Τελική εξέταση στη Μηχανική του Μεταπτυχιακού-2023-2024

Β′ έκδοση

Συνολικός αριθμός μορίων 150

1. Παράγουμε κόκκινο θόρυβο $\xi(t)$ μέσω της

$$\dot{\xi} = -\lambda\xi + \lambda\eta(t)\ , \tag{1}$$

όπου ο $\eta(t)$ είναι λευκός θόρυβος με μέση τιμή $\langle\eta\rangle = 0$ και χρονική ετεροσυσχέτιση $\langle\eta(t)\eta(s)\rangle = \delta(t-s)$.

(α) Ορίζοντας τον μετασχηματισμό Fourier των μεταβλητών π.χ. ως $\eta(t) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{\eta}(\omega)e^{-i\omega t}$ προσδιορίστε την $\langle\hat{\eta}(\omega)\hat{\eta}(\omega')\rangle$ και δείξτε ότι

$$\langle\hat{\xi}(\omega)\hat{\xi}(\omega')\rangle = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\omega^2}\delta(\omega+\omega')\ . \tag{2}$$

[20]

(β) Σχεδιάστε τη φασματική ισχύ του κόκκινου θορύβου και του λευκού συναρτήσει της συχνότητας και εξηγήστε τις αντίστοιχες ονομασίες των θορύβων. Για ποιές τιμές του λ ο κόκκινος θόρυβος τείνει να προσεγγίσει τον λευκό; **[10]**

(γ) Μέσω της (2) υπολογίστε τώρα την ετεροσυσχέτιση του κόκκινου θορύβου και δείξτε πως μπορεί αυτή να προσεγγίσει οριακά την ετεροσυσχέτιση του λευκού θορύβου η. **[30]**

2. Τεντωμένη χορδή κατά τον άξονα x, μήκους a, μάζας ανά μονάδας μήκους σ, υπό τάση T, είναι στερεωμένη στα δύο άκρα της σε σταθερά σημεία ενώ εκτελεί μικρές εγκάρσιες ταλαντώσεις στο κάθετο επίπεδο του άξονα x. Οι συντεταγμένες της μετατόπισης της χορδής $(\varphi(x,t),\ \psi(x,t))$ στους άξονες (y,z) είναι μικρές και η γραμμική πυκνότητα, σ, και τάση, T, θεωρούνται σταθερές κατά την κίνηση.

(α) Δείξτε από πρώτες αρχές ότι η Λαγκραντζιανή που διέπει τη χρονική εξέλιξη μικρών μετατοπίσεων $(\varphi(x,t),\ \psi(x,t))$ είναι

$$L = \int_0^a dx\ \left[\frac{\sigma}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right) - \frac{T}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right)\right]\ .$$

[20]

(β) Εκφράζοντας τις μετατοπίσεις ως σειρές Fourier:

$$\varphi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \eta_n(t) \ , \ \psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \zeta_n(t) \ .$$

δείξτε ότι η Λαγκραντζιανή παίρνει τη διακριτή μορφή

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sigma}{2}(\dot{\eta}_n^2 + \dot{\zeta}_n^2) - \frac{T}{2}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 (\eta_n^2 + \zeta_n^2) \right] \ . \tag{3}$$

Προσδιορίστε τις εξισώσεις κίνησης. Έτσι δείξτε ότι η κίνηση της χορδής περιγράφεται ισοδύναμα από ένα άπειρο αριθμό διαζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών με συχνότητες

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \left(\frac{n\pi}{a}\right) \ .$$

[20]

(γ) Ποιοί είναι οι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης με συχνότητα ω_n των $(\varphi(x,t),\ \psi(x,t))$; **[10]**

(δ) Δείξτε ότι η Λαγκραντζιανή (3) είναι αναλλοίωτη σε στροφές όλων των μετατοπίσεων (η_n, ζ_n) γύρω από τον άξονα της χορδής x. Προσδιορίστε μέσω του θεωρήματος της Noether τη διατηρούμενη ποσότητα. Ποιά είναι αντιστοιχούσα διατηρούμενη ποσότητα που αντιστοιχει στο φορτίο Noether $\int j^0 dx$ στις αρχικές πεδιακές συντεταγμένες (φ, ψ); Σε ποιά φυσική ποσότητα αντιστοιχεί η διατηρούμενη αυτή ποσότητα; **[20]**

(ε) Γράψτε την εξίσωση συνέχειας που περιγράφει την τοπική διατήρηση της ποσότητας j^0 και μέσω αυτής προσδιορίστε την τοπική ροή της ποσότητας αυτής. **[20]**.

