαμιλτονιανής), το εμβαδόν της κάθε έλλειψης αυξάνει γραμμικά με την ενέργεια.

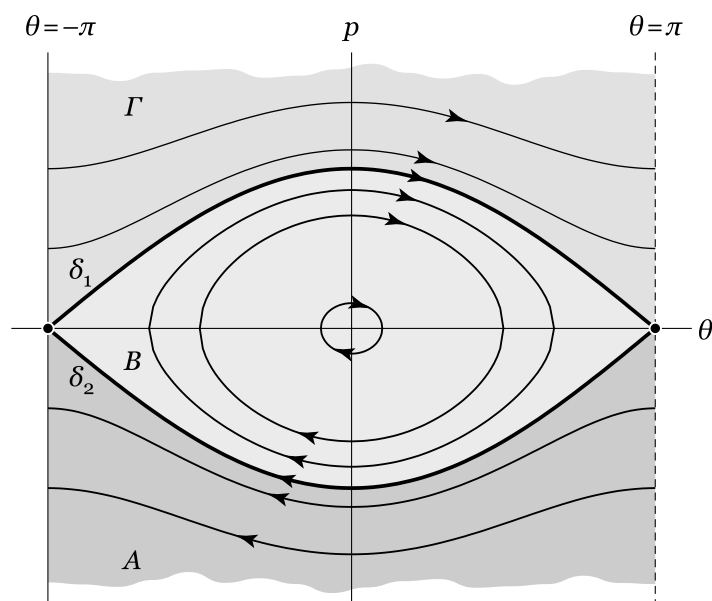
• **Παράδειγμα 3:** Η Χαμιλτονιανή ενός εκκρεμούς που εκτελεί κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας είναι

$$H(\theta, p) = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta . \quad (10.10)$$

Στην κατασκευή της Χαμιλτονιανής χρησιμοποιήσαμε ως θέση τη γωνία θ που σχηματίζει το εκκρεμές με την κατακόρυφο ($\theta = 0$ είναι το σημείο ευσταθούς ισορροπίας). Η γωνία θ παίρνει τιμές στο διάστημα $[-\pi, \pi)$. Έτσι, ο χώρος των φάσεων είναι η επιφάνεια ενός ορθού κυλίνδρου. Η γωνία θ , τότε, προσδιορίζει τη γωνιακή θέση επάνω στην επιφάνεια, αν ο κύλινδρος τμηθεί από ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα συμμετρίας του, ενώ η p_θ προσδιορίζει τη θέση του κάθετου αυτού επιπέδου. Σε αυτό το παράδειγμα ο διδιάστατος χώρος των φάσεων δεν είναι το επίπεδο. Ωστόσο, επειδή η επιφάνεια του κυλίνδρου μπορεί να ξεδιπλωθεί και να καταστεί επίπεδη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κίνηση στο χώρο των φάσεων εξελίσσεται στο ορθογώνιο καρτεσιανό χωρίο $[-\pi, \pi) \times (-\infty, \infty)$, οι πλευρές του οποίου $\theta = -\pi$ και $\theta = \pi$ έχουν ταυτιστεί. Η ροή απεικονίζεται στο Σχήμα 10.3. Οι εξισώσεις του Χάμιλτον είναι

$$\dot{\theta} = \frac{1}{ml^2} p_\theta , \quad \dot{p}_\theta = -mgl \sin \theta . \quad (10.11)$$

Το σημείο $(0, 0)$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας, ενώ το σημείο $(-\pi, 0)$ είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας. Τα σημεία αυτά αποτελούν εκφυλισμένες τροχιές του εκκρεμούς στο χώρο των φάσεων, αφού, αν αρχικά



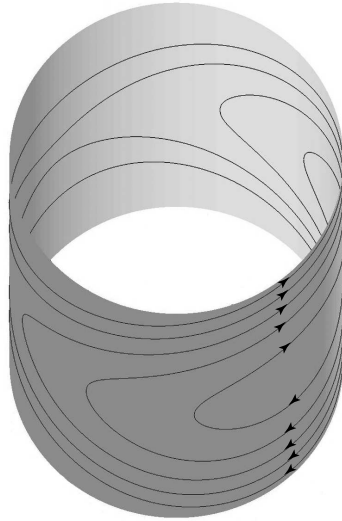
Σχήμα 10.3: Η ροή στο χώρο των φάσεων ενός εκκρεμούς με Χαμιλτονιανή αυτή που δίνεται στην έκφραση (10.10). Η κίνηση του εκκρεμούς είναι περιοδική, εκτός αν η αρχική κατάσταση είναι επάνω στη διαχωρίζουσα $\delta_{1,2}$. Στην περιοχή B η κίνηση είναι ταλαντωτική. Στις περιοχές A και Γ το εκκρεμές έχει αρκετή ενέργεια ώστε να εκτελεί συνεχή περιστροφική κίνηση, στην περιοχή A σύμφωνα με τη φορά κατά την οποία αυξάνεται η γωνία θ , ενώ στην περιοχή Γ αντίθετα από τη φορά αυτή. Μόνο επί της διαχωρίζουσας η κίνηση δεν είναι περιοδική: Όταν το εκκρεμές διατρέχει τη δ_1 , κινείται αενάως προς το σημείο ασταθούς ισορροπίας π , ενώ, όταν η αρχική κατάσταση του εκκρεμούς βρίσκεται στην δ_2 , το εκκρεμές κινείται αενάως προς το $-\pi$. Στην ουσία, βέβαια, και τα δύο σημεία αντιστοιχούν στην ίδια θέση του εκκρεμούς. Σημειώστε ότι το σημείο $(-\pi, 0)$ δεν ανήκει στις διαχωρίζουσες, αφού είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας. Αυτό το σημείο το προσεγγίζουν οι τροχιές επί των διαχωρίζουσών, χωρίς βέβαια ποτέ να κατορθώνουν να το φτάσουν.

το εκκρεμές βρεθεί στα σημεία αυτά, θα παραμείνει εκεί επ' άπειρον. Η διαχωρίζουσα (separatrix) δ_1, δ_2 που τείνει προς το σημείο ασταθούς ισορροπίας (στο Σχήμα 10.3 το σημείο αυτό απεικονίζεται σε δύο ξεχωριστά σημεία), χωρίς να καταφέρνει να το φτάσει, αποτελεί την ισοενεργειακή επιφάνεια

$$p_\theta = \pm 2m\sqrt{gl^3} \cos(\theta/2), \quad (10.12)$$

η οποία διαχωρίζει το χώρο των φάσεων σε τρεις περιοχές. Σε κάθε περιοχή η κίνηση είναι περιοδική. Στις περιοχές A και Γ (βλ. Σχήμα 10.3) το εκκρεμές εκτελεί περιστροφική κίνηση (κατά τη θετική ή αρνητική φορά αντιστοίχως), ενώ στη μεσαία περιοχή B εκτελεί ταλάντωση.

Γενικότερα, οι περιοδικές κινήσεις στο χώρο των φάσεων μπορεί να είναι περιστροφικές ή ταλαντωτικές. Είναι περιστροφικές, όταν η \dot{q} δεν αλλάζει πρόσημο και ταλαντωτικές, όταν η \dot{q} αλλάζει περιοδικά πρόσημο. Αν οι θέσεις λαμβάνουν τιμές επί μίας ευθείας, δεν μπορούμε να έχουμε περιστροφική κίνηση. Αν, όμως, οι θέσεις ορίζονται επί ενός κύκλου, τότε μπορούμε να έχουμε και τους δύο τύπους περιοδικής κίνησης. Επομένως, ο τύπος της περιοδικής κίνησης εξαρτάται από την τοπολογία του χώρου των φάσεων (βλ. Σχήμα 10.4).



Σχήμα 10.4: Η τοπολογία του χώρου των φάσεων του Παραδείγματος 3. Στο σχήμα απεικονίζονται τρεις ταλαντωτικές κινήσεις (οι οποίες δεν τυλίγονται γύρω από τον κύλινδρο) και τέσσερις περιστροφικές κινήσεις –δύο δεξιόστροφες και δύο αριστερόστροφες (οι οποίες τυλίγονται γύρω από τον κύλινδρο).

Άσκηση 10.1. Αποδείξτε ότι η διαχωρίζουσα δίνεται από την έκφραση (10.12). Υποθέστε τώρα ότι οι αρχικές συνθήκες είναι επί της διαχωρίζουσας και δείξτε ότι απαιτείται άπειρος χρόνος για να προσεγγίσει το εκκρεμές το άκρο της διαχωρίζουσας που αποτελεί σημείο ασταθούς ισορροπίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10.2 Θεώρημα Liouville

Κάθε χαμιλτονιανό σύστημα, κάθε σύστημα δηλαδή που μπορεί να περιγραφεί μέσω κάποιας χαμιλτονιανής συνάρτησης, κατά την κίνησή του στο χώρο των φάσεων διατηρεί τον “όγκο” του. Αυτή η ιδιότητα των χαμιλτονιανών συστημάτων αποτελεί το περιεχόμενο του *θεωρήματος του Liouville*. Για να κατανοήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό, ας θεωρήσουμε ένα κλειστό χωρίο του χώρου των φάσεων Γ_0 . Ύστερα από χρόνο t η χαμιλτονιανή δυναμική θα το μετασχηματίσει στο χωρίο Γ_t (βλ. Σχήμα 10.5). Ο διαφορικός όγκος στο χώρο των φάσεων είναι

$$d^n q d^n p \equiv dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \equiv d^{2n} x, \quad (10.13)$$

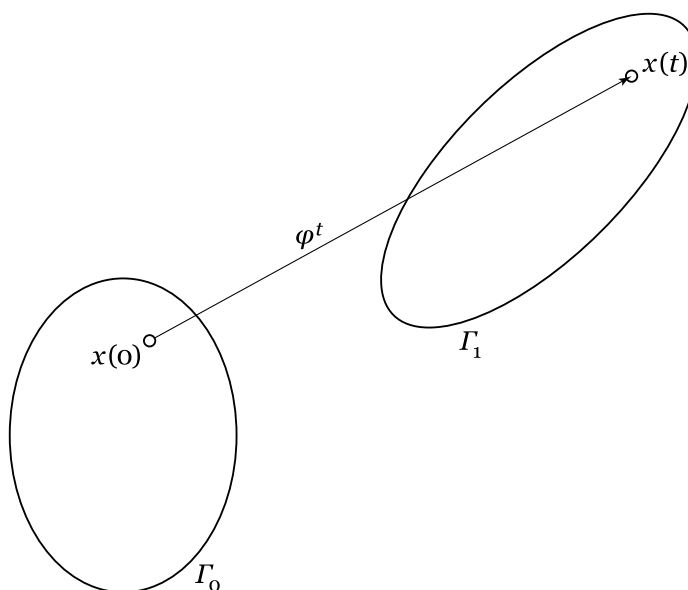
όπου $\vec{x} = (q, p)$ και n οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος. Συνεπώς, ο αρχικός όγκος του χωρίου Γ_0 δίνεται από την έκφραση

$$V(0) = \int_{\Gamma_0} d^{2n}x(0), \quad (10.14)$$

όπου τα $\vec{x}(0)$ είναι τα σημεία του χώρου των φάσεων που βρίσκονται εντός του χωρίου Γ_0 . Ο όγκος του ίδιου χωρίου, όπως θα έχει μετεξελιχθεί τη χρονική στιγμή t θα είναι

$$V(t) = \int_{\Gamma_t} d^{2n}x(t), \quad (10.15)$$

όπου $\vec{x}(t)$ είναι τα σημεία του χώρου των φάσεων που βρίσκονται εντός του χωρίου Γ_t . Θα αποδείξουμε ότι για κάθε t ισχύει ότι $V(t) = V(0)$. Το θεώρημα του αμετάβλητου των όγκων διατυπώθηκε από τον γάλλο μαθηματικό Joseph Liouville [1809-1882] το 1838.

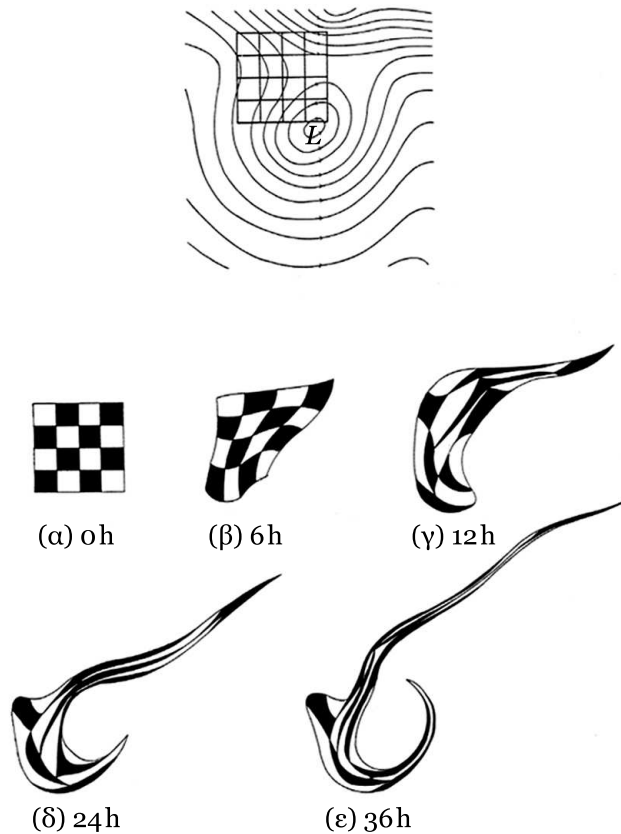


Σχήμα 10.5: Το αρχικό χωρίο Γ_0 μετασχηματίζεται στο χωρίο Γ_t στο χρόνο t . Κάθε σημείο $x(0)$ εντός του χωρίου Γ_0 μετασχηματίζεται σε σημείο $x(t)$ εντός του χωρίου Γ_t μέσω της απεικόνισης ϕ^t . Αν η εξέλιξη του χωρίου είναι χαμιλτονιανή, τότε ο όγκος του χωρίου παραμένει αμετάβλητος.

Επειδή η μελέτη της εξέλιξης του όγκου έχει ιδιαίτερη σημασία και σε γενικότερα δυναμικά συστήματα, τα οποία μπορεί να μην είναι χαμιλτονιανά, ας υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής του όγκου για ένα γενικό δυναμικό σύστημα, που περιλαμβάνει και τα χαμιλτονιανά συστήματα (βλ. σχέση 10.4)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t), \quad (10.16)$$

όπου με \vec{x} συμβολίζουμε τις N μεταβλητές (x_1, \dots, x_N) και η \vec{v} έχει N συνιστώσες (v_1, \dots, v_N) . Μπορούμε να φανταστούμε ότι το παραπάνω δυναμικό σύστημα περιγράφει την εξέλιξη της θέσης ενός κόκκου σκόνης σε



Σχήμα 10.6: Εξέλιξη χωρίου στην ατμοσφαιρική ροή που προκαλείται από το στάσιμο βαρομετρικό χαμηλό που διακρίνεται στο χάρτη στο άνω μέρος του σχήματος. Στο χάρτη απεικονίζεται η ροή στην επιφάνεια πίεσης 500 mb, η οποία βρίσκεται περίπου στα 5 km επάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Η ροή θεωρείται χρονικά ανεξάρτητη και ασυμπίεστη, οπότε είναι χαμιλτονιανή, ενώ ο όγκος των χωρίων που βρίσκονται στην επιφάνεια αυτή διατηρείται. Έχει σχεδιαστεί η εξέλιξη του αρχικού τετραγωνικού χωρίου στους χρόνους 6h, 12h, 24h και 36h. Η μείωση της προβλεπτικότητας της θέσης των κόκκων ενός αδρανούς ιχνηλάτη (που κινείται σύμφωνα με τη ροή) με την πάροδο του χρόνου είναι εμφανής. Από την εργασία του P. Welander, 1955: Studies on the general development of motion in a two dimensional fluid flow, *Tellus*, 7, 141-156.

ένα ρευστό του οποίου το πεδίο ταχυτήτων $\vec{v}(\vec{x}, t)$ σε κάθε σημείο του χώρου και σε κάθε χρονική στιγμή θεωρείται γνωστό. Θα δείξουμε ότι, αν η ροή \vec{v} έχει μηδενική απόκλιση (ασυμπίεστο ρευστό), δηλαδή αν

Η ροή ασυμπίεστου ρευστού

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \tag{10.17}$$

τότε διατηρείται ο όγκος κάθε χωρίου του ρευστού.

