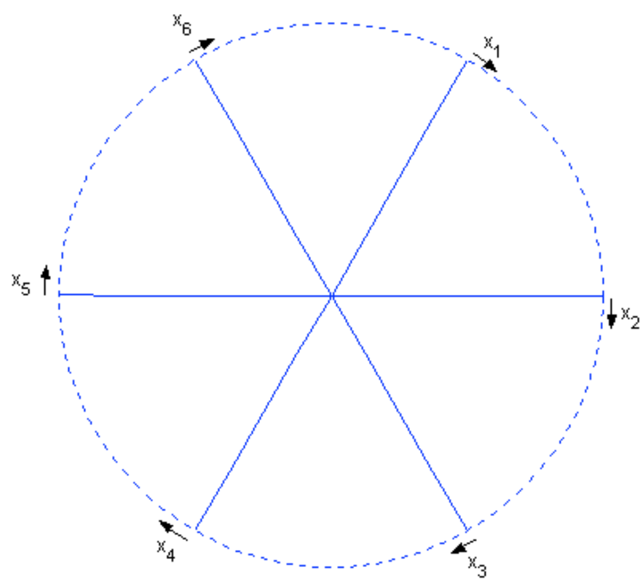
Μηχανική ΙΙ
Τμήμα Ιωάννου-Αποστολάτου
6 Μαΐου 2001

Προσδιορισμός των χαρακτηριστικών (ιδιο-)συχνοτήτων και κανονικών τρόπων ταλάντωσης με χρήση συμμετριών

Θεωρούμε ότι 6 ίσες μάζες συνδέονται με ταυτόσημα ελάσματα σε ένα κέντρο. Οι μάζες στην κατάσταση ισορροπίας σχηματίζουν ένα κανονικό εξάγωνο (βλ. Σχήμα) και κινούνται στο κοινό επίπεδο που σχηματίζουν και η θέση κάθε μάζας προσδιορίζεται από μία συντεταγμένη, x_i. Αν δεν υπήρχε αλληλεπίδραση μεταξύ των σωμάτων τα σώματα θα ταλαντώνονταν ανεξάρτητα δεξιά και αριστερά από το σημείο ισορροπίας. Έστω τώρα ότι τα σώματα αλληλεπιδρούν. Η δύναμη αλληλεπίδρασης, την οποία δεν προσδιορίζουμε, δεν περιορίζεται μόνο στη δύναμη που ασκείται από το ένα σώμα στο γειτονικό του, αλλά επιτρέπουμε σε κάθε σώμα να ασκεί δυνάμεις σε όλα τα άλλα σώματα. Θεωρούμε ότι οι κινήσεις είναι μικρές έτσι ώστε, όπως είδαμε, οι κινήσεις να περιγράφονται από τις εξισώσεις



$$\ddot{X} = -\frac{1}{m}KX,$$

εφόσον οι μάζες είναι οι ίδιες και ο πίνακας των μαζών είναι $M = mI$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας, και $M^{-1} = \frac{1}{m}I$. Η θέση $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix}$ προσδιορίζει τις απομακρύνσεις όλων των σωμάτων από το σημείο ισορροπίας. Ο 6Χ6 πίνακας K δεν έχει προσδιορισθεί.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις χαρακτηριστικές συχνότητες και τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης των σωμάτων. Θα μπορούσε κανείς αφού προσδιορίσει τις αλληλεπιδράσεις και σχηματίσει τον πίνακα K να προσδιορίσει τις συχνότητες και τους τρόπους ταλάντωσης των σωμάτων. Αλλά αυτή η μέθοδος παρότι εφικτή είναι επίπονη και δεν αποκαλύπτει μια σημαντική ιδιότητα την οποία έχουν οι κανονικές ταλαντώσεις τέτοιων συστημάτων. Χαμένοι στους υπολογισμούς θα αργούσαμε να ανακαλύψουμε ότι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης δεν εξαρτώνται από το συγκεκριμένο τρόπο αλληλεπίδρασης, και ότι μόνο οι συγκεκριμένες τιμές των ιδιοσυχνοτήτων εξαρτώνται από την αλληλεπίδραση!

Ο λόγος είναι ότι ένα τέτοιο σύστημα είναι συμμετρικό. Εάν στρέψουμε το σύστημα κατά 2π/6 έτσι ώστε $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_3$, $x_3 \to x_4$, $x_4 \to x_5$, $x_5 \to x_6$, $x_6 \to x_1$, το φυσικό σύστημα παραμένει το ίδιο. Ο μετασχηματισμός αυτός των συντεταγμένων είναι συμμετρία και δίνεται από τον πίνακα

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

διότι πράγματι $S\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_1 \end{bmatrix}$. Εφόσον το φυσικό σύστημα έχει τη συμμετρία S, εάν το σύστημα εξελίσσεται με $X(t)$ τότε και η $X'(t) = SX(t)$ πρέπει να αποτελεί εξέλιξη του συστήματος. Αυτό σημαίναι ότι οι πίνακες M και K πρέπει να μετατίθενται με τον πίνακα συμμετρίας S, δηλαδή πρέπει να ισχύει ότι

$$MS = SM\,,\ KS = SK\,,$$

διότι εάν και η $X(t)$ και η $X'(t)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις κίνησης, δηλαδή $M\ddot{X} = -KX$ και $MS\ddot{X} = -KSX$, παρατηρούμε ότι πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις κίνησης $M\ddot{X} = -KX$ με τον S έχουμε $SM\ddot{X} = -SKX$, οπότε οι πίνακες M και K μετατίθενται με τον S.

Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό: η S είναι συμμετρία αν η S μετατίθεται με τους πίνακες M και K δηλαδή η S είναι συμμετρία αν οι μεταθέτες[1] της συμμετρίας με τους πίνακες που ορίζουν τη δυναμική είναι μηδενικοί: $[M,S]=0$, $[K,S]=0$.

Συνεπώς εάν η $X_i(t)$ είναι μια κανονική ταλάντωση του συστήματος, οπότε $X_i(t) = \hat{X}_i e^{i\omega_i t}$ τότε και η $SX_i(t)$ θα είναι κανονική ταλάντωση $(S\hat{X}_i)e^{i\omega_i t}$, και μάλιστα με την ίδια χαρακτηριστική συχνότητα, ω_i. Εάν όλες οι κανονικές ταλαντώσεις $\hat{X}_i$ του συστήματος έχουν διαφορετικές συχνότητες τότε, όπως γνωρίζετε, όλα τα $\hat{X}_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς ταλαντώσεις με την ίδια χαρακτηριστική συχνότητα

[1] Ο μεταθέτης δύο πινάκων Α , Β ορίζεται ως ο πίνακας $[A,B] = AB - BA$.

θα πρέπει να είναι γραμμικά εξαρτημένες, δηλαδή υπάρχει κάποιος αριθμός λ_i τέτοιος ώστε $S\hat{X}_i = \lambda_i \hat{X}_i$,. Συνεπώς η κανονική ταλάντωση $\hat{X}_i$ που είναι ιδιοκατάσταση του πίνακα $M^{-1}K$ και ικανοποιεί τη σχέση $M^{-1}K\hat{X}_i = \omega_i^2 \hat{X}_i$, είναι και ιδιοκατάσταση του πίνακα συμμετρίας S και ικανοποιεί τη σχέση $S\hat{X}_i = \lambda_i \hat{X}_i$ (υπό την προυπόθεση ότι οι ιδιοσυχνότητες είναι διαφορετικές). Αποδείξαμε λοιπόν ότι οι κανονικές ταλαντώσεις του φυσικού συστήματος είναι και ιδιοκαταστάσεις του πίνακα συμμετρίας του συστήματος.

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Εστω ο $n \times n$ πίνακας Α . Υποθέτουμε ότι οι λ_1 , λ_2 , ... λ_μ είναι οι μ διαφορετικές ιδιοτιμές του Α. Τότε τα αντιστοιχούντα σε αυτές ιδιοδιανύσματα x_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη: Έστω k ο μικρότερος δείκτης για τον οποίο

$$x_k = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{k-1} x_{k-1}, \qquad (1)$$

με $x_{1,\ldots,} x_{k-1}$ γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς

$$\lambda_k x_k = A x_k = \lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 + \ldots + \lambda_{k-1} a_{k-1} x_{k-1}. \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με λ_k και αφαιρώντας από την (2) έχουμε ότι

$$(\lambda_1 - \lambda_k) a_1 x_1 + (\lambda_2 - \lambda_k) a_2 x_2 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) a_{k-1} x_{k-1} = 0 \qquad (3)$$

που σημαίνει ότι τα $x_{1,\ldots,} x_{k-1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Όπερ άτοπον.
Συνεπώς, αν οι διαφορετικές ιδιοτιμές είναι όσες και η διάσταση του χώρου, τότε αν ένα ιδιοάνυσμα έχει την ίδια ιδιοτιμή με κάποιο άλλο, τα δύο αυτά ιδιοανύσματα θα πρέπει να είναι το ένα ανάλογο του άλλου.

Αλλά ισχύει και το αντίστροφο: οι ιδιοκαταστάσεις του πίνακα συμμετρίας είναι και ιδιοκαταστάσεις του φυσικού συστήματος υπό τη προϋπόθεση ότι οι ιδιοτιμές του S είναι διαφορετικές. Με τον τρόπο αυτό καταλαβαίνουμε ότι οι ιδιοκαταστάσεις του συστήματος δεν εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη μορφή του πίνακα K, και ότι όλες οι αληλεπιδράσεις που έχουν ως συμμετρία την S, έχουν τις ίδιες ιδιοκαταστάσεις. Μόνον οι χαρακτηριστικές συχνότητες εξαρτώνται από το νόμο της αλληλεπίδρασης. Ας αποδείξουμε όμως πρώτα την πρόταση ότι οι ιδιοκαταστάσεις του πίνακα συμμετρίας είναι και ιδιοκαταστάσεις του φυσικού συστήματος υπό τη προϋπόθεση ότι οι ιδιοτιμές του S είναι διαφορετικές: ότι αν η $\hat{X}_i$ ικανοποιεί τη σχέση $S\hat{X}_i = \lambda_i \hat{X}_i$ τότε και $M^{-1}K\hat{X}_i = \omega_i^2 \hat{X}_i$.