ΛΥΣΕΙΣ 1. (α,β)
Είναι:

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{\eta}(\omega)\hat{\eta}(\omega')\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, e^{i\omega' t'}\langle \eta(t)\eta(t')\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, e^{i\omega' t'}\delta(t-t') \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{it(\omega+\omega')} \\
&= \delta(\omega+\omega')\,.
\end{aligned}
$$

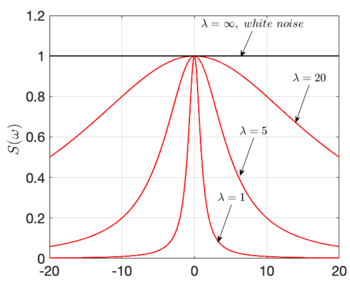
Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Fourier της (1) έχω:

$$
\hat{\xi}(\omega) = \frac{\lambda}{-i\omega+\lambda}\hat{\eta}(\omega)\,,
$$

Συνεπώς

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{\xi}(\omega)\hat{\xi}(\omega')\rangle &= \frac{\lambda^2}{(-i\omega+\lambda)(-i\omega'+\lambda)}\langle \hat{\eta}(\omega)\hat{\eta}(\omega')\rangle \\
&= \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\omega^2}\delta(\omega+\omega')
\end{aligned}
$$

Ο κόκκινος προσεγγίζει τον λευκό στο όριο $\lambda \to \infty$.
(β)



Σχήμα 1: Η Φασματική ισχύς $S(\omega) = \lambda^2/(\lambda^2+\omega^2)$ για διαφορετικές τιμές του κόκκινου θορύβου. Από το φάσμα φαίνεται ότι οι συχνότητες που κυριαρχούν είναι οι μικρές και θα βλέπαμε κόκκινη απόχρωση. Όταν $\lambda \to \infty$ η φασματική ισχύς του κόκκινου θορύβου γίνεται σταθερή, το φάσμα γίνεται λευκό: $S(\omega) \to 1$.

(γ) Είναι:

$$
\begin{aligned}
\langle \xi(t)\xi(t')\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, e^{-i\omega' t'}\langle \hat{\xi}(\omega)\hat{\xi}(\omega')\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, e^{-i\omega' t'}\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\omega^2}\delta(\omega+\omega') \\
&= \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\lambda^2+\omega^2} \\
&= \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega-i\lambda)(\omega+i\lambda)} \\
&= (-2i\pi)\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{e^{-\lambda(t-t')}}{(-2i\lambda)} \qquad (t-t'>0) \\
&= \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda(t-t')} \qquad (t-t'>0).
\end{aligned}
$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει πόλους στα $\omega = \pm i\lambda$ οπότε για $t-t'>0$ κλείσαμε τη διαδρομή στο μιγαδικό

ω επίπεδο στο ημικύκλιο με $\Im(\omega) < 0$. Αντίστοιχα όταν $t - t' < 0$ κλείνουμε στο πάνω ημικύκλιο και έχουμε συνεπώς

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |t-t'|)}$$

Στο όριο $\lambda \to \infty$

$$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |t-t'|)} \to \delta(t-t')$$

2.

(α) Εάν $\mathbf{j}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της μετατόπισης φ, $\mathbf{k}$ το μοναδιαίο στην διευθυνση της μετατόπισης ψ, η μετατόπιση στο κάθετο επίπεδο στον άξονα x είναι $\mathbf{r} = \varphi \mathbf{j} + \psi \mathbf{k}$ και το τμήμα dx έχει μήκος μετά την μετατόπιση

$$ds^2 = (dx)^2 + (d\mathbf{r})^2 = dx^2 + (\varphi_x dx)^2 + (\psi_x dx)^2. \ (\varphi_x \stackrel{\text{def}}{=} \partial\varphi/\partial x\,, \psi_x \stackrel{\text{def}}{=} \partial\psi/\partial x)$$