Κάθε σημείο $\vec{x}(t)$ του χωρίου Γ_t είναι απεικόνιση του αντίστοιχου σημείου $\vec{x}(0)$ του Γ_0 ,

$$\phi^t : \vec{x}(0) \longrightarrow \vec{x}(t).$$

Η απεικόνιση αυτή είναι απλώς η ταυτοτική απεικόνιση για $t = 0$. Ο όγκος τη χρονική στιγμή t είναι

$$V(t) = \int_{\Gamma_t} d^N x(t) = \int_{\Gamma_0} J(t) d^N x(0), \tag{10.18}$$

όπου $J(t)$ η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού ϕ^t των συντεταγμένων ολοκλήρωσης

$$J(t) = \det(\mathbf{J}(t)) , \quad (10.19)$$

και $\mathbf{J}(t)$ ο ιακωβιανός πίνακας με στοιχεία

$$J_{ij}(t) = \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j(0)} . \quad (10.20)$$

Παρατηρούμε ότι μέσω της ιακωβιανής ορίζουσας μεταβαίνουμε από τις συντεταγμένες $\vec{x}(t)$ στις συντεταγμένες $\vec{x}(0)$, οπότε και το χωρίο ολοκλήρωσης αλλάζει από Γ_t σε Γ_0 . Η αναφορά στην απεικόνιση ϕ^t από τις αρχικές συντεταγμένες στις νέες συντεταγμένες έγινε ακριβώς γι' αυτόν το λόγο: το κάθε σημείο $\vec{x}(t)$, αντί να το βλέπουμε ως εξέλιξη του $\vec{x}(0)$, μπορούμε να το θεωρούμε ως το ίδιο σημείο με το $\vec{x}(0)$ αλλά σε καινούργιες συντεταγμένες με μετασχηματισμό συντεταγμένων αυτόν της απεικόνισης. Κάτι ανάλογο συναντήσαμε στο Κεφάλαιο 6 με τους ενεργούς και τους παθητικούς μετασχηματισμούς στροφής: τη στροφή ενός διανύσματος μπορούμε να την εννοήσουμε είτε ενεργητικά ως στροφή του ίδιου του διανύσματος, είτε παθητικά ως τη μεταβολή των συνιστωσών ενός σταθερού διανύσματος εξαιτίας της αντίστροφης στροφής του συστήματος των συντεταγμένων.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την αλλαγή του όγκου του χωρίου, ας υπολογίσουμε το $J_{ij}(\epsilon)$ για πολύ μικρούς χρόνους $\epsilon \ll 1$. Επειδή

$$x_i(\epsilon) = x_i(0) + \epsilon v_i(\vec{x}(0), 0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) , \quad (10.21)$$

θα είναι

$$\frac{\partial x_i(\epsilon)}{\partial x_j(0)} = \delta_{ij} + \epsilon \frac{\partial v_i(\vec{x}(0), 0)}{\partial x_j(0)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) , \quad (10.22)$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, τα στοιχεία δηλαδή του μοναδιαίου πίνακα \mathbf{I} σε N διαστάσεις. Η Ιακωβιανή, λοιπόν, του μετασχηματισμού για μικρούς χρόνους μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων ως

$$J(\epsilon) = \det(\mathbf{I} + \epsilon \mathbf{A} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) , \quad (10.23)$$

όπου ο πίνακας \mathbf{A} έχει στοιχεία

$$A_{ij} = \frac{\partial v_i(\vec{x}(0), 0)}{\partial x_j(0)} .$$

Αναπτύσσοντας την $J(\epsilon)$ σε όρους αυξανόμενης τάξης ως προς ϵ , λαμβάνουμε (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα)

$$J(\epsilon) = 1 + \epsilon \text{trace}(\mathbf{A}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) , \quad (10.24)$$

όπου $\text{trace}(\mathbf{A}) = A_{ii}$ (υπονοείται η αθροιστική σύμβαση) είναι το ίχνος του πίνακα που ισούται με το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του.

Άσκηση 10.2. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα σε όρους αυξανόμενης τάξης ως προς ϵ αποδείξτε την ταυτότητα (10.24). ΑΣΚΗΣΕΙΣ



Σχήμα 10.7: Εξέλιξη ενός χρωματισμένου τετραγώνου που βρίσκεται στην επιφάνεια περιστρεφόμενου ρευστού, το οποίο αναδεύεται. Η χαμιλτονιανή εξέλιξη του χωρίου είναι χαοτική, όπως φαίνεται από την ευαίσθητη εξάρτηση της τελικής θέσης εκάστου σημείου από τις αρχικές συνθήκες, και οδηγεί τελικά στην πλήρη διάχυση του χρώματος στην επιφάνεια του ρευστού. Από την εργασία του P. Welande, 1955: Studies on the general development of motion in a two dimensional fluid flow, *Tellus*, 7, 141-156.

Επειδή ο ϕ^0 είναι ταυτοτικός μετασχηματισμός, θα ισχύει $J(0) = 1$. επομένως, η σχέση (10.24) γράφεται ως

$$\frac{J(\epsilon) - J(0)}{\epsilon} = \text{trace}(\mathbf{A}) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (10.25)$$

Στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$ προκύπτει η διαφορική εξίσωση μεταβολής της Ιακωβιανής

$$\left. \frac{dJ}{dt} \right|_{t=0} = \text{trace}(\mathbf{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x}(0), 0). \quad (10.26)$$

Μολονότι η παραπάνω εξίσωση προκύπτει για τη διαφορική εξέλιξη της $J(t)$ τη χρονική στιγμή $t = 0$, καταλήγουμε σε ταυτόσημα συμπεράσματα και για τη διαφορική εξέλιξη της $J(t)$ από το χρόνο t στο χρόνο $t + \epsilon$. Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της $J(t)$ τη χρονική στιγμή t είναι

$$\frac{dJ}{dt} = \text{trace}(\mathbf{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x}(t), t). \quad (10.27)$$

Ολοκληρώνοντας την (10.27), βρίσκουμε ότι η τιμή της Ιακωβιανής $J(t)$ ύστερα από πεπερασμένο χρόνο t είναι

$$J(t) = 1 + \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x}(s), s) ds. \quad (10.28)$$

Αν η απόκλιση του \vec{v} είναι μηδενική, η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού θα είναι

$$J(t) = 1$$

για όλους τους χρόνους και, όπως προκύπτει από τη σχέση (10.18), ο όγκος του χρονικά εξελιγμένου χωρίου $V(t)$ θα παραμείνει ίσος με τον αρχικό όγκο $V(0)$.

Μπορούμε επίσης να προσδιορίσουμε τη διαφορική εξίσωση μεταβολής του όγκου συναρτήσει του ρυθμού μεταβολής της Ιακωβιανής. Παραγωγίζοντας την (10.18), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} d^N x(t) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_{t+\epsilon}} d^N x(t+\epsilon) - \int_{\Gamma_t} d^N x(t)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_t} [1 + \epsilon (dJ/dt)] d^N x(t) - \int_{\Gamma_t} d^N x(t)}{\epsilon} \\ &= \int_{\Gamma_t} \frac{dJ}{dt} d^N x(t) \\ &= \int_{\Gamma_t} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x}(t), t) d^N x(t). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Ειδικά τα χαμιλτονιανά συστήματα ικανοποιούν την ασυμπίεστη ιδιότητα του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0,$$

αφού, αν θέσουμε $\vec{x} = (\vec{q}, \vec{p})$ και

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \partial H / \partial \vec{p} \\ -\partial H / \partial \vec{q} \end{pmatrix}, \quad (10.30)$$

όπου με $\partial H / \partial \vec{p}$ συμβολίζουμε τη βαθμίδα της Χαμιλτονιανής ως προς τις p μεταβλητές και παρομοίως με $\partial H / \partial \vec{q}$ τη βαθμίδα ως προς τις q μεταβλητές, οι κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον λαμβάνουν στις συντεταγμένες αυτές τη μορφή

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t), \quad (10.31)$$

και έχουν την ιδιότητα η απόκλιση του πεδίου των ταχυτήτων να μηδενίζεται

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) = 0. \quad (10.32)$$

Συνεπώς, η ροή στο χώρο των φάσεων είναι ασυμπίεστη και έτσι κάθε χαμιλτονιανό σύστημα κατά την κίνησή του στο χώρο των φάσεων διατηρεί τον αρχικό του όγκο.

Παρατηρούμε ότι το ασυμπίεστο της ροής στο χώρο των φάσεων είναι απόρροια της ιδιαίτερης *συμπλεκτικής* μορφής των κανονικών εξισώσεων. Εάν θεωρούσαμε τη δυναμική στο χώρο των (q, \dot{q}) , το θεώρημα Liouville δεν θα ίσχυε γενικά για κάθε Λαγκρανζιανή. Παρατηρούμε επίσης ότι το θεώρημα ισχύει και για χρονοεξαρτώμενες Χαμιλτονιανές, αφού σε κανένα σημείο της απόδειξης δεν χρειάστηκε να επικαλεστούμε τη μη εξάρτηση της Χαμιλτονιανής από το χρόνο.

Τι φυσικό νόημα όμως, μπορεί να έχει ένα χωρίο στο χώρο των φάσεων; Μπορεί να φανταστεί κανείς ότι ένα χωρίο αντιπροσωπεύει ένα μεγάλο δείγμα ίδιων φυσικών συστημάτων με παρεμφερείς αρχικές συνθήκες: για παράδειγμα, μια μεγάλη παιδική χαρά με πανομοιότυπες κούνιες, οι οποίες τη χρονική στιγμή $t = 0$ καταλαμβάνουν όλες τις γωνίες εντός κάποιου διαστήματος, για παράδειγμα, μεταξύ 5° και 10° , και όλες τις γωνιακές ταχύτητες, για παράδειγμα, μεταξύ -1°s^{-1} και $+1^\circ\text{s}^{-1}$. Μπορεί, ακόμη, να φανταστεί κανείς το χωρίο ως ένα και μοναδικό φυσικό σύστημα τη θέση και την ορμή του οποίου δεν γνωρίζουμε με απόλυτη βεβαιότητα: για παράδειγμα, μια κούνια για την οποία δεν είμαστε απολύτως σίγουροι τι αρχική γωνία και τι αρχική γωνιακή ταχύτητα έχει, αλλά γνωρίζουμε το εύρος της αβεβαιότητάς μας όσον αφορά στα μεγέθη αυτά.

Το θεώρημα Liouville έχει θεμελιώδη σημασία στην κλασική στατιστική μηχανική, σύμφωνα με την οποία ένα σύστημα έχει την ίδια πιθανότητα κατάληψης ίσων όγκων στο χώρο των φάσεων. Το θεώρημα Liouville βεβαιώνει ότι αυτή η πρόταση παραμένει σε ισχύ ανά πάσα χρονική στιγμή. Για να γίνει αντιληπτό πώς εξελίσσεται η κατανομή των καταστάσεων στο χώρο των φάσεων για ένα στατιστικό σύστημα, υποθέτουμε ότι κάποια χρονική στιγμή dN συστήματα βρίσκονται σε μία απειροστή περιοχή $dV = d^n q d^n p$ του χώρου των φάσεων. Η πυκνότητα των καταστάσεων στην περιοχή αυτή είναι $\rho = dN/dV$. Με την πάροδο του χρόνου ο στοιχειώδης όγκος dV εξελίσσεται στον dV' . Επειδή ο αριθμός των καταστάσεων dN που περιλαμβάνονται στο στοιχειώδη όγκο παραμένει σταθερός, η πυκνότητα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\rho dV = \rho' dV',$$

όπου ρ' η πυκνότητα των καταστάσεων στον χρονικά εξελιγμένο όγκο. Από το θεώρημα του Liouville, όμως, γνωρίζουμε ότι ο όγκος παραμένει σταθερός και ως εκ τούτου πρέπει να παραμένει σταθερή και η πυκνότητα καταστάσεων ρ . Καταλήγουμε, επομένως, στο συμπέρασμα ότι στο χώρο των φάσεων η πυκνότητα καταστάσεων παραμένει σταθερή, πράγμα που

Η ροή στο χώρο των φάσεων είναι ασυμπίεστη

Το θεώρημα Liouville ισχύει και για Χαμιλτονιανές που αλλάζουν με το χρόνο

Τι νόημα έχει ένα χωρίο στο χώρο των φάσεων;

Η πυκνότητα καταστάσεων παραμένει σταθερή αν ακολουθήσουμε τη ροή

σημαίνει ότι κατά μήκος της ροής στο χώρο των φάσεων θα ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt}\rho(\vec{x}(t), t) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{q,p}\rho = 0. \quad (10.33)$$

Η εξίσωση αυτή λέγεται *εξίσωση Liouville* και αποτελεί αναδιατύπωση του θεωρήματος Liouville. Εάν αρχικά όλα τα σημεία του χώρου των φάσεων είχαν την ίδια πυκνότητα καταστάσεων, τότε η πυκνότητα καταστάσεων στο χώρο των φάσεων θα παρέμενε πάντοτε σταθερή.

Τα χαοτικά συστήματα βρίσκονται σε συμφωνία με το θεώρημα Liouville.

Ενδέχεται, ωστόσο, παρότι ο όγκος παραμένει αμετάβλητος, η εξέλιξη στο χώρο των φάσεων να είναι ιδιαίτερος περίπλοκη και μάλιστα σε τέτοιο βαθμό, ώστε η απόσταση αρχικά γειτονικών σημείων να αυξάνει εκθετικά με το χρόνο διατηρώντας συγχρόνως το συνολικό όγκο του χωρίου σταθερό. Σε αυτή την περίπτωση μια μικρή αρχικά αβεβαιότητα του συστήματος μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου σε τέτοιο βαθμό, ώστε το σύστημα να εμφανίζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Όταν συμβαίνει αυτό, η δυναμική του συστήματος λέγεται *χαοτική*. Τότε το εξελιγμένο χωρίο αποκτά μία ιδιαίτερα πολύπλοκη μορφή, διότι αφενός πρέπει να διατηρεί τον όγκο του και αφετέρου η απόσταση μεταξύ γειτονικών σημείων πρέπει, τουλάχιστον αρχικά, να αποκλίνει εκθετικά (βλ. Σχήματα 10.6, 10.7).

Η ανάλωση καταστρέφει τη διατήρηση του όγκου

Στη μακροσκοπική περιγραφή της φύσης υπεισέρχονται φαινόμενα ανάλωσης οπότε η δυναμική του αντίστοιχου συστήματος παύει να είναι χαμιλτονιανή. Στις περιπτώσεις αυτές ο όγκος στο χώρο των φάσεων δεν παραμένει σταθερός και με την πάροδο του χρόνου συνήθως τείνει να εκμηδενιστεί (βλ. Σχήμα 10.8). Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα *μη* χαμιλτονιανού συστήματος είναι το τρισδιάστατο⁵ σύστημα του Lorenz

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta z + xy, \end{aligned} \quad (10.34)$$

με σ, ρ, β θετικές σταθερές.

Από την προηγούμενη ανάλυση είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο όγκος στο χώρο (x, y, z) ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + \beta + 1), \quad (10.35)$$

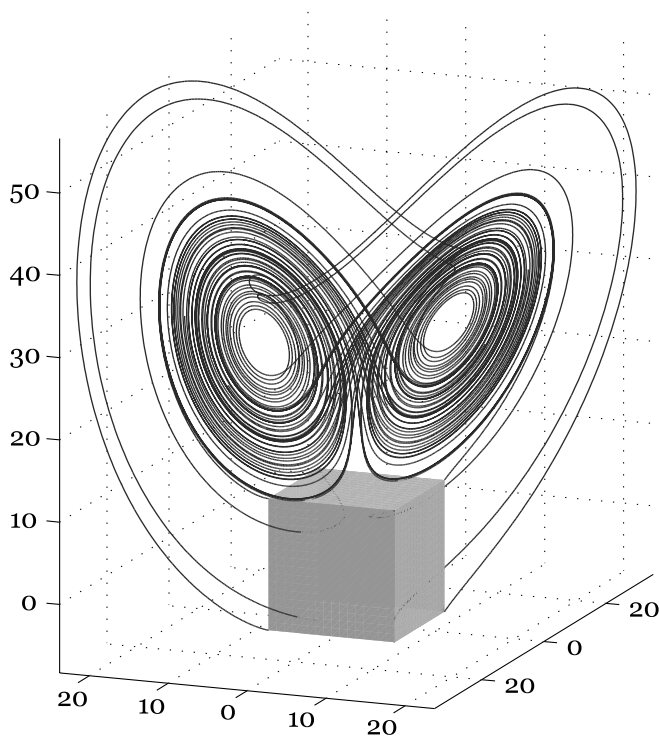
και συνεπώς μειώνεται μονότονα, όταν $\sigma + \beta + 1 > 0$. Παρόλο, όμως, που ο όγκος κάθε αρχικού χωρίου τείνει στο μηδέν, η παραπάνω δυναμική εμφανίζει και αυτή (για ορισμένες τιμές των παραμέτρων) ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Τα χωρία στις περιπτώσεις αυτές τείνουν να εξελιχθούν στους καλούμενους *παράξενους ελκυστές* (strange attractors), περιοχές μηδενικού όγκου όχι όμως και μηδενικών διαστάσεων.

⁵Μολονότι ο τρισδιάστατος αυτός χώρος δεν μπορεί να είναι χώρος φάσεων λόγω περπτή διαστάσης, αυτό δεν αποτελεί ουσιαστικό πρόβλημα, αφού το σύστημα θα μπορούσε να επεκταθεί ανάλογα κατά μία ακόμη διάσταση.

Κατ' αναλογία φανταστείτε ένα στερεό σώμα που έχει ισοπεδωθεί, αλλά έχει υποστεί τέτοια παραμόρφωση ώστε να υπάρχουν ζευγάρια σημείων που, ενώ αρχικά βρίσκονταν οσοδήποτε κοντά το ένα στο άλλο, ύστερα από την ισοπέδωση του σώματος βρίσκονται σε πεπερασμένη μεταξύ τους απόσταση.

Άσκηση 10.3. Επιβεβαιώστε την παραπάνω εξίσωση εξέλιξης του όγκου στο σύστημα του Lorenz.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



Σχήμα 10.8: Οκτώ διαφορετικές αρχικές συνθήκες στις άκρες ενός κύβου εξελίσσονται σύμφωνα με το σύστημα του Lorenz (10.34) με τιμές σταθερών $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$. Ενώ το αρχικό χωρίο είναι τρισδιάστατο, το τελικό χωρίο γίνεται με την πάροδο του χρόνου ολοένα και πιο διδιάστατο σχηματίζοντας τη γνωστή μάσκα του Lorenz.

Η απόδειξη που παραθέσαμε παραπάνω σχετικά με τη διατήρηση του όγκου του χωρίου μπορεί να επαναληφθεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο για ναδειχθεί ότι διατηρείται το εμβαδόν της τομής του χωρίου από ένα επίπεδο που ορίζεται από κάποιο q_i και από το συζυγές του p_i . Συγκεκριμένα, για κάθε συντεταγμένη i και για κάθε χρονική στιγμή t , η ιακωδιανή

ορίζουσα του μετασχηματισμού από τις αρχικές θέσεις και ορμές με δείκτη i στις κατοπινές θέσεις και ορμές με δείκτη i είναι (χωρίς αθροιστική σύμβαση)

$$\frac{\partial(q_i(t), p_i(t))}{\partial(q_i(0), p_i(0))} = \frac{\partial q_i(t)}{\partial q_i(0)} \frac{\partial p_i(t)}{\partial p_i(0)} - \frac{\partial q_i(t)}{\partial p_i(0)} \frac{\partial p_i(t)}{\partial q_i(0)} = 1, \quad (10.36)$$

οπότε κατά την κίνηση διατηρείται η επιφάνεια της προβολής της τομής στο επίπεδο (q_i, p_i)

$$\iint dq_i dp_i .$$

Η διατήρηση αυτή πηγάζει από τη συμπλεκτική δομή των εξισώσεων του Χάμιλτον για κάθε ζεύγος συζυγών θέσεων και ορμών. Εξαιτίας αυτής της διατήρησης οι σχέσεις αβεβαιότητας του Heisenberg, σε κλασικό επίπεδο, παραμένουν αναλλοίωτες με την πάροδο του χρόνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 10.4. Ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης του θεωρήματος του Liouville, αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε μεταβλητή i η στοιχειώδης επιφάνεια $dq_i dp_i$ παραμένει σταθερή στη χαμιλτονιανή δυναμική. Με αυτό τον τρόπο αποδεικνύεται η εξίσωση (10.36).

Επιπλέον, επειδή ισχύει

$$\iint dq_i dp_i = \oint_{C(t)} p_i dq_i, \quad (10.37)$$

όπου $C(t)$ το σύνορο του χωρίου στο επίπεδο (q_i, p_i) , η κυκλοφορία που ορίζεται ως

$$\oint_{C(t)} p_i dq_i$$

(χωρίς αθροιστική σύμβαση), παραμένει αναλλοίωτη κατά την κίνηση ενός χαμιλτονιανού συστήματος.

Τέλος, επειδή το $\iint dq_i dp_i$ παραμένει αναλλοίωτο για κάθε i , θα παραμένει επίσης αναλλοίωτο και το

$$\sum_{i=1}^n \iint dq_i dp_i. \quad (10.38)$$

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι παραμένουν αναλλοίωτα και τα εκάστοτε ολοκληρώματα

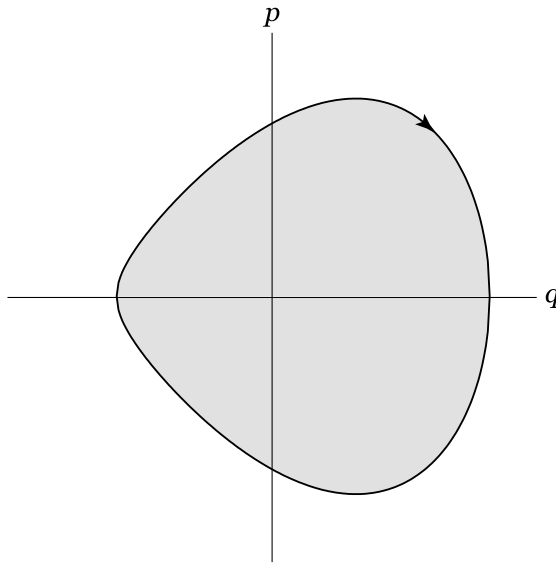
$$\iint \cdots \iint dq_i dp_i dq_j dp_j \cdots \quad (10.39)$$

Τα αναλλοίωτα του Poincaré

όπου η ολοκλήρωση γίνεται στους χώρους των τεσσάρων, έξι, κ.ο.κ. διαστάσεων στο χώρο των φάσεων. Τα αναλλοίωτα αυτά μεγέθη λέγονται αναλλοίωτα ολοκληρώματα του Poincaré. Το θεώρημα του Liouville αναφέρεται στο τελευταίο αναλλοίωτο ολοκλήρωμα του Poincaré όπου η ολοκλήρωση λαμβάνεται και στις $2n$ διαστάσεις.

10.3 Αδιαβατικά αναλλοίωτα

Σε ορισμένες περιπτώσεις κατά τις οποίες η Χαμιλτονιανή έχει χρονική εξάρτηση, η χρονική μεταβολή αυτής πραγματοποιείται σε χρόνους πολύ πιο αργούς από το χαρακτηριστικό χρόνο που χαρακτηρίζει την κίνηση του συστήματος. Όταν συμβαίνει αυτό, η μεταβολή ονομάζεται *αδιαβατική*.⁶ Γι' αυτές τις περιπτώσεις που η κίνηση είναι σχεδόν περιοδική ισχύει το λεγόμενο *αδιαβατικό θεώρημα* (Ehrenfest, 1913). Έχουμε ανα-



Σχήμα 10.9: Περιοδική τροχιά χαμιλτονιανού συστήματος. Το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την τροχιά είναι $\oint pdq$. Όταν η Χαμιλτονιανή μεταβάλλεται αδιαβατικά, η καμπύλη αυτή αλλάζει, αλλά το εμβαδόν που περικλείει παραμένει σταθερό.

φέρει ότι σε ένα περιοδικό σύστημα με χρονικά ανεξάρτητη Χαμιλτονιανή το $\oint pdq$ είναι η επιφάνεια που περιγράφεται από την κλειστή τροχιά του συστήματος στο επίπεδο (q, p) (βλ. Σχήμα 10.9). Τι συμβαίνει, άραγε, όταν η Χαμιλτονιανή ενός τέτοιου συστήματος μεταβάλλεται αδιαβατικά; Σύμφωνα με το αδιαβατικό θεώρημα κατά την αδιαβατική μεταβολή της Χαμιλτονιανής, το $\oint pdq$ κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής στο χώρο των φάσεων (ακριβέστερα, κατά μήκος μίας σχεδόν κλειστής διαδρομής, αφού η ενέργεια μεταβάλλεται και επομένως η τροχιά δεν κλείνει) παραμένει σταθερό. Η ποσότητα

$$\oint pdq$$

καλείται *αδιαβατικό αναλλοίωτο*.

Το θεώρημα του Ehrenfest βρήκε δόκιμη εφαρμογή στα πρώτα βήματα προς την κβαντική μηχανική όταν ο Niels Henrik David Bohr [1885-1962]

⁶Η ελληνογενής λέξη αδιαβατικός (adiabatic), που προέρχεται από το ελληνικό επίθετο αδιάδατος, πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον Clausius, για να περιγράψει μια διεργασία κατά την οποία η θερμοκρασία δεν “βαίνει”, δηλαδή δεν προχωρεί. Αργότερα οι Carnot, Clapeyron, και Rankine έδωσαν στον όρο τη σημερινή θερμοδυναμική του έννοια. Στην κλασική μηχανική ο όρος πρωτοχρησιμοποιείται το 1916 από τον Paul Ehrenfest [1880-1933], ο οποίος με τη σειρά του δανείστηκε τον όρο από τον Einstein.

Ποιος θα το φανταζόταν ότι, όταν όλα αλλάζουν, υπάρχει κάτι που μένει αναλλοίωτο!

Αδιαβατικό αναλλοίωτο και γέννηση της κβαντομηχανικής

και ο Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld [1868-1951] πρότειναν τον κβαντισμό ποσοτήτων της μορφής $\oint p dq$. Σύμφωνα με τη θεωρία των Bohr-Sommerfeld ποσότητες της μορφής $\oint p dq$ λαμβάνουν διακριτές τιμές. Το επιχείρημα των Bohr και Ehrenfest για την παγκοσμιότητα ενός τέτοιου νόμου βασιζόταν στο αδιαβατικό αναλλοίωτο της ποσότητας αυτής: αν, για παράδειγμα, διαπιστώσουμε⁷ ότι σε έναν αρμονικό ταλαντωτή ισχύει ότι

$$\oint p dx = \left(n + \frac{1}{2} \right) h, \quad (10.40)$$

όπου h η σταθερά του Planck και n κάποιος φυσικός αριθμός, τότε η σχέση (10.40) πρέπει να έχει παγκόσμια ισχύ, διότι, μεταβάλλοντας αδιαβατικά (με πολύ αργό ρυθμό) το παραβολικό δυναμικό του ταλαντωτή, μπορούμε να καταλήξουμε σε οποιοδήποτε άλλο δυναμικό, ακόμη και σε αυτό του ατόμου του υδρογόνου. Έτσι, για οποιοδήποτε δυναμικό θα ισχύει η σχέση (10.40). Συνεπώς, ένας τέτοιος νόμος πρέπει να έχει θεμελιώδη και παγκόσμια ισχύ.

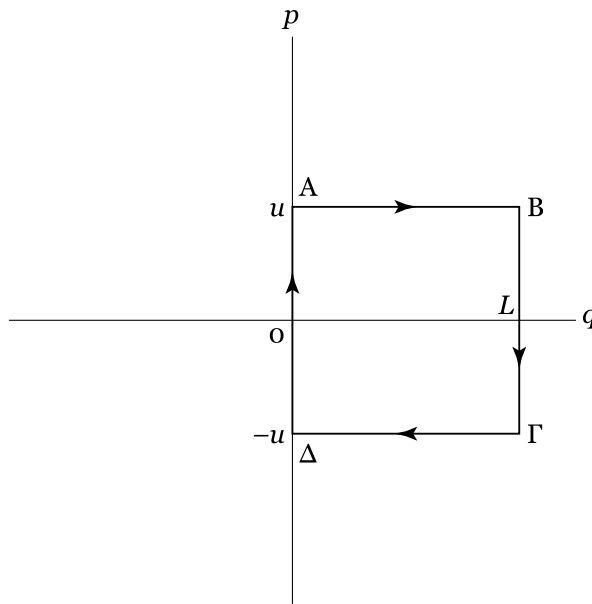
Η αδιαβατική θεωρία έχει πολλές εφαρμογές και σε κλασικά προβλήματα. Η κίνηση, για παράδειγμα, των πλανητών επηρεάζεται από τη μεταβολή της μάζας του Ήλιου. Φυσικά αυτή η μεταβολή συντελείται με πολύ βραδύ ρυθμό σε σύγκριση με την περίοδο περιφοράς των πλανητών. Συγκεκριμένα, η μάζα του Ήλιου μειώνεται κατά έναν παράγοντα τάξης 10^{-13} ανά έτος, οπότε η αδιαβατική θεώρηση μπορεί να εφαρμοστεί στο ηλιακό σύστημα με στόχο τη μελέτη των επιπτώσεων της μεταβολής της ηλιακής μάζας στις τροχιές των πλανητών. Ομοίως, σε μικροσκοπική κλίμακα, σε ένα δοχείο χαμηλής πίεσης τα άτομα προσκρούουν στα τοιχώματα του δοχείου με περίοδο της τάξης των $10^{-5} - 10^{-4}$ s. Αν ο όγκος του δοχείου μεταβάλλεται με χαρακτηριστικό χρόνο μεταβολής 1 s, οι αλλαγές που θα παρατηρήσουμε στο σύστημα ερμηνεύονται και αυτές από το αδιαβατικό θεώρημα. Άλλες εφαρμογές του αδιαβατικού θεωρήματος συναντούμε στη διάδοση κυμάτων σε μέσα στα οποία ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται είτε χρονικά, είτε χωρικά. Αν η χρονική μεταβολή του δείκτη διάθλασης είναι πολύ αργή σε σχέση με την περίοδο του κύματος ή αν η χωρική μεταβολή του είναι εξαιρετικά μικρή σε ένα μήκος κύματος, τότε η αδιαβατική θεωρία μπορεί να εφαρμοστεί στη μελέτη της διάδοσης του κύματος.

Πριν αποδείξουμε το αδιαβατικό θεώρημα, θα δείξουμε με ένα απλό παράδειγμα την ισχύ του. Θεωρούμε μια μπάλα μοναδιαίας μάζας, η οποία κινείται σε μια ευθεία κάθετη σε δύο τοιχώματα. Όταν η μπάλα συγκρουστεί με κάποιο από τα τοιχώματα, ανακλάται ελαστικά. Το αριστερό τοίχωμα είναι ακίνητο, αλλά το δεξιό τοίχωμα πλησιάζει το πρώτο τοίχωμα με ταχύτητα U σαν έμβολο που συστέλλει το χώρο κίνησης της μπάλας. Αν $U = 0$, τα τοιχώματα παραμένουν στη θέση τους ενώ η ποσότητα

⁷Εκείνη την εποχή υπήρχαν αρκετές πειραματικές ενδείξεις ότι κάτι τέτοιο ισχύει. Τέτοιες ενδείξεις προέρχονταν για παράδειγμα από το φάσμα της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος.

Τι μπορούμε να υπολογίσουμε με τα αδιαβατικά αναλλοίωτα;

Επίδειξη του αδιαβατικού αναλλοιώτου με ένα μονοδιάστατο μονοατομικό αέριο



Σχήμα 10.10: Η τροχιά στο χώρο των φάσεων ενός σωματιδίου που κινείται σε μία διάσταση και ανακλάται ελαστικά σε τοιχώματα που βρίσκονται σε απόσταση L . Λίγο προτού το σωματίδιο προσπέσει στο δεξιό τοίχωμα (σημείο B), κινείται με ταχύτητα u . Αμέσως μετά την κρούση το σωματίδιο ανακλάται και αποκτά ταχύτητα $-u$. Η τροχιά στο χώρο των φάσεων διανύει ακαριαία κατά την ανάκλαση το ευθύγραμμο τμήμα BΓ. Τα ίδια συμβαίνουν όταν το σωματίδιο επιστρέφει στο αριστερό τοίχωμα. Συνολικά, η τροχιά του σωματιδίου με συγκεκριμένη ενέργεια είναι το ορθογώνιο ABΓΔΑ.