Συνεπώς το συνολικό μήκος της μετατοπισμένης χορδής για μικρές μετατοπίσεις είναι:

$$L = \int_0^a dx \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \psi_x^2} \approx \int_0^a dx \left(1 + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \psi_x^2) \right) ,$$

και η δυναμική ενέργεια της χορδής:

$$V = T(L-a) = \int_0^a dx \frac{T}{2}(\varphi_x^2 + \psi_x^2) ,$$

ενώ η κινητική ενέργεια της χορδής είναι

$$K.E. = \int_0^a dx \frac{\sigma}{2}(\varphi_t^2 + \psi_t^2) .$$

Η Λαγκραντζιανή είναι:

$$L = \int_0^a dx \left[\frac{\sigma}{2}(\varphi_t^2 + \psi_t^2) - \frac{T}{2}(\varphi_x^2 + \psi_x^2) \right] .$$

(β) Επειδή οι συναρτήσεις $s_n(x) = \sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a)$ και $c_n(x) = \sqrt{2/a}\cos(n\pi x/a)$ είναι ορθοκανονικές, δηλαδή είναι

$$\int_0^a dx\, s_n(x)s_m(x) = \delta_{nm}\ , \int_0^a dx\, c_n(x)c_m(x) = \delta_{nm}\ ,$$

η Λαγκραντζιανή παίρνει αμέσως με συντεταγμένες τα πλάτη των αναπτυγμάτων Fourier τη διακριτή μορφή

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sigma}{2}(\dot{\eta}_n^2 + \dot{\zeta}_n^2) - \frac{T}{2}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 (\eta_n^2 + \zeta_n^2) \right] .$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange αυτής της Λαγκραντζιανής

$$\ddot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = 0\ \ , \ddot{\zeta}_n + \omega_n^2 \zeta_n = 0\ \ , n = 1, 2, \ldots\ ,$$

περιγράφουν άπειρους διαζευγμένους ταλαντωτές συχνότητας $\omega_n = \sqrt{T/\sigma}(n\pi/a)$.

(γ) Ο χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης συχνότητας ω_n είναι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των καθαρών τρόπων ταλάντωσης:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega_n(t - t_a))\ , \psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega_n(t - t_b))\ .$$

(δ) η Λαγκραντζιανή (3) είναι αναλλοίωτη σε πρώτη τάξη ως προς ε στους μετασχηματισμούς των στροφών περί τον άξονα της χορδής x όπου οι συντεταγμένες γίνονται:

$$\eta_n(\varepsilon) = \eta_n + \varepsilon\zeta_n\ \ ,\ \ \zeta_n(\varepsilon) = \zeta_n - \varepsilon\eta_n\ \ , n = 1, 2, \ldots$$

Συνεπώς από το θεώρημα Noether διατηρείται η ποσότητα

$$\begin{aligned}
\Omega &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\zeta_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n} - \eta_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_n} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma \left[\zeta_n \dot{\eta}_n - \eta_n \dot{\zeta}_n \right] \\
&= \int_0^a dx\, \sigma(\psi\varphi_t - \varphi\psi_t)
\end{aligned}$$

που είναι η στροφορμή της χορδής ως προς τον άξονα x.

(ε) Ο τοπικός νόμος διατήρησης από τον οποίο προκύπτει η διατήρηση της συνολικής στροφορμής της χορδής απαιτεί η πυκνότητα της στροφορμής $j^0 = \sigma(\psi\varphi_t - \varphi\psi_t)$

να ικανοποιεί τη εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} + \frac{\partial j^1}{\partial x} = 0 \ ,$$

όπου j^1 είναι η ροή της στροφορμής. Για να προσδιορίσουμε την j^1 παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} = \sigma(\psi\varphi_{tt} - \varphi\psi_{tt}) \ ,$$

και επειδή οι εξισώσεις κίνησης είναι $\sigma\varphi_{tt} = T\varphi_{xx}$, $\sigma\psi_{tt} = T\psi_{xx}$ θα είναι

$$\frac{\partial j^1}{\partial x} = -\frac{\partial j^0}{\partial t} = -T(\psi\varphi_{xx} - \varphi\psi_{xx}) \ ,$$

$$j^1 = -T(\psi\varphi_x - \varphi\psi_x) \ .$$