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq = \frac{Lu_0}{\pi} \quad (10.41)$$

διατηρείται σταθερή, όπου L είναι η απόσταση μεταξύ των τοιχωμάτων και u_0 η ταχύτητα της μπάλας (βλ. Σχήμα 10.10). Θα δείξουμε ότι η ποσότητα αυτή παραμένει σταθερή, όταν τα τοιχώματα πλησιάζουν το ένα το άλλο με ταχύτητα $U \ll u$, ώστε το σύστημα να μεταβάλλεται ελάχιστα στο χαρακτηριστικό χρόνο του συστήματος $2L/u$, δηλαδή το χρόνο που αντιστοιχεί σε ένα πήγαινε-έλα της μπάλας. Κατά την εξέλιξη του συστήματος η ταχύτητα της μπάλας δεν παραμένει σταθερή. Εάν η ταχύτητα της μπάλας πριν από τη n -οστή κρούση αυτής με το κινούμενο τοίχωμα είναι u_{n-1} και αμέσως μετά τη n -οστή κρούση είναι u_n , τότε, επειδή η σχετική ταχύτητα της μπάλας ως προς το τοίχωμα είναι σταθερή, θα είναι $u_n - U = u_{n-1} + U$, οπότε

$$u_n = u_{n-1} + 2U. \quad (10.42)$$

Από την αναδρομική αυτή σχέση συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα μετά τη n -οστή κρούση είναι

$$u_n = u_0 + 2nU, \quad (10.43)$$

όπου u_0 η αρχική ταχύτητα της μπάλας, όταν τα τοιχώματα βρίσκονταν σε απόσταση L . Έστω x_n η απόσταση μεταξύ των τοιχωμάτων τη στιγμή της n -οστής κρούσης και τ_n το χρονικό διάστημα μεταξύ της n -οστής και της $(n+1)$ -οστής κρούσης. Η μείωση της απόστασης των τοι-

χωμάτων ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$x_{n+1} - x_n = -U\tau_n, \quad (10.44)$$

Εν τω μεταξύ στο χρονικό διάστημα μεταξύ της n -οστής και της $(n+1)$ -οστής κρούσης τ_n η μπάλα, κινούμενη με ταχύτητα u_n , θα έχει διανύσει απόσταση $x_n + x_{n+1}$ οπότε

$$\tau_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{u_n}. \quad (10.45)$$

Αν συνδυάσουμε όλες τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στον αναγωγικό τύπο

$$x_{n+1} = x_n \frac{u_0 + (2n-1)U}{u_0 + (2n+1)U}, \quad (10.46)$$

ο οποίος δίνει

$$x_{n+1} = L \frac{u_0}{u_0 + (2n+1)U}, \quad (10.47)$$

αν υποθέσουμε ότι αρχικά (για $t = 0$) η μπάλα βρισκόταν στο σταθερό τοίχωμα, οπότε $x_1 = Lu_0/(u_0+U)$. Ορίζουμε τώρα τη μεταβλητή δράσης (action variable)

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \oint p dx, \quad (10.48)$$

υπολογισμένη στην κλειστή διαδρομή από τη n -οστή κρούση στο σταθερό τοίχωμα⁸ μέχρι τη $(n+1)$ -οστή κρούση στο ίδιο τοίχωμα. Η διαδρομή αυτή περιλαμβάνει εν μέρει τη διαδρομή προς το κινητό τοίχωμα με ταχύτητα u_n και εν μέρει τη διαδρομή προς το σταθερό τοίχωμα μετά τη $n+1$ -οστή κρούση με ταχύτητα u_{n+1} . Έτσι, η μεταβλητή δράσης για την κλειστή αυτή διαδρομή θα είναι

$$I_n = \frac{x_{n+1}(u_n + u_{n+1})}{2\pi} = \frac{Lu_0}{\pi} = I_0. \quad (10.49)$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα αυτή παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της διεργασίας, παρότι όλα τα άλλα φυσικά μεγέθη του προβλήματος, το μήκος της ελεύθερης κίνησης, η ταχύτητα του σωματιδίου και η ενέργεια του σωματιδίου μεταβάλλονται και μάλιστα δραματικά. Η αλήθεια είναι ότι αυτή η απόλυτη σταθερότητα του μεγέθους I_n είναι πλασματική. Για παράδειγμα, αν ο εκάστοτε "κύκλος" στο χώρο των φάσεων είχε ως αφετηρία όχι το ακίνητο τοίχωμα αλλά το κινητό, το ολοκλήρωμα $\oint p dx$ θα λάμβανε ελαφρώς διαφορετική τιμή

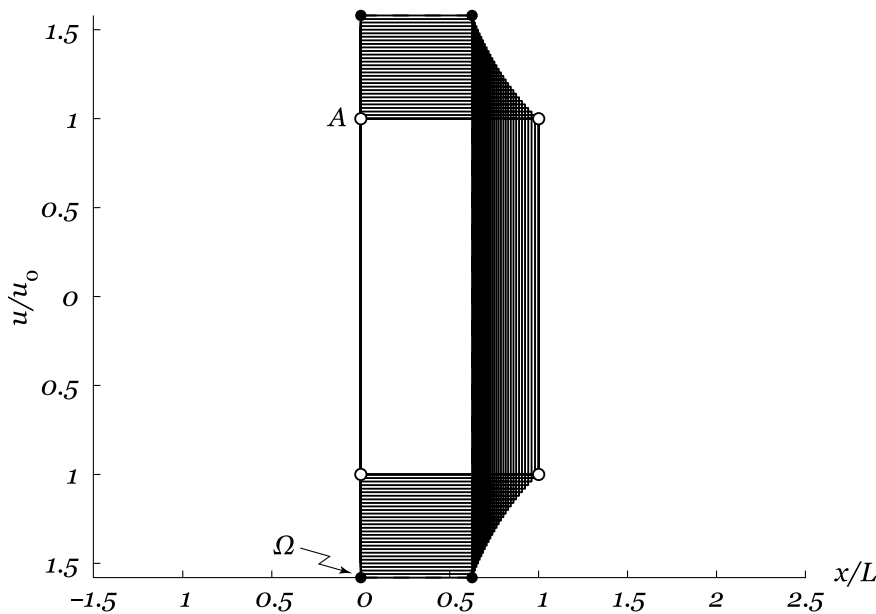
$$I'_n = \frac{u_{n+1}(x_n + x_{n+1})}{2\pi} = I_0 \frac{u_0^2 + 4nUu_0 + 4n^2U^2}{u_0^2 + 4nUu_0 + (4n^2 - 1)U^2}. \quad (10.50)$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη μεταβολή της νέας μεταβλητής δράσης I'_n , όταν τα τοιχώματα κινούνται αδιαβατικά, δηλαδή όταν $u_0 \gg U$. Ας

⁸Χρησιμοποιήσαμε αυτό το σημείο ούτως ώστε να κλείνει η διαδρομή στο χώρο των φάσεων.

εκτελέσουμε ένα αριθμητικό πείραμα: θεωρούμε τις τιμές $u_0 = 1, L = 1$ και $U = 0.01$. Όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί και η νέα ποσότητα I'_n είναι περίπου (αλλά όχι ακριβώς) σταθερή, αφού $u_0 \gg U$, καθ' όλη τη διάρκεια της διεργασίας. Στον πίνακα παρατίθεται ακόμη η ταχύτητα της μπάλας u_n , η κινητική ενέργεια της μπάλας $E_n = u_n^2/2$ και η απόσταση μεταξύ των τοιχωμάτων x_n τη στιγμή αμέσως μετά τη n -οστή κρούση της μπάλας με το κινούμενο τοίχωμα. Σημειώνουμε ότι οι δύο ποσότητες I_n και I'_n δεν αφορούν ακριβώς στον ίδιο κύκλο: η I_n σχετίζεται με τον κύκλο γύρω από την n -οστή κρούση στο κινούμενο τοίχωμα, ενώ η I'_n σχετίζεται με τον κύκλο που έχει ως αφετηρία αυτή την κρούση.

n	x_n	E_n	πI_n	$\pi I'_n$
1	0.99	0.52	1	1.001
10	0.83	0.72	1	1.00007
50	0.50	2.00	1	1.00003
100	0.33	4.50	1	1.00001
500	0.09	60.50	1	1.0000008
1000	0.05	220.50	1	1.0000002



Σχήμα 10.11: Η τροχιά στο χώρο των φάσεων, όταν το ένα τοίχωμα πλησιάζει αργά το άλλο. Η αρχική θέση είναι το σημείο A, ενώ η τελική, ύστερα από 30 “κύκλους”, είναι το σημείο Ω. Η φορά διαγραφής είναι σημειωμένη στο διάγραμμα. Το αρχικό ορθογώνιο είναι σημειωμένο με άσπρους κύκλους, ενώ το τελικό με μαύρους κύκλους. Η διατήρηση του εμβαδού των “κύκλων” είναι εμφανής.

Παρατηρούμε, ότι, παρόλο που η ενέργεια της μπάλας ύστερα από 1000 κρούσεις έχει αυξηθεί περισσότερο από 400 φορές και η απόσταση μεταξύ των τοιχωμάτων έχει σχεδόν εκμηδενιστεί, η μεταβλητή δράσης έχει παραμείνει σε εκπληκτικό βαθμό σταθερή. Το εκπληκτικό αυτό αποτέλεσμα αποτελεί το περιεχόμενο του αδιαβατικού θεωρήματος. Αξίζει

Κι ενώ όλα αλλάζουν, η μεταβλητή δράσης μένει περίπου ίδια

να δοκιμάσει κανείς και με αρκετά μεγαλύτερες τιμές της U , για να διαπιστώσει πόσο ισχυρό είναι το θεώρημα. Επειδή τα τοιχώματα πλησιάζουν μεταξύ τους, η περίοδος της κίνησης της μπάλας μικραίνει και η αδιαβατική συνθήκη όσον αφορά στη μεταβολή της απόστασης μεταξύ των τοιχωμάτων γίνεται ολοένα και πιο ακριβής. Τι θα συνέβαινε, όμως, αν τα τοιχώματα, αντί να πλησιάζουν, απομακρύνονταν το ένα από το άλλο; Σε αυτή την περίπτωση η κίνηση της μπάλας θα επιβραδυνόταν ολοένα και περισσότερο, οπότε η ταχύτητα με την οποία θα απομακρύνονταν μεταξύ τους τα τοιχώματα θα γινόταν τελικά συγκρίσιμη με την ταχύτητα της μπάλας. Το καταπληκτικό είναι ότι ακόμη και σε αυτή την περίπτωση η μεταβλητή δράσης παραμένει σχεδόν σταθερή, τουλάχιστον ωστόσο καταστούν συγκρίσιμοι οι χαρακτηριστικοί χρόνοι κίνησης της μπάλας και μετακίνησης του τοιχώματος. Δοκιμάστε το! (Για το εν λόγω πρόβλημα υπάρχει κάποιος γρήγορος τρόπος να μετατρέψετε κατάλληλα τις προηγούμενες σχέσεις.)

Το αδιαβατικό θεώρημα έχει προσεγγιστική ισχύ και η απόδειξή του είναι διαφορετικής φύσεως από εκείνες που αφορούν σε θεωρήματα σαν αυτά που έχουμε συναντήσει έως τώρα. Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια μια απόδειξη που αναδεικνύει παραστατικά τι συμβαίνει κατά τις αδιαβατικές μεταβολές. Θα θεωρήσουμε ένα χαμιλτονιανό σύστημα, πολλών εν γένει βαθμών ελευθερίας, που περιγράφεται από μια Χαμιλτονιανή της μορφής $H(q, p, \lambda)$, όπου η παράμετρος λ δηλώνει μια παράμετρο του συστήματος, η οποία εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Θα υποθέσουμε, επιπλέον, ότι η υπερεπιφάνεια $H(q, p, \lambda) = E$ είναι μια κλειστή επιφάνεια στο χώρο των φάσεων για κάθε σταθερή τιμή της παραμέτρου λ που θα εξετάσουμε. Το γεγονός ότι η επιφάνεια είναι κλειστή σημαίνει ότι για δεδομένο σταθερό λ όλες οι συντεταγμένες λαμβάνουν τιμές σε κλειστά διαστήματα. Με άλλα λόγια, η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει την απαίτηση η κίνηση να είναι ταλαντωτική. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι η κίνηση σαρώνει όλα τα σημεία της επιφάνειας και επομένως όλες οι συντεταγμένες διαγράφουν κάποιο κλειστό διάστημα χωρίς κατ' ανάγκην η κίνηση να είναι περιοδική. Για να γίνει κατανοητό αυτό, ας φανταστούμε μια τροχιά επάνω σε έναν τόρο, η οποία περιτυλίσσεται με τέτοιο τρόπο γύρω από αυτόν, ώστε να μην κλείνει, αλλά να καλύπτει σιγά-σιγά με τη συνεχή περιέλιξή της ολόκληρη την επιφάνεια του τόρου. Στην περίπτωση ενός βαθμού ελευθερίας η εν λόγω "επιφάνεια" είναι μια κλειστή καμπύλη στο χώρο των φάσεων και η κίνηση είναι τότε κατ' ανάγκην περιοδική.

Η συνθήκη αδιαβατικότητας της μεταβολής, που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω στην απόδειξη του αδιαβατικού αναλλοιώτου, συνοψίζεται στο ότι η παράμετρος $\lambda(t)$ μεταβάλλεται με πολύ αργό ρυθμό σε σχέση με όλους τους χαρακτηριστικούς χρόνους του συστήματος, δηλαδή σε σχέση με τον εκάστοτε χρόνο που απαιτείται ώστε κάθε συντεταγμένη να διαγράψει έναν πλήρη κύκλο.

Ας δούμε τι θα συνέβαινε γενικά, στην περίπτωση δηλαδή που η εξέλιξη της παραμέτρου λ δεν είναι αδιαβατική. Έστω ότι αρχικά το σύστημα κείται στην υπερεπιφάνεια $H(q, p, \lambda(0)) = E$ που αντιστοιχεί σε μία ορισμένη τιμή της παραμέτρου $\lambda = \lambda(0)$ και σε ορισμένη τιμή της Χα-

Σχετικά με την απόδειξη του αδιαβατικού θεωρήματος

Για μικρούς χρόνους η τροχιά διατρέχει μια ισοενεργειακή επιφάνεια

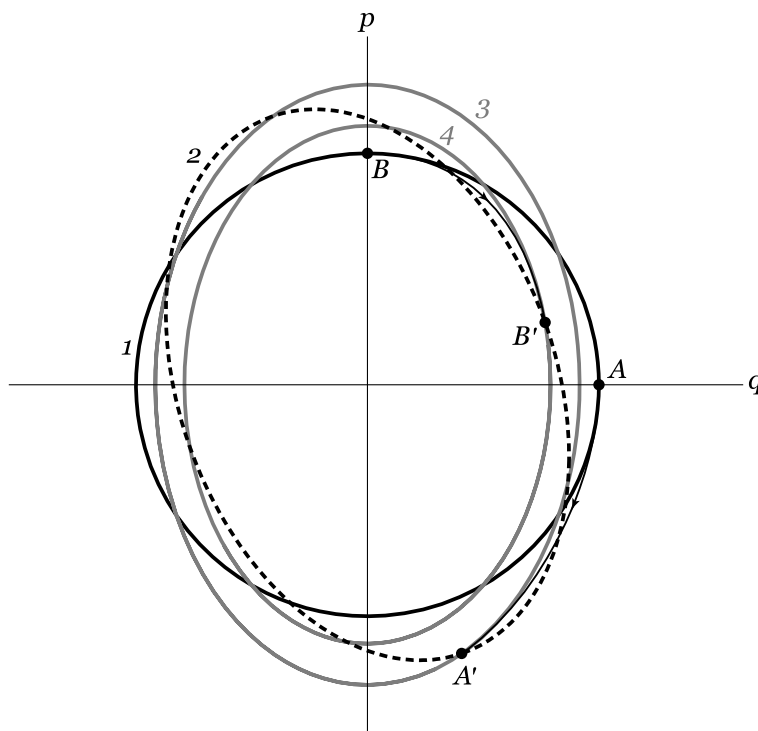
μιλτονιανής E . Με την πάροδο του χρόνου η υπερεπιφάνεια αυτή εξελίσσεται σε μια νέα υπερεπιφάνεια, υπό την έννοια ότι κάθε σημείο αυτής εξελίσσεται σε κάποιο άλλο σημείο του χώρου των φάσεων. Η νέα αυτή υπερεπιφάνεια, όμως, δεν είναι αναγκαστικά επιφάνεια σταθερής ενέργειας (βλ. Σχήμα 10.12). Τούτο οφείλεται στο εξής φαινόμενο: η εν λόγω υπερεπιφάνεια περιγράφει συστήματα που ξεκινούν όλα με την ίδια ενέργεια. Ωστόσο, η παράμετρος λ αρχίζει να εξελίσσεται τη στιγμή που το κάθε σύστημα βρίσκεται σε διαφορετική φάση της κίνησής του. Για παράδειγμα, αν, ενώ κάνουμε κούνια, αρχίσουμε να ανεβοκατεβάζουμε τα πόδια μας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που θα τα ανεβοκατεβάζαμε αν θέλαμε να αυξήσουμε το πλάτος της αιώρησής μας, αλλά σε εντελώς λάθος χρονική στιγμή, το πλάτος της αιώρησης και μαζί και η ενέργεια της ταλάντωσής μας όχι μόνο δεν θα αυξηθεί πολύ αλλά μπορεί ακόμη και να μειωθεί. Δοκιμάστε το με την πρώτη ευκαιρία! Παρά ταύτα, σύμφωνα με το θεώρημα του Liouville που, όπως θυμάστε, ισχύει ακόμη και όταν η Χαμιλτονιανή έχει άμεση χρονική εξάρτηση, η νέα υπερεπιφάνεια θα περικλείει τον ίδιο όγκο με την αρχική υπερεπιφάνεια. Το ίδιο θα ισχύει και για το εμβαδόν της προβολής αυτού του όγκου σε κάθε επίπεδο (q_i, p_i) : το εμβαδόν αυτό θα παραμένει επίσης σταθερό. Το εμβαδόν της προβολής του όγκου σε κάποιο επίπεδο (q_i, p_i) δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της καμπύλης που ορίζει η προβολή της υπερεπιφάνειας σε αυτό το επίπεδο, είναι δηλαδή $\oint p_i dq_i$. Κάθε σημείο της υπερεπιφάνειας εξελισσόμενο θα διαγράψει μία καμπύλη και τελικά, αφότου ολοκληρωθεί η μεταβολή της παραμέτρου λ και η λ σταθεροποιηθεί, το σύστημα θα βρεθεί να διαγράφει μια νέα ισοενεργειακή υπερεπιφάνεια με ενέργεια $E'(q_0, p_0)$. Γενικά, αυτή η τελική ισοενεργειακή επιφάνεια θα εξαρτάται από το αρχικό σημείο εκκίνησης στο χώρο των φάσεων (q_0, p_0) , ενώ το εμβαδόν των προβολών τέτοιων υπερεπιφανειών που προκύπτουν από διαφορετικές αρχικές συνθήκες θα είναι διαφορετικό (βλ. Σχήμα 10.12). Αν δείξουμε ότι για αδιαβατικές μεταβολές κάθε σημείο που διαγράφει αρχικά την υπερεπιφάνεια $H(q, p, \lambda(0)) = E$ θα καταλήξει να διαγράφει και την ίδια αντίστοιχη χρονικά εξελιγμένη υπερεπιφάνεια $H(q, p, \lambda(t)) = E'$, δηλαδή ότι κατά την αργή μεταβολή του λ οι υπερεπιφάνειες παραμένουν συνεχώς ισοενεργειακές, τότε το θεώρημα Liouville οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο όγκος που περικλείεται από την υπερεπιφάνεια που διαγράφεται από την τροχιά είναι πάντοτε σταθερός. Ο όγκος αυτός είναι το αδιαβατικό αναλλοίωτο. Στην περίπτωση της μονοδιάστατης κίνησης το αδιαβατικό αναλλοίωτο είναι το

$$\oint p dq .$$

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, μια αδιαβατική εξέλιξη του συστήματος από κάποιο σημείο q_0, p_0 του χώρου των φάσεων (το q συμβολίζει όλες τις συντεταγμένες των θέσεων και ομοίως το p όλες τις ορμές). Εφαρμόζοντας τις κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον βρίσκουμε ότι η χρονική μεταβολή

Η ισοενεργειακή επιφάνεια μεταβάλλεται με το χρόνο

Σε μεγάλους χρόνους η τροχιά τέμνει τις ισοενεργειακές υπερεπιφάνειες



Σχήμα 10.12: Μία μη αδιαβατική μεταβολή της συχνότητας αρμονικού ταλαντωτή. Η συχνότητα του ταλαντωτή μεταβάλλεται σε μία χρονική μονάδα από $\omega^2 = 1$ σε $\omega^2 = 2$, σύμφωνα με το νόμο $\omega^2 = 1 + t$. Αν η συχνότητα του ταλαντωτή ήταν σταθερά $\omega^2 = 1$, η τροχιά στο χώρο των φάσεων θα ήταν η ισοενεργειακή κυκλική τροχιά 1. Η διακεκομμένη καμπύλη 2 είναι η εξέλιξη όλων των σημείων της αρχικής ισοενεργειακής καμπύλης 1 ύστερα από χρόνο $t = 1$ κατά την εν λόγω μη αδιαβατική μεταβολή από $t = 0$ σε $t = 1$. Το θεώρημα Liouville βεβαιώνει ότι το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες 1 και 2 είναι το ίδιο. Προσέξτε ότι η καμπύλη 2 δεν είναι ισοενεργειακή καμπύλη (δεν πρόκειται για έλλειψη). Το σημείο A μεταβαίνει στο σημείο A' σε χρόνο $t = 1$ ακολουθώντας τη λεπτή γραμμή που τα συνδέει ενώ η 3 είναι η ισοενεργειακή έλλειψη που θα διαγράψει το σημείο A' αν σταματήσει για $t \geq 1$ να μεταβάλλεται η συχνότητα. Ένα άλλο σημείο, το B , μεταβαίνει στο σημείο B' σε χρόνο $t = 1$ ακολουθώντας την άλλη λεπτή γραμμή, ενώ η καμπύλη 4 είναι η ισοενεργειακή έλλειψη που θα διαγράψει το B' αν σταματήσει να μεταβάλλεται η συχνότητα για $t \geq 1$. Προσέξτε ότι οι ισοενεργειακές καμπύλες 3 και 4 δεν αντιστοιχούν στην ίδια ενέργεια και δεν περικλείουν ίσα έμβαδά. Αν η μεταβολή της συχνότητας γινόταν αδιαβατικά, οι καμπύλες 2, 3, 4 θα ταυτίζονταν και το εμβαδόν που περικλείεται από αυτές θα ήταν ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται από την αρχική καμπύλη 1.

της Χαμιλτονιανής είναι

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \\ &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της Χαμιλτονιανής προέρχεται μόνο από τη χρονική εξάρτηση της παραμέτρου λ . Στην περίπτωση, βέβαια, που δεν υπάρχει χρονική εξάρτηση της παραμέτρου λ η ενέργεια διατηρείται κατά την κίνηση. Επομένως, η μεταβολή της ενέργειας του συστήματος που ξεκίνησε από το q_0, p_0 σε ένα χρονικό διάστημα T είναι

$$\Delta E_{(q_0, p_0)} = \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} dt. \quad (10.52)$$

Σημειώνουμε ότι η μεταβολή αυτή εξαρτάται από το αρχικό σημείο (q_0, p_0) εκκίνησης. Έστω ότι $T \gg \tau$, όπου τ ο χαρακτηριστικός χρόνος της μεγαλύτερης περιόδου της κυκλικής μεταβολής των συντεταγμένων του συστήματος. Εμείς θα θεωρήσουμε αδιαβατικές μεταβολές του λ τέτοιες ώστε η μεταβολή του λ και των παραγώγων του στο χαρακτηριστικό χρόνο που οι συντεταγμένες διαγράφουν έναν πλήρη κύκλο στην υπερεπιφάνεια (μια περιέλιξη της τροχιάς στον τόρο) να είναι μηδαμινή, δηλαδή $\delta\lambda = \lambda\tau \ll \lambda$, $\dot{\lambda}\tau \ll \dot{\lambda}$ κ.ο.κ. Αφού η λ και η $\dot{\lambda}$ δεν μεταβάλλονται σημαντικά σε κάθε χρονικό διάστημα τ , μπορούν να εκληφθούν ως σταθερές. Συνεπώς, η μεταβολή της Χαμιλτονιανής θα δίνεται, με πολύ καλή προσέγγιση, από το άθροισμα των μεταβολών αυτής σε κάθε χρονικό διάστημα τ

Τι σημαίνει πρακτικά αδιαβατική μεταβολή;

$$\Delta E = \sum_j \overline{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)} \dot{\lambda}(j\tau) \tau, \quad (10.53)$$

όπου η μέση τιμή

$$\overline{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)} = \frac{1}{\tau} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda(j\tau)} dt \quad (10.54)$$

υπολογίζεται για τη συγκεκριμένη τιμή του λ στο διάστημα $j\tau \leq t \leq (j+1)\tau$. Αυτό σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται για έναν πλήρη κύκλο του συστήματος με σταθερή τιμή της παραμέτρου λ . Το ενδιαφέρον είναι ότι η μέση αυτή τιμή είναι ανεξάρτητη από το αρχικό σημείο (q_0, p_0) και συνεπώς η ολική μεταβολή της Χαμιλτονιανής είναι και αυτή ανεξάρτητη από το αρχικό σημείο· αυτός είναι και ο λόγος που παραλείψαμε τον προσδιοριστικό δείκτη (q_0, p_0) στη μεταβολή της ενέργειας. Συνάγεται, λοιπόν, ότι για αδιαβατικές μεταβολές όλα τα σημεία της υπερεπιφάνειας $H(q, p, \lambda(0)) = E$ θα απεικονιστούν ύστερα από χρόνο $T \gg \tau$ στην ισοενεργειακή υπερεπιφάνεια

Η τροχιά θα διατρέχει την ίδια ισοενεργειακή υπερεπιφάνεια απ' όπου και αν ξεκινήσει

$$H(q, p, \lambda(T)) = E + \Delta E,$$

και συνεπώς κάθε αρχική συνθήκη στην αρχική υπερεπιφάνεια ύστερα από χρόνο T θα διαγράφει τη νέα ισοενεργειακή υπερεπιφάνεια, οπότε ο όγκος που περικλείεται από αυτή την υπερεπιφάνεια θα είναι σταθερός. Παρατηρούμε επομένως ότι το θεώρημα Liouville είναι αυτό που εξασφαλίζει το αδιαβατικό αναλλοίωτο του όγκου που περικλείεται από την τροχιά.

10.4 Ταλαντωτής με μεταβλητή συχνότητα

Εκκρεμές με αργά
μεταβαλλόμενο μήκος

Ως παράδειγμα εφαρμογής του αδιαβατικού αναλλοιώτου θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο ακόλουθο ερώτημα: τι συμβαίνει με την περίοδο ενός εκκρεμούς, όταν το μήκος του νήματος μεταβάλλεται με αργό ρυθμό (βλ. Σχήμα 10.13); Το πρόβλημα αυτό έχει ιστορική σημασία: συζητήθηκε και απαντήθηκε από τον Einstein κατά τη διάρκεια του περίφημου Πρώτου Συνεδρίου του Solvay το 1911, κατόπιν σχετικής ερώτησης που του έθεσε ο Lorentz.

Προκειμένου να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς, θεωρούμε ότι το εκκρεμές εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Σε αυτή την περίπτωση η Χαμιλτονιανή –αν διαγράψουμε σταθερές που δεν αλλοιώνουν τό φυσικό περιεχόμενο του προβλήματος– έχει τη μορφή

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2(t)}{2}q^2, \quad (10.55)$$

όπου $\omega(t)$ είναι η αργά μεταβαλλόμενη συχνότητα του ταλαντωτή. Εάν η συχνότητα δεν παρουσίαζε καμία μεταβολή, η ενέργεια θα παρέμενε σταθερή και η μεταβλητή δράσης θα ήταν

$$I(E, \omega) = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E, \omega) dq = \frac{E}{\omega}, \quad (10.56)$$

δεδομένου ότι το $\oint p dq$ είναι το εμβαδόν που περικλείεται από την ελλειπτική τροχιά $H = E$ στο χώρο των φάσεων (οι ημιάξονες της έλλειψης είναι $\sqrt{2E}/\omega$ και $\sqrt{2E}$ αντίστοιχα, ενώ το εμβαδόν της έλλειψης είναι $2\pi E/\omega$). Επομένως, από το αδιαβατικό θεώρημα συνάγεται ότι η ποσότητα E/ω διατηρείται σε αδιαβατικές μεταβολές της συχνότητας. Επειδή, μάλιστα, η ενέργεια είναι

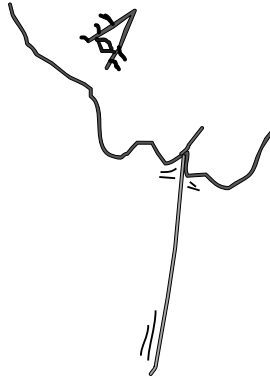
$$E = \frac{1}{2}\omega^2 A^2,$$

το πλάτος της ταλάντωσης $A(t)$ μεταβάλλεται σε αδιαβατικές μεταβολές της συχνότητας σύμφωνα με το νόμο

$$A(t) = A(0) \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(t)}}, \quad (10.57)$$

όπου $A(0)$ το αρχικό πλάτος και $\omega(0)$ η αρχική συχνότητα.

Ας εφαρμόσουμε τώρα αυτά τα αποτελέσματα στην περίπτωση ενός εκκρεμούς που εκτελεί μικρές ταλαντώσεις. Το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης του εκκρεμούς είναι $A = l\theta_{max}$, όπου l το μήκος του νήματος και θ_{max}



Σχήμα 10.13: Όταν ρουφάτε τα μακαρόνια σας, θυμηθείτε ότι το εύρος αιώρησης μεταβάλλεται με το μήκος σύμφωνα με το νόμο $l^{-3/4}$, όπου l είναι το μήκος του μακαρονιού που κρέμεται κάθε στιγμή από το στόμα σας. Προσέξτε, λοιπόν, ιδιαίτερα όταν η μακαρονάδα σας συνοδεύεται από πλούσια σάλτσα!

το γωνιακό πλάτος της ταλάντωσης. Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = \sqrt{g/l}$ οπότε σε αδιαβατικές μεταβολές του μήκους του εκκρεμούς το πλάτος των μικρών ταλαντώσεων θα είναι $\theta_{max} \propto l^{-3/4}$.

10.5 Προσέγγιση WKB

Με την αδιαβατική μέθοδο προσδιορίσαμε το πλάτος της ταλάντωσης ενός ταλαντωτή, αλλά δεν προσδιορίσαμε την εξέλιξη της φάσης της ταλάντωσης. Για τον πλήρη προσδιορισμό της κίνησης του ταλαντωτή θα χρησιμοποιήσουμε τη χρήσιμη προσεγγιστική μέθοδο WKB⁹, η οποία έχει ευρύτατες εφαρμογές. Στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή με μεταβλητή συχνότητα η εξίσωση κίνησης είναι

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0. \quad (10.58)$$

Δοκιμάζοντας ταλαντωτικές λύσεις της μορφής

$$q = e^{im(t)}, \quad (10.59)$$

και αντικαθιστώντας στην (10.58) λαμβάνουμε

$$-i\dot{m} + \dot{m}^2 = \omega^2(t). \quad (10.60)$$

Εφόσον το $\omega(t)$ μεταβάλλεται αδιαβατικά, ο όρος $|\dot{m}|$ είναι πολύ μικρότερος από τον $|\dot{m}^2|$, ο οποίος λαμβάνει την περίπου σταθερή τιμή του $\omega^2(t)$ με πολύ καλή προσέγγιση

$$\dot{m}^2 \cong \omega^2(t),$$

Αφού είδαμε πώς αλλάζει το πλάτος της ταλάντωσης, ας υπολογίσουμε και την εξέλιξη της ίδιας της κίνησης

Πώς λύνουμε αυτή την εξίσωση προσεγγιστικά;

⁹Από τα αρχικά των Gregor Wentzel [1898-1978], Hendrik Anthony Kramers [1894-1952] και Lion-Nicolas Brillouin [1889-1969] που χρησιμοποίησαν το 1926 τη μέθοδο αυτή για τον προσδιορισμό των ενεργειακών επιπέδων σε προβλήματα κβαντικής μηχανικής. Η μέθοδος αυτή αναφέρεται και ως μέθοδος Liouville-Green, διότι είχε παρουσιαστεί νωρίτερα, το 1837, σε εργασίες των Liouville και George Green [1793-1841]. Στη βιβλιογραφία αναφέρεται και ως μέθοδος WKBJ, προς τιμήν και του Sir Harold Jeffreys [1891-1989], ο οποίος χρησιμοποίησε τη μέθοδο σε μετεωρολογικές μελέτες το 1923.

οπότε προσεγγίζουμε διαδοχικά¹⁰ την $m(t)$ θέτοντας

$$\dot{m}_0^2 = \omega^2(t). \quad (10.61)$$

Στη συνέχεια για $k > 0$ κατασκευάζουμε τον αναδρομικό τύπο

$$\dot{m}_k = \sqrt{\omega^2(t) + i\ddot{m}_{k-1}}. \quad (10.62)$$

Με αυτό τον τρόπο, λαμβάνοντας αρκετά μεγάλο k , μπορούμε να προσδιορίσουμε την $m(t)$ με όση ακρίβεια επιθυμούμε. Η προσέγγιση WKB αρκείται στον υπολογισμό της πρώτης διόρθωσης στη σχέση (10.61)

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= \sqrt{\omega^2(t) + i\ddot{m}_0} \\ &= \sqrt{\omega^2(t) + i\dot{\omega}(t)} \\ &\approx \omega(t) \left(1 + i \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega^2(t)} \right) \\ &= \omega(t) + i \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega(t)}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$m_1 = \int_0^t \omega(s) ds + i \ln \sqrt{\frac{\omega(t)}{\omega(0)}}.$$

Προσεγγίζοντας την m με m_1 λαμβάνουμε την προσέγγιση WKB της κίνησης του ταλαντωτή

$$q(t) = q(0) \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(t)}} e^{\pm i \int_0^t \omega(s) ds}. \quad (10.63)$$

Παρατηρούμε ότι η ίδια προσέγγιση ισχύει και για τα δύο πρόσημα της φάσης· συνεπώς, η γενική κίνηση σε αυτή την προσέγγιση δίνεται από τη σχέση

$$q(t) = A_0 \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(t)}} \cos \left(\int_0^t \omega(s) ds + \theta_0 \right). \quad (10.64)$$

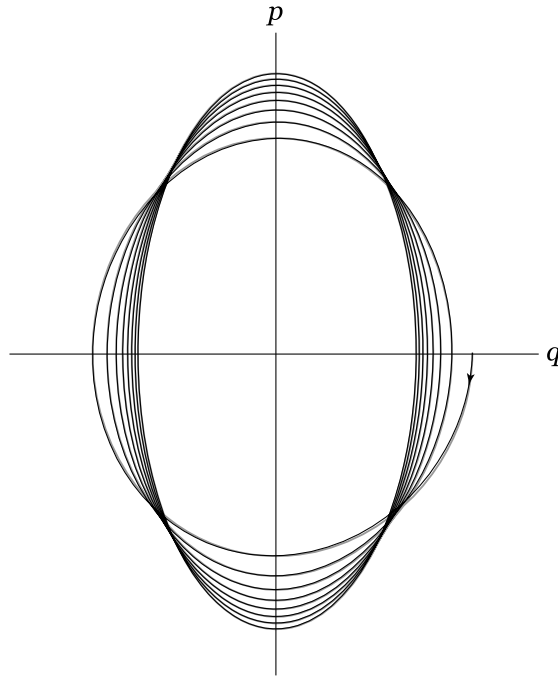
Σύμφωνα, δηλαδή, με την προσέγγιση WKB, το πλάτος εξελίσσεται βάσει του νόμου που προβλέπεται από το αδιαβατικό αναλλοίωτο, ενώ η φάση του ταλαντωτή $\theta(t)$ είναι η συσσωρευμένη φάση $\theta(t) = \int_0^t \omega(s) ds + \theta_0$, που ικανοποιεί τη στιγμιαία σχέση

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t). \quad (10.65)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 10.5. Δείξτε ότι η λύση WKB συνεπάγεται το αδιαβατικό αναλλοίωτο του E/ω για τον αρμονικό ταλαντωτή με μεταβλητή συχνότητα.

¹⁰ Αν δεν έχετε δει έως τώρα αυτή την προσέγγιση, υπολογίστε με διαδοχικές προσεγγίσεις τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + \epsilon x - 1 = 0$ με $\epsilon \ll 1$. Επειδή $x = \pm \sqrt{1 - \epsilon x}$, η θετική ρίζα μπορεί να υπολογιστεί διαδοχικά από τον αναδρομικό τύπο $x_k = \sqrt{1 - \epsilon x_{k-1}}$ με $x_0 = 1$ (τη θετική ρίζα όταν $\epsilon = 0$). Υπολογίστε με αυτό τον τρόπο τη θετική ρίζα του τριωνύμου και συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με την ακριβή έκφραση.



Σχήμα 10.14: Η τροχιά στο χώρο των φάσεων αρμονικού ταλαντωτή με φυσική συχνότητα $\omega^2 = 1 + at$ με $a = 0.1$. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί και η ακριβής λύση και η προσεγγιστική λύση WKB. Οι δύο τροχιές διακρίνονται πολύ δύσκολα η μία από την άλλη. Το γεγονός αυτό είναι ενδεικτικό της ακρίβειας της λύσης WKB.

Είναι ενδιαφέρον ότι η προσέγγιση WKB παρουσιάζει εκπληκτική ακρίβεια. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $\omega^2 = 1 + at$ με $a = 0.1$ (μια όχι και τόσο αργή μεταβολή). Σύμφωνα με την προσέγγιση WKB, αν αρχικά ήταν $q(0) = 1, p(0) = 0$, η θέση $q(t)$ θα δίνεται από την έκφραση

Πόσο καλή είναι η προσέγγιση WKB;

$$q(t) = \frac{1}{(1 + at)^{1/4}} \cos \left(\int_0^t \sqrt{1 + as} ds \right),$$

ενώ στο ίδιο επίπεδο προσέγγισης η ορμή $p(t)$ θα είναι

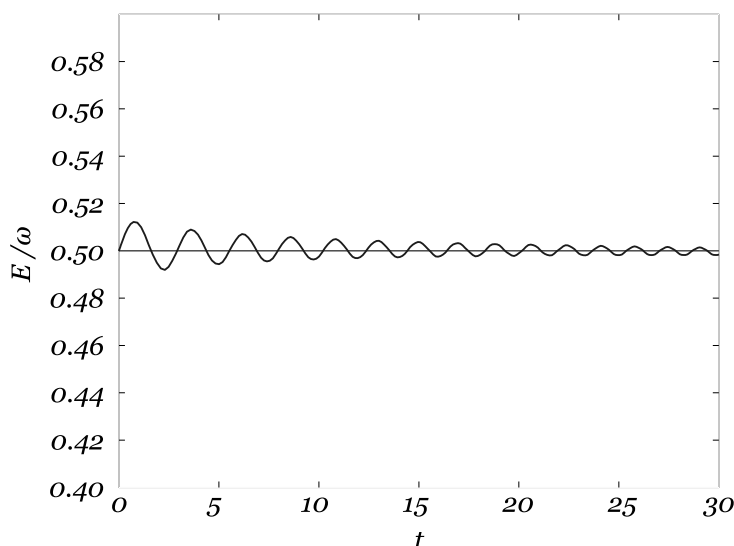
$$p(t) = -(1 + at)^{1/4} \sin \left(\int_0^t \sqrt{1 + as} ds \right).$$

Η φάση εύκολα υπολογίζεται ότι είναι

$$\int_0^t \sqrt{1 + as} ds = \frac{2}{3a} ((1 + at)^{3/2} - 1).$$

Στο Σχήμα 10.14 έχει σχεδιαστεί η τροχιά του συστήματος στο χώρο των φάσεων υπολογισμένη μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης του ακριβούς προβλήματος καθώς και η τροχιά που προκύπτει από την προσέγγιση WKB που υπολογίσαμε παραπάνω. Η σύμπτωση της προσεγγιστικής λύσης WKB με την πραγματική είναι εξαιρετική. Φαίνεται από το σχήμα ότι η τροχιά δεν είναι περιοδική και ότι το χωρίο συνεχώς παραμορφώνεται. Η αδιαβατική σταθερά δηλώνει το αναλλοίωτο του εμβαδού που περικλείεται σε κάθε περιστροφή (η αντίστοιχη καμπύλη δεν κλείνει). Η χρονική

εξέλιξη της αδιαβατικής σταθεράς E/ω απεικονίζεται στο Σχήμα 10.15. Προσέξτε την ακρίβεια του αδιαβατικού αναλλοιώτου, η οποία στο εν λόγω παράδειγμα με την πάροδο του χρόνου βελτιώνεται. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό; Θυμηθείτε το παράδειγμα του εμβόλου με την μπάλα.



Σχήμα 10.15: Η εξέλιξη του αδιαβατικού αναλλοιώτου E/ω στην περίπτωση αρμονικού ταλαντωτή με φυσική συχνότητα $\omega^2 = 1 + at$ με $a = 0.1$.

10.6 Ενεργός περιγραφή της δυναμικής

Πολλές φορές σε φυσικά συστήματα υπάρχουν δύο διαφορετικές χρονικές κλίμακες τ και T με $T \gg \tau$. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι κινήσεις με χαρακτηριστικό χρόνο τ μπορούν να θεωρηθούν υψίσυχνες διακυμάνσεις της τροχιάς του συστήματος που εξελίσσεται πολύ πιο αργά με χαρακτηριστικό χρόνο T . Υπολογίζοντας τη μέση επίδραση αυτών των διακυμάνσεων στη βραδέως εξελισσόμενη κίνηση, μπορούμε να καταλήξουμε σε μια ενεργό περιγραφή της δυναμικής στην οποία η εξάρτηση από το χρόνο τ έχει πλήρως εξαλειφθεί.

Αργή μεταβολή: Η αδιαβατική μεταβολή ενός συστήματος είναι παράδειγμα φυσικού συστήματος που χαρακτηρίζεται από δύο χρονικές κλίμακες: το χαρακτηριστικό χρόνο εξέλιξης του συστήματος και τον αργό χρόνο αδιαβατικής μεταβολής των παραμέτρων. Σε αυτή την περίπτωση το θεώρημα του αδιαβατικού αναλλοιώτου μάς δίνει τη δυνατότητα να μάθουμε τα χαρακτηριστικά της κίνησης, όπως για παράδειγμα το πλάτος της ταλάντωσης, ύστερα από πολλές ταλαντώσεις χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε καμία αναφορά στο μικρό χαρακτηριστικό χρόνο. Ως πρώτο παράδειγμα ενεργού περιγραφής της δυναμικής θα εξετάσουμε την περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή με μεταβλητή συχνότητα που είδαμε προηγουμένως, αλλά σε διαφορετικό πλαίσιο ανάλυσης. Θεωρούμε ότι η

τροχιά είναι της μορφής

$$q(t) = A(t) \cos \theta(t) ,$$

όπου οι A και θ είναι ανεξάρτητες συναρτήσεις που θα προσδιοριστούν από την απαίτηση η δράση να είναι στάσιμη για τις συναρτήσεις A και θ της φυσικής κίνησης. Επιλέξαμε αυτή τη μορφή, επειδή γνωρίζουμε ότι, όταν η συχνότητα είναι σταθερή, η φυσική κίνηση έχει ακριδώς αυτή τη μορφή. Εξάλλου, λόγω αδιαβατικής μεταβολής της συχνότητας αναμένουμε λύση ίδιας μορφής. Οι A και $d\theta/dt$ μεταβάλλονται με χαρακτηριστική κλίμακα T , ενώ ο ταλαντωτής εξελίσσεται με χαρακτηριστική χρονική κλίμακα $\tau = 2\pi/\omega$ με $T \gg \tau$. Επειδή η A δεν μεταβάλλεται σημαντικά σε μία περίοδο της κίνησης, θα είναι $|\dot{A}| \ll |\dot{\theta}|A$ και ως εκ τούτου η ταχύτητα του ταλαντωτή θα είναι με πολύ καλή προσέγγιση

$$\dot{q} = -A(t)\dot{\theta} \sin \theta(t) .$$

Η Λαγκρανζιανή στις συντεταγμένες αυτές είναι

$$L = \frac{1}{2} \left(A^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - \omega^2(t) A^2 \cos^2 \theta \right) .$$

Πρόκειται για ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας με γενικευμένες συντεταγμένες τις A και θ .¹¹ Η φυσική τροχιά του συστήματος προσδιορίζεται από την απαίτηση να καθίσταται η δράση στάσιμη για οποιοσδήποτε ανεξάρτητες μεταβολές δA και $\delta \theta$. Συνεπώς, οι A και θ πρέπει να είναι τέτοιες ώστε

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \left(A^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - \omega^2(t) A^2 \cos^2 \theta \right) dt = 0 .$$

Επειδή η μεταβολή είναι αδιαβατική, τα ω , A , $\dot{\theta}$ μεταβάλλονται με πολύ αργό ρυθμό και συνεπώς, αν θεωρήσουμε ένα χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ πολύ μεγαλύτερο από την περίοδο του συστήματος $\tau = 2\pi/\omega$, μπορούμε με μεγάλη ακρίβεια να αντικαταστήσουμε στην έκφραση για τη στασιμότητα της δράσης τις τριγωνομετρικές ποσότητες $\sin^2 \theta$ και $\cos^2 \theta$ με τη μέση τιμή τους $1/2$. Αναμένουμε, λοιπόν, η αδιαβατική εξέλιξη των A και θ να προκύπτει από τη στασιμότητα της δράσης που παράγεται από την ενεργό Λαγκρανζιανή

$$\bar{L}(A, \theta, \dot{A}, \dot{\theta}) = \frac{1}{4} A^2 \left(\dot{\theta}^2 - \omega^2(t) \right) . \quad (10.66)$$

Παρατηρούμε ότι η ενεργός Λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται ούτε από τη φάση της ταλάντωσης θ , αφού η φάση έχει εξαλειφθεί με την αντικατάσταση των ταλαντωτικών όρων από τη μέση τιμή τους, ούτε και από το ρυθμό χρονικής μεταβολής του πλάτους της ταλάντωσης \dot{A} , αφού το πλάτος της ταλάντωσης εξελίσσεται πολύ αργά.

Ως αποτέλεσμα της απουσίας αυτών των ποσοτήτων, η ενεργός Λαγκρανζιανή παρουσιάζει δύο νέες συμμετρίες: (α) Είναι αναλλοίωτη σε

Έστω η λύση της μορφής που θα είχαμε, αν δεν συνέβαινε καμία μεταβολή

Η Λαγκρανζιανή σε κάπως περιέργες συντεταγμένες

Η ενεργός Λαγκρανζιανή

Δυο νέες συμμετρίες αποκαλύπτονται από την ενεργό Λαγκρανζιανή.

μεταθέσεις της φάσης $\theta \rightarrow \theta + \epsilon$. Η νέα αυτή συμμετρία συνεπάγεται ένα νέο νόμο διατήρησης. Η διατηρούμενη ποσότητα είναι η συζυγής ορμή της φάσης θ

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} A^2 \dot{\theta} . \quad (10.67)$$

(β) Ταυτόχρονα, επειδή η ενεργός Λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται από το A , η εξίσωση Euler - Lagrange ως προς A είναι

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial A} = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 - \omega^2(t)) = 0 . \quad (10.68)$$

Το αδιαβατικό αναλλοίωτο ως αποτέλεσμα συμμετρίας

Επομένως, $\dot{\theta} = \pm \omega(t)$ και ως εκ τούτου η διατηρούμενη ορμή (10.67) δεν είναι άλλη από το αδιαβατικό αναλλοίωτο $A^2 \omega$. Η δεύτερη συμμετρία, μάλιστα, (βλ. σχέση (10.68)) μάς εξασφάλισε και τη χρονική εξέλιξη της φάσης που υπολογίσαμε προηγουμένως με τη μέθοδο WKB.

Ταχεία μεταβολή: Θα εξετάσουμε στη συνέχεια προβλήματα στα οποία η Χαμιλτονιανή εξαρτάται από μία παράμετρο $\lambda = a \sin \omega t$, η οποία εκτελεί πολύ γρήγορες ταλαντώσεις, δηλαδή θα θεωρήσουμε ότι $\omega \gg 2\pi/T$, όπου T ο χαρακτηριστικός χρόνος εξέλιξης του συστήματος. Για λόγους απλούστευσης θα θεωρήσουμε Λαγκρανζιανές της μορφής

$$L = \frac{1}{2} M \dot{q}^2 - V_0(q) - V_1(q) \sin \omega t , \quad (10.69)$$

όπου M μία σταθερά. Ως πρώτο χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα θεωρούμε τη Λαγκρανζιανή που διέπει την εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση σωματιδίου μοναδιαίας μάζας δίχως τριβή. Σε αυτή την περίπτωση οι όροι που υπεισέρχονται στη σχέση (10.69) είναι $M = 1$ και

$$V_0 = \frac{\omega_0^2}{2} q^2 , \quad V_1 = -Fq .$$

Η εξίσωση κίνησης είναι

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = F \sin \omega t ,$$

Η κίνηση ως υπέρθεση μιας γρήγορης και μιας αργής ταλάντωσης

ενώ η λύση αυτής μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση μιας χαμηλόσυχνης ταλαντωτικής κίνησης $q_s(t)$ και μιας υψίσυχνης διακύμανσης $q_f(t)$ (βλ. Σχήμα 10.16)

$$q(t) = q_s(t) + q_f(t) .$$

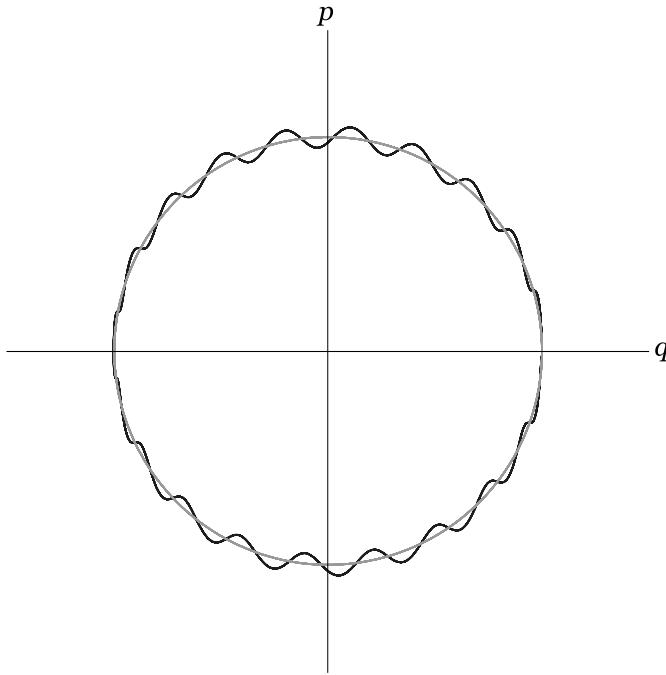
Η χαμηλόσυχνη κίνηση σε αυτή την περίπτωση είναι

$$q_s(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) ,$$

ενώ η υψίσυχνη κίνηση είναι η εξαναγκασμένη ταλάντωση στη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης,

$$q_f(t) = -\frac{F}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega t ,$$

¹¹Το σύστημα είναι στην ουσία ενός βαθμού ελευθερίας αφού η θέση του ταλαντωτή είναι αρκετή για να περιγραφεί πλήρως το σύστημα. Απλώς η επιλογή των συντεταγμένων είναι τέτοια ώστε το σύστημα να εμφανίζεται ότι είναι δύο βαθμών ελευθερίας.



Σχήμα 10.16: Η τροχιά στο χώρο των φάσεων ενός ταλαντωτή με φυσική συχνότητα $\omega_0 = 1$ χωρίς εξωτερική διέγερση (κυκλική τροχιά) και με αρμονική εξωτερική δύναμη με συχνότητα $\omega = 20$ (κυμαινόμενη τροχιά). Από το σχήμα είναι εμφανές ότι η κίνηση στην περίπτωση της εξωτερικής διέγερσης είναι υπέρθεση μιας αργής μέσης κίνησης, με χαρακτηριστικό χρόνο $2\pi/\omega_0$, και μιας αρμονικής διακύμανσης μικρού πλάτους, με χαρακτηριστικό χρόνο $2\pi/\omega$. Το πλάτος της διακύμανσης είναι τάξης $\mathcal{O}(F/M\omega^2)$. Επειδή σε αυτή την περίπτωση η εξωτερική δύναμη δεν εξαρτάται από τη θέση του ταλαντωτή, η υψίσυχη εξωτερική δύναμη δεν επηρεάζει καθόλου την αργή κίνηση του ταλαντωτή, η οποία παραμένει αρμονική ταλάντωση με τη φυσική συχνότητα και το πλάτος που θα είχε αν δεν υπήρχε η διέγερση. Εάν η εξωτερική δύναμη είχε εξάρτηση από τη θέση, τότε η αργή κίνηση θα άλλαζε εξαιτίας της υψίσυχνης διέγερσης.

η οποία, επειδή θεωρούμε ότι $\omega \gg \omega_0$, μπορεί να προσεγγισθεί από την

$$q_f(t) \approx -\frac{F}{\omega^2} \sin \omega t .$$

Η διαγραφή του όρου ω_0^2 σημαίνει ότι οι ταχείες διακυμάνσεις δεν επηρεάζονται από τη χαμηλόσυχη δυναμική. Επομένως, οι υψίσυχνες διακυμάνσεις προκύπτουν ως η απόκριση ενός ελεύθερου σωματιδίου στο οποίο ασκείται η υψίσυχη δύναμη. Με άλλα λόγια, η υψίσυχη διακύμανση ικανοποιεί την προσεγγιστική εξίσωση κίνησης

$$\ddot{q}_f = F \sin \omega t .$$

Το ίδιο, όμως, συμβαίνει και στην περίπτωση υψίσυχνης διέγερσης με δυναμικό $V_1(q)$. Επειδή οι μη αδρανειακοί όροι που οφείλονται στην αργή ταλάντωση είναι αμελητέοι, η υψίσυχη διακύμανση ικανοποιεί και σε αυτή την περίπτωση την προσεγγιστική εξίσωση

$$M\ddot{q}_f = -\left. \frac{dV_1}{dq} \right|_{q_s} \sin \omega t .$$

Η υψίσυχη ταλάντωση είναι αναισθητη στη δυναμική της αργής ταλάντωσης

Η υψίσυχνη κίνηση

Επομένως, η υψίσυχνη κίνηση περιγράφεται, σε πρώτη προσέγγιση, από τη σχέση

$$q_f = \frac{1}{M\omega^2} \left. \frac{dV_1}{dq} \right|_{q_s} \sin \omega t . \quad (10.70)$$

Η q_f είναι ακριβώς ίση με την απόκριση ενός ελεύθερου σωματιδίου που κινείται μέσα στο πεδίο του ταλαντωτικού δυναμικού στη γειτονιά του σημείου q_s . Η ταλαντωτική δύναμη έχει υπολογιστεί στη θέση q_s αντί της θέσης q , επειδή η q_f έχει πλάτος πολύ μικρότερο από το πλάτος της χαμηλόσυχνης ταλάντωσης εξαιτίας του ότι το ω^2 είναι πολύ μεγάλο. Αν γνωρίζουμε το υψίσυχο μέρος της κίνησης $q_f(t)$, μπορούμε να ξαναγράψουμε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος ως

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{q}_s + \dot{q}_f)^2 - V_0(q_s + q_f) - V_1(q_s + q_f) \sin \omega t , \quad (10.71)$$

να κρατήσουμε το ενεργό μέρος της, όπως κάναμε και με τις αδιαβατικές μεταβολές, και τέλος να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις κίνησης που αφορούν στη μέση χαμηλόσυχνη κίνηση του σώματος $q_s(t)$. Έχουμε μάλιστα τη δυνατότητα, επειδή η υψίσυχνη κίνηση έχει μικρό πλάτος ($\propto 1/\omega^2$), να αναπτύξουμε τα δυναμικά γύρω από τη θέση της χαμηλόσυχνης κίνησης $q_s(t)$ και στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε την τιμή της $q_f(t)$ που υπολογίσαμε στη σχέση (10.70). Η Λαγκρανζιανή που θα προκύψει θα είναι η ενεργός Λαγκρανζιανή, που θα καθορίσει τη μέση κίνηση. Ξαναγράφουμε, λοιπόν, τη Λαγκρανζιανή (10.71) κρατώντας μόνο τους πρώτους όρους στο ανάπτυγμα των δυναμικών γύρω από τη $q_s(t)$ και αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $q_f(t)$ και την παράγωγό της, που σε προσέγγιση $\mathcal{O}(1/\omega)$ υπολογίζεται από την (10.70) ότι είναι

$$\dot{q}_f = \frac{1}{M\omega} \left. \frac{dV_1}{dq} \right|_{q_s} \cos \omega t .$$

Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} L(q_s, \dot{q}_s) \approx & \frac{1}{2}M \left(\dot{q}_s + \frac{1}{M\omega} \left. \frac{dV_1}{dq} \right|_{q_s} \cos \omega t \right)^2 \\ & - \left[V_0(q_s) + \left. \frac{dV_0}{dq} \right|_{q_s} \left(\frac{1}{M\omega^2} \left. \frac{dV_1}{dq} \right|_{q_s} \sin \omega t \right) \right] \\ & - \left[V_1(q_s) + \left. \frac{dV_1}{dq} \right|_{q_s} \left(\frac{1}{M\omega^2} \left. \frac{dV_1}{dq} \right|_{q_s} \sin \omega t \right) \right] \sin \omega t . \quad (10.72) \end{aligned}$$

Η ενεργός Λαγκρανζιανή θα προέλθει από την παραπάνω έκφραση, αν αντικαταστήσουμε αφενός τα ημίτονα και τα συνημίτονα με τη μέση τιμή τους, που είναι μηδέν, αφετέρου τα τετράγωνα των ημιτόνων και των συνημιτόνων με τη μέση τιμή τους, που είναι $1/2$. Έπομένως

$$\bar{L}(q_s, \dot{q}_s) = \frac{1}{2}M\dot{q}_s^2 - \left[V_0(q_s) + \frac{1}{4M\omega^2} \left(\left. \frac{dV_1}{dq} \right|_{q_s} \right)^2 \right] . \quad (10.73)$$

Η Λαγκρανζιανή αναπτυγμένη ως προς τη μικρή υψίσυχνη ταλάντωση

Με άλλα λόγια η μέση κίνηση του σώματος είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σωματίδιο μάζας M σε ένα νέο δυναμικό, το

$$\bar{V}(q) = V_0(q) + \frac{1}{4M\omega^2} \left(\frac{dV_1(q)}{dq} \right)^2. \quad (10.74)$$

Η υψίσυχη ταλάντωση διαφοροποιεί το δυναμικό της αργής ταλάντωσης κατά έναν παράγοντα ανάλογο του $1/\omega^2$. Μια τέτοια ανάδραση, μολονότι μικρή, έχει τη δυνατότητα να διαφοροποιήσει σημαντικά, όπως θα δούμε στη συνέχεια, τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της κίνησης.

Ενδιαφέρον παράδειγμα μη τετριμμένης ανάδρασης έχουμε στην κίνηση του επίπεδου εκκρεμούς σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας όταν η ένταση του πεδίου μεταβάλλεται αρμονικά με υψηλή συχνότητα. Πρακτικά, αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν το εκκρεμές βρίσκεται σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς που εκτελεί κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση $a \sin \omega t$ (βλ. Κεφάλαιο 4). Το εκκρεμές θεωρείται ότι αποτελείται από μία αβαρή ράβδο μήκους l στο κάτω άκρο της οποίας έχει προσαρτηθεί μάζα m . Η Λαγκρανζιανή ενός τέτοιου εκκρεμούς είναι της μορφής (10.69) με

$$M = ml^2, \quad V_0(q) = -mgl \cos q, \quad V_1(q) = -m\omega^2 l \cos q, \quad (10.75)$$

όπου q είναι η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο και $q = 0$ είναι η γωνία που αντιστοιχεί στη γωνία ευσταθούς ισορροπίας, όταν το πεδίο βαρύτητας είναι σταθερό. Θεωρούμε ότι ο χαρακτηριστικός χρόνος της ταλάντωσης με συχνότητα ω είναι πολύ μικρότερος από το χαρακτηριστικό χρόνο εξέλιξης του συστήματος, ότι δηλαδή ισχύει $\omega \gg \sqrt{g/l}$.

Η υψίσυχη ταλάντωση διαφοροποιεί το ενεργό δυναμικό στο οποίο κινείται το σωματίδιο

Πώς μπορεί μια υψίσυχη διέγερση να επηρεάσει την ευστάθεια ή την αστάθεια ενός συστήματος;

Άσκηση 10.6. Δείξτε ότι η Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}^2 + mgl \cos q + ml \ddot{\xi} \cos q,$$

περιγράφει την κίνηση εκκρεμούς του οποίου το σημείο στήριξης εκτελεί κατακόρυφη κίνηση. Η $\xi(t)$ είναι μια δεδομένη κατακόρυφη μετατόπιση του σημείου στήριξης. Η μεταβλητή q είναι η γωνία που σχηματίζει η ράβδος του εκκρεμούς με την κατακόρυφο και $q = 0$ είναι η γωνία που αντιστοιχεί στη γωνία ευσταθούς ισορροπίας. Ομοίως, δείξτε ότι η Λαγκρανζιανή

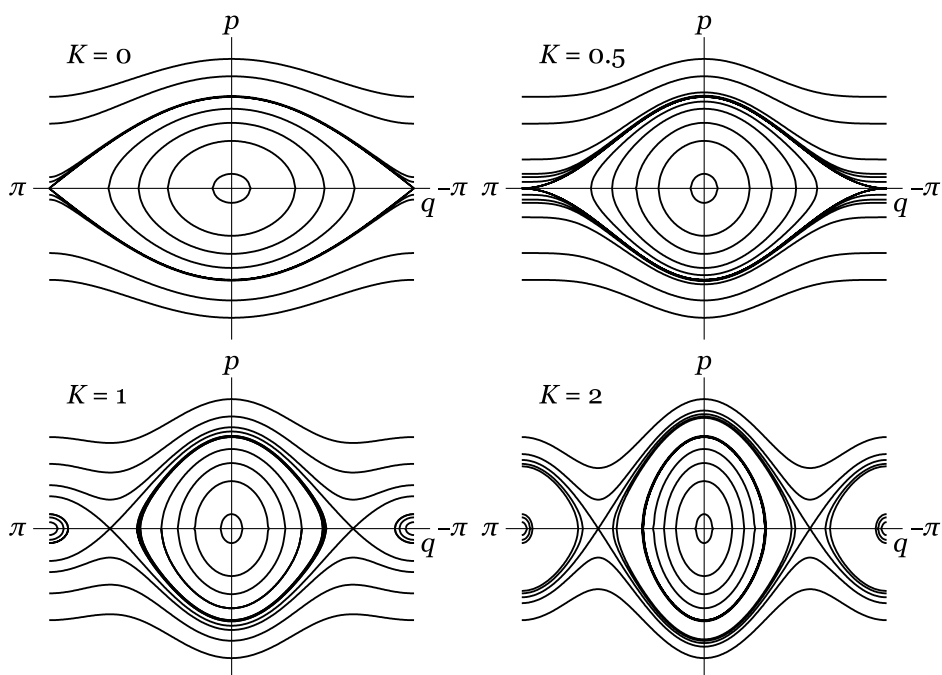
$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}^2 + mgl \cos q - ml \ddot{\xi} \sin q$$

περιγράφει την κίνηση εκκρεμούς του οποίου το σημείο στήριξης εκτελεί οριζόντια κίνηση $\xi(t)$. Συνεπώς, αν $\xi(t) = a \sin \omega t$, τα παραπάνω συστήματα περιγράφονται από τη θεωρία για τη Λαγκρανζιανή του τύπου (10.69). [Υπόδειξη: Μην ξεχνάτε ότι έχετε την ελευθερία να αλλάξετε τη Λαγκρανζιανή κατά ένα μετασχηματισμό δαθμονόμησης.]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Από τη σχέση (10.74) προκύπτει άμεσα ότι η βραδεία κίνηση του ταλαντωτή εκτελείται στο ενεργό δυναμικό

$$\bar{V} = -mgl (\cos q - K \sin^2 q) \quad (10.76)$$



Σχήμα 10.17: Η μεταβολή που υφίσταται ο χώρος των φάσεων του ενεργού δυναμικού ενός εκκρεμούς όταν αυτό αναρτάται στην οροφή ενός ανελκυστήρα που εκτελεί κατακόρυφη υψίσυχνη αρμονική ταλάντωση $a \sin \omega t$. Διακρίνονται οι τροχιές στο χώρο των φάσεων για $K = 0$ (άνω αριστερά), όταν ο ανελκυστήρας είναι σταθερός. Το σημείο $q = 0$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας, ενώ το $q = \pm\pi$ σημείο ασταθούς ισορροπίας. Όσο μεγαλώνει η παράμετρος K , η ευστάθεια του $q = 0$ αυξάνεται, ενώ η αστάθεια του $q = \pm\pi$ μειώνεται. Για $K = 0.5$ (άνω δεξιά) το σημείο $q = \pm\pi$ έχει ουδέτερη αστάθεια (οριζόντιες γραμμές γύρω από το σημείο $q = \pm\pi, p = 0$). Για $K = 1$ και $K = 2$ (κάτω αριστερά και δεξιά, αντιστοίχως) το $q = \pm\pi$ έχει καταστεί ευσταθές, ενώ έχουν εμφανιστεί δύο νέα ασταθή σημεία ισορροπίας στις γωνίες $q = \pm \cos^{-1}(1/2K)$.

με την αδιάστατη παράμετρο

$$K = \frac{a^2 \omega^2}{4gl}.$$

Τα σημεία ισορροπίας της βραδείας κίνησης προσδιορίζονται από τη συνθήκη

$$\frac{d\bar{V}}{dq} = 0.$$

και επομένως είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\sin q(1 + 2K \cos q) = 0.$$

Συνεπώς, τα σημεία ισορροπίας του ενεργού δυναμικού είναι τα $q_{ισ}^{(1)} = 0$, $q_{ισ}^{(2)} = \pi$ και $q_{ισ}^{(3,4)} = \pm \cos^{-1}(-1/2K)$, εφόσον $K \geq 1/2$. Ο χώρος των φάσεων για διαφορετικές τιμές του K απεικονίζεται στο Σχήμα 10.17.

Η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας προσδιορίζεται από το πρόσημο του

$$\left. \frac{d^2 \bar{V}}{dq^2} \right|_{q_{ισ}} = mgl(\cos q + 2K \cos 2q).$$

Το σημείο ισοροπίας $q_{ισ}^{(1)} = 0$ είναι ευσταθές για κάθε K , επειδή για το σημείο αυτό είναι $d^2\bar{V}/dq^2 = mgl(1 + 2K) > 0$. Παρατηρούμε, μάλιστα, ότι όσο αυξάνεται το K , δηλαδή η συχνότητα ή το πλάτος της κατακόρυφης ταλάντωσης, τόσο αυξάνεται και η ευστάθεια του σημείου ισοροπίας $q_{ισ}^{(1)} = 0$. Αυτό είναι ένα εκπληκτικό αποτέλεσμα στο οποίο δεν θα ήταν εύκολο να καταλήξουμε διαισθητικά. Όταν ο ανελκυστήρας επιταχύνεται προς τα κάτω, το εκκρεμές κινείται σε μειωμένο πεδίο βαρύτητας και στο χρονικό αυτό διάστημα η ταλάντωση μπορεί να γίνει ασταθής για μεγάλες τιμές της παραμέτρου K . Το αντίθετο συμβαίνει όταν ο ανελκυστήρας επιταχύνεται προς τα επάνω. Επομένως, η ταλάντωση του ανελκυστήρα δημιουργεί περιόδους αυξημένης ευστάθειας και περιόδους μειωμένης ευστάθειας ή ακόμη και αστάθειας. Είναι δύσκολο, λοιπόν, να αποφανθούμε, χωρίς να καταφύγουμε στην ανάλυση του παρόντος εδαφίου, αν η ευστάθεια του εκκρεμούς υπό τέτοιες χρονοεξαρτώμενες συνθήκες θα αυξηθεί ή θα μειωθεί.

Ομοίως, η ευστάθεια του σημείου ισοροπίας $q_{ισ}^{(2)} = \pi$ κρίνεται από το πρόσημο του $d^2\bar{V}/dq^2$ που ισούται με $mgl(-1 + 2K)$. Όταν $K < 1/2$, το σημείο αυτό ισοροπίας παραμένει ασταθές, αλλά η αστάθεια του μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή του K . Όταν $K > 1/2$, το ασταθές σημείο ισοροπίας γίνεται ευσταθές. Παρατηρούμε ότι οι υψίσυχνες κατακόρυφες ταλαντώσεις του εκκρεμούς σταθεροποιούν την αργά εξελισσόμενη κίνησή του. Η αλλαγή της ευστάθειας των σημείων ισοροπίας με την αύξηση της παραμέτρου K διακρίνεται στο Σχήμα 10.17. Η σταθεροποίηση του ασταθούς σημείου ισοροπίας επιτυγχάνεται όταν $a^2\omega^2 > 2gl$. Εάν για παράδειγμα $l = 10$ cm και $a = 1$ cm, η σταθεροποίηση επιτυγχάνεται, εάν το σημείο στήριξης του εκκρεμούς ταλαντώνεται με συχνότητα $\omega \gtrsim 22.5$ cycles/s. Στο ενεργό δυναμικό εμφανίζονται δύο νέα σημεία ισοροπίας, $q_{ισ}^{(3,4)} = \pm \cos^{-1}(-1/2K)$, όταν $K > 1/2$. Με άλλα λόγια όταν σταθεροποιείται το ασταθές σημείο ισοροπίας $q_{ισ}^{(2)} = \pi$ εμφανίζονται δύο νέα σημεία ασταθούς ισοροπίας.

Ευστάθεια συν
αστάθεια ίσον τι;

Όταν η σταθερότητα
του ενός σημείου
αλλάζει, εμφανίζονται
νέα σημεία ισοροπίας

Άσκηση 10.7. Προσπαθήστε να εξηγήσετε γιατί εμφανίζονται τα ασταθή αυτά σημεία ισοροπίας ακριβώς όταν σταθεροποιείται το $q_{ισ}^{(2)} = \pi$. [Υπόδειξη: Σκεφτείτε ότι μεταξύ δύο τοπικών ελαχίστων μιας συνεχούς συνάρτησης μεσολαβεί σίγουρα ένα τοπικό μέγιστο.]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10.7 Προβλήματα

1. Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}q^2 .$$

Στη συνέχεια προκειμένου να εφαρμόσετε το θεώρημα Liouville θεωρήστε το χωρίο που σχηματίζεται από τα σημεία που κείνται επί της καμπύλης $H = E$ και βρίσκονται μεταξύ δύο γειτονικών σημείων της έλλειψης. Παραμένει το μήκος αυτού του ελλειπτικού τόξου σταθερό; Ισχύει σε αυτή την περίπτωση το θεώρημα Liouville; Υπολογίστε την περίμετρο της καμπύλης που αντιστοιχεί στην ενέργεια $H = E$. Ισούται αυτή με την τιμή του $\iint \delta(H - E) dpdq$, όπου δ είναι η συνάρτηση του Dirac; Γιατί υπάρχει διαφορά;

2. Ένα φορτισμένο σωματίδιο κινείται μέσα σε ένα σχεδόν ομογενές μαγνητικό πεδίο, δηλαδή σε μαγνητικό πεδίο της μορφής

$$\vec{B} = B(z)\hat{z} ,$$

όπου $B(z)$ είναι μια πολύ αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση του z (σε σύγκριση με ποιο μήκος;). Γράψτε τη χαμιλτονιανή συνάρτηση του σωματιδίου σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες (ρ, θ, z) , θεωρώντας ότι το ανυσματικό δυναμικό έχει μόνο πολική συνιστώσα, η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από τα ρ, z . Θεωρήστε αρχικά το μαγνητικό πεδίο σταθερό και υπολογίστε πόση πρέπει να είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σωματιδίου ώστε αυτό να κινείται επάνω σε μία ορθή έλικα που όπως ξέρετε θα ακολουθήσει το φορτισμένο σωματίδιο. Στη συνέχεια υπολογίστε το $\oint p_\theta d\theta$. Βασιζόμενοι στο αναλλοίωτο του ολοκληρώματος αυτού, εξηγήστε πώς εξελίσσεται η ακτίνα περιστροφής του σωματιδίου, όταν το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται αργά με το z , καθώς το σωματίδιο προχωρεί ελικοειδώς κατά μήκος του άξονα z . Μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια του σωματιδίου; Το αναμένετε αυτό το αποτέλεσμα;

3. Προσδιορίστε την κίνηση του αρμονικού ταλαντωτή με αδιαβατικά εξελισσόμενη συχνότητα σε προσέγγιση κατά μία τάξη μεγαλύτερη από την προσέγγιση WKB.
4. Επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τα αδιαβατικά αναλλοίωτα κατά την ελλειπτική κίνηση σωματιδίου μέσα στο ελκτικό δυναμικό

$$V(r) = -k/r ,$$

με $k > 0$. Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι e και ο μεγάλος ημιάξονάς της a . Υποθέτουμε ότι η σταθερά k μειώνεται αδιαβατικά. Σχεδιάστε τη διαδρομή του σωματιδίου για σταθερό k στα επίπεδα (x, p_x) και (y, p_y) . Αποδείξτε ότι τα δύο αναλλοίωτα είναι

$$\oint p_x dx = \sqrt{kma} f_1(e) , \quad \oint p_y dy = \sqrt{kma}(1 - e^2) f_2(e) ,$$

όπου $f_{1,2}$ δύο συναρτήσεις της εκκεντρότητας e . Αποδείξτε ότι κατά την αδιαβατική μεταβολή το σωματίδιο συνεχίζει να διαγράφει έλλειψη σταθερής εκκεντρότητας και η περίοδος της κίνησής του αυξάνεται σύμφωνα με το νόμο $T \propto k^{-1/2}$. Ποιος νόμος διέπει την εξέλιξη του μεγάλου ημιάξονα; [Υπόδειξη: Δείξτε ότι η κίνηση επί της έλλειψης μπορεί να γραφεί παραμετρικά ως $x = a(\cos \xi - e)$, $y = a\sqrt{1 - e^2} \sin \xi$ και $t = \sqrt{ma^3/k}(\xi - e \sin \xi)$.]

5. Ένα μονοατομικό αέριο βρίσκεται μέσα σε ένα κυβικό δοχείο του οποίου οι διαστάσεις L μεταβάλλονται αδιαβατικά. Υποθέστε ότι όλα τα άτομα έχουν την ίδια ταχύτητα και ότι ίσος αριθμός ατόμων κινείται στις τρεις διευθύνσεις που είναι κάθετες στα τοιχώματα του δοχείου. Αποδείξτε ότι κατά την αδιαβατική μεταβολή του όγκου του δοχείου ισχύει ο γνωστός αδιαβατικός νόμος για μονοατομικά αέρια $p \propto \rho^{5/3}$ όπου p είναι η πίεση και ρ η πυκνότητα του αερίου.
6. Στην οροφή ενός ανελκυστήρα αναρτάται μέσω ενός ελατηρίου σταθεράς k μάζα m , η οποία εκτελεί κατακόρυφες ταλαντώσεις. Ο ανελκυστήρας όμως επιταχύνεται με αργά μεταβαλλόμενο ρυθμό. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή που διέπει την κίνηση της μάζας και ελέγξτε αν η κίνηση του ανελκυστήρα επιφέρει μεταβολές στη συχνότητα ταλάντωσης, στο πλάτος της ταλάντωσης και στην ενέργεια του ταλαντωτή.
7. Ένα φυσικό σύστημα διέπεται από τη Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_0(q) + \sum_{k=1}^N V_k(q) \sin(k\omega t + \phi_k) .$$

Προσδιορίστε την ενεργό Χαμιλτονιανή που διέπει τη χαμηλόσυχνη κίνηση όταν $\omega \gg 2\pi/T$, όπου T ο χαρακτηριστικός χρόνος εξέλιξης του συστήματος χωρίς την εξωτερική χρονοεξαρτώμενη δύναμη.

8. Αναλύστε την ευστάθεια ενός αρμονικού ταλαντωτή με Χαμιλτονιανή $H = 1/2 [p^2 + \omega_0^2(t)q^2]$ στις δύο ακόλουθες οριακές καταστάσεις: (α) στην περίπτωση αδιαβατικής αλλαγής του ω_0 και (β) στην περίπτωση υψίσυχνης αρμονικής μεταβολής του $\omega_0(t) = 1 + \epsilon \sin \omega t$. Αναλύστε, επίσης, την ευστάθεια του ταλαντωτή όταν η συχνότητα $\omega_0(t)$ λαμβάνει διαδοχικά δύο τιμές: την τιμή ω_1 για χρονικό διάστημα $\pi/(2\omega_1)$ και την τιμή ω_2 για χρονικό διάστημα $\pi/(2\omega_2)$ [Υπόδειξη: Σχεδιάστε την κίνηση στο χώρο των φάσεων]. Σε ποιο σύμπερασμα καταλήγετε σχετικά με την ευστάθεια των χρονοεξαρτώμενων συστημάτων;
9. Σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινείται στο δυναμικό

$$U(x) = K [\exp(-2x) - 2 \exp(-x)] .$$

Το δυναμικό $U(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 . Σχεδιάστε το δυναμικό και δείξτε ότι υπάρχει ένα διάστημα ενεργειών $U(x_0) < E < E_{\max}$ για τις οποίες το σύστημα εκτελεί περιοδικές κινήσεις με περίοδο $T(E)$ η οποία εξαρτάται από την ενέργεια του σωματιδίου. Σχεδιάστε τις τροχιές στο χώρο των φάσεων. Αποδείξτε ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T(E) = \frac{dA}{dE},$$

όπου

$$A(E) = \oint_E p dq$$

το εμβαδόν που περικλείεται από τη περιοδική τροχιά Γ_E , ενέργειας E . Σχεδιάστε την περίοδο της κίνησης συναρτήσει της ενέργειας του σωματιδίου. Έστω τώρα ότι η σταθερά K μεταβάλλεται αδιαβατικά και γίνεται $2K$. Τι παραμένει αναλλοίωτο; Προσδιορίστε την ενέργεια του σωματιδίου μετά το πέρας της μεταβολής και τη μείωση της περιόδου της κίνησης. [Δίνεται ότι

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - U(x)} dx = \pi(\sqrt{K} - \sqrt{E}),$$

όπου $U(x_{1,2}) = E$ για ενέργειες $-K < E < 0$.]

10. (α) N μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια κινούνται σε μία διάσταση υπό την επίδραση δυναμικού $V(x, t)$. Τη χρονική στιγμή t , η αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων που κατανέμονται στο διδιάστατο χώρο των φάσεων (x, p) είναι $f(x, p, t)$. Γράψτε τη χρονική παράγωγο της $f(x, p, t)$ επί της τροχιάς του σωματιδίου στο χώρο των φάσεων. Εξισώνοντας το ρυθμό μεταβολής του συνολικού αριθμού των σωματιδίων που εμπεριέχονται σε ένα τυχαίο και ακίνητο χωρίο A με τον αριθμό των σωματιδίων που εισέρχονται στο A , δείξτε ότι η $f(x, p, t)$ είναι σταθερή επί της τροχιάς των σωματιδίων.
- (β) Θεωρήστε ένα τυχαίο χωρίο στο χώρο των φάσεων A στο οποίο τα σωματίδια είναι αρχικά κατανεμημένα με πυκνότητα $f_1 =$ σταθερή. Προσδιορίστε την πυκνότητα των σωματιδίων στο εξελιγμένο χωρίο κάποια άλλη χρονική στιγμή.
- (γ) Υποθέστε ότι το δυναμικό αρχικά είναι

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2,$$

ενώ σωματίδια εισάγονται στο χώρο των φάσεων με τέτοιον τρόπο ώστε η πυκνότητα f_1 να καθίσταται σταθερή για ενέργειες των σωματιδίων μικρότερες από E_1 και να μηδενίζεται για ενέργειες μεγαλύτερες από E_1 . Υπολογίστε το πλήθος των σωματιδίων; Υποθέστε τώρα ότι το δυναμικό μεταβάλλεται αδιαβατικά και τελικά μετατρέπεται στο δυναμικό του φρέατος

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < L \\ \infty, & |x| \geq L. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η μέγιστη τελική ενέργεια που μπορεί να έχουν τα σωματίδια είναι

$$E_2 = \frac{\pi^2}{8} \frac{E_1^2}{kL^2} .$$

(δ) Υποθέστε ότι κάποια στιγμή αντικαθιστούμε ακαριαία το αρχικό σύστημα του ταλαντωτή με το δυναμικό του φρέατος φροντίζοντας το L να είναι μεγαλύτερο από το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης των σωματιδίων στον ταλαντωτή. Υπολογίστε τη μέγιστη ενέργεια των σωματιδίων στο φρέαρ. Η πυκνότητα στο χώρο των φάσεων θα είναι διαφορετική απ' ό,τι προηγουμένως; Τι συμπεραίνετε σχετικά με τη συνολική επιφάνεια που καλύπτουν οι καταστάσεις; [Υπόδειξη: Για να κατανοήσετε την εξέλιξη του συστήματος στο χώρο των φάσεων κατά την απότομη μεταβολή του δυναμικού, θεωρήστε ένα σημείο στο χώρο των φάσεων στο αρχικό σύστημα του ταλαντωτή. Σε ποια περιοχή του χώρου των φάσεων μπορεί να βρίσκεται αυτό αρχικά; Πώς θα κινηθεί τελικά μία περιοχή του χώρου των φάσεων που αρχικά καταλάμβανε μία λωρίδα σταθερής ορμής;]

(ε) Αφού το σύστημα μεταβεί αδιαβατικά στο δυναμικό του φρέατος, επιστρέφει πάλι στο αρχικό δυναμικό του ταλαντωτή αδιαβατικά. Ποια θα είναι η μέγιστη τελική ενέργεια του συστήματος; Αν οι μεταβάσεις γίνουν ακαριαία ποια είναι η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να έχει τελικά το σωματίδιο; Εξαρτάται το αποτέλεσμα αυτό από την επιλογή των χρονικών στιγμών κατά τις οποίες πραγματοποιούνται οι μεταβάσεις του συστήματος; [Υπόδειξη: Πού πρέπει να βρίσκεται ένα σημείο στο χώρο των φάσεων κατά τη μετάβαση από το φρέαρ στο δυναμικό του ταλαντωτή ώστε το σημείο αυτό να αντιστοιχεί σε μέγιστη ενέργεια;]

11. Σωματίδιο μάζας m κινείται στο δυναμικό

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 .$$

Γνωρίζουμε μόνο ότι το σωματίδιο έχει ενέργεια E και ότι ενδέχεται να βρίσκεται με ίση πιθανότητα σε οποιοδήποτε σημείο της ισοενεργειακής κάμπυλης $H = E$, όπου H η Χαμιλτονιανή του σωματιδίου.

(α) Δείξτε ότι η κατανομή

$$f(x, p) = \frac{1}{T} \delta(E - H) ,$$

όπου T η περίοδος ταλάντωσης του σωματιδίου, είναι η κατανομή πιθανότητας εύρεσης του σωματιδίου σε κάποιο σημείο (x, p) στο χώρο των φάσεων. Δείξτε, επίσης, ότι η εν λόγω κατανομή ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp f(x, p) = 1 ,$$

καθώς και ότι αυτή η κατανομή παραμένει αμετάβλητη, είναι δηλαδή

$$\frac{df}{dt} = 0 .$$

(β) Προσδιορίστε την πιθανότητα $\Pi(x_0|E)$ να βρεθεί το σωματίδιο στη θέση $x = x_0$ αν έχει ενέργεια E . Δείξτε ότι η πιθανότητα αυτή είναι

$$\begin{aligned}\Pi(x_0|E) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp \delta(x - x_0) \delta(E - H) \\ &= \frac{2m}{T} \frac{1}{|p_E(x_0)|} \\ &= \frac{\sqrt{2m}}{T} \frac{1}{\sqrt{E - kx_0^2/2}},\end{aligned}$$

όπου $p_E(x_0)$ η ορμή σωματιδίου ενέργειας E στη θέση $x = x_0$. Το αναμένετε αυτό το αποτέλεσμα; Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα της $\Pi(x_0|E)$ ως προς όλες τις επιτρεπτές θέσεις x_0 δίνει μονάδα.

(γ) Δείξτε ότι η πιθανότητα $\Pi(p_0|E)$ να έχει το σωματίδιο ορμή p_0 αν έχει ενέργεια E είναι

$$\begin{aligned}\Pi(p_0|E) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp \delta(p - p_0) \delta(E - H) \\ &= \frac{2}{kT} \frac{1}{|x_E(p_0)|} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{kT}} \frac{1}{\sqrt{E - p_0^2/(2m)}},\end{aligned}$$

όπου $x_E(p_0)$ η θέση σωματιδίου ενέργειας E και ορμής p_0 . (δ) Θεωρήστε ότι το δυναμικό μεταβάλλεται στο δυναμικό φρέατος του προηγούμενου προβλήματος. Χρησιμοποιώντας την πιθανότητα που υπολογίσατε στο ερώτημα (γ) δείξτε ότι αν αρχικά το σωματίδιο είχε ενέργεια E_1 η πιθανότητα να έχει ενέργεια E_2 μετά την αλλαγή δυναμικού είναι

$$\Pi(E_2|E_1) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{E_2} \sqrt{E_1 - E_2}}.$$