Απόδειξη: Επειδή ο S μετατίθεται με τον M θα μετατίθεται και με τον M^{-1}, και επειδή μετατίθεται με τον K, θα μετατίθεται και με τον $M^{-1}K$, δηλαδή $SM^{-1}K = M^{-1}KS$. Αν $S\hat{X}_i = \lambda_i \hat{X}_i$, θα είναι:

$$S(M^{-1}K\hat{X}_i) = M^{-1}K(S\hat{X}_i) = \lambda_i (M^{-1}K\hat{X}_i),$$

δηλαδή και η $M^{-1}K\hat{X}_i$ είναι ιδιοκατάσταση του S με ιδιοτιμή λ_i. Αν οι ιδιοτιμές του S είναι διαφορετικές τότε θα πρέπει το ιδιοδιάνυσμα $M^{-1}K\hat{X}_i$ να είναι πολλαπλάσιο του $\hat{X}_i$, δηλαδή το $\hat{X}_i$ είναι ιδιοκατάσταση του πίνακα $M^{-1}K$.

Ας υπολογίσουμε τώρα τις ιδιοκαταστάσεις του S. Επειδή $S^6 = I$ είναι ο μοναδιαίος μετασχηματισμός (6 επαναληπτικές δράσεις του S ξαναφέρνουν το σύστημα στην αρχική του θέση), οι ιδιοτιμές του S πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $\lambda^6 = 1$. Διότι εάν $Sx = \lambda x$, $S^6 x = \lambda^6 x = Ix$, άρα $\lambda^6 = 1$. Οι ιδιοτιμές λοιπόν του S είναι:

$$\lambda_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{6}\right) \text{ με } k = 0,1,\cdots,5 .$$

Η k ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή λ_k, ικανοποιεί τη σχέση $Sx = \lambda_k x$ ή $x_2 = \lambda_k x_1$, $x_3 = \lambda_k x_2$, …, $x_6 = \lambda_k x_5$

Θέτοντας $x_1 = 1$, οι ιδιοκαταστάσεις είναι

$$\hat{X}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp\left(\frac{2ik\pi}{6}\right) \\ \exp\left(\frac{4ik\pi}{6}\right) \\ \exp\left(\frac{6ik\pi}{6}\right) \\ \exp\left(\frac{8ik\pi}{6}\right) \\ \exp\left(\frac{10ik\pi}{6}\right) \end{bmatrix} \text{ για } k = 0,1,\cdots,5 .$$

Παρατηρείτε ότι οι ιδιοκαταστάσεις του S είναι μιγαδικές, και ότι $\lambda_1 = \lambda_5^*$, $\lambda_2 = \lambda_4^*$ (* συμβολίζει το μιγαδικό συζυγές) όπου λ_k είναι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στην τιμή k, καθώς επίσης και ότι οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις είναι συζυγείς, δηλαδή $\hat{X}_1 = \hat{X}_5^*$ και $\hat{X}_2 = \hat{X}_4^*$. Αυτό αναμένεται διότι αν ένας πραγματικός πίνακας έχει μιγαδικές ιδιοτιμές τότε και η συζυγής ιδιοτιμή θα είναι ιδιοτιμή με ιδιοκατάσταση την συζυγή ιδιοκατάσταση[2]. Οι μόνες ιδιοτιμές που είναι πραγματικές είναι η $\lambda_0 = 1$ και η $\lambda_3 = -1$. Αυτή η δομή των ιδιοκαταστάσεων θα μας επιτρέψει να κατασκευάσουμε ισοδύναμες πραγματικές ιδιοκαταστάσεις για το φυσικό σύστημα.

Επειδή όλες οι ιδιοτιμές του S είναι διαφορετικές, οι 6 μιγαδικές ιδιοκαταστάσεις που βρήκαμε θα είναι και ιδιοκαταστάσεις του φυσικού συστήματος. Θα δούμε ότι η συγκεκριμένη δομή των ιδιοκαταστάσεων θα μας επιτρέψει να κατασκευάσουμε και

---

[2] Διότι αν S πραγματικός πίνακας και $Sx = \lambda x$, θα είναι και $Sx^* = \lambda^* x^*$.

ισοδύναμες πραγματικές ιδιοκαταστάσεις για το φυσικό σύστημα. Ας υπολογίσουμε τώρα τις χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος. Εφόσον γνωρίζουμε τις ιδιοκαταστάσεις οι ιδιοσυχνότητες προσδιορίζονται από την :

$$M^{-1}K\hat{X}_k = \omega_k^2 \hat{X}_k . \tag{A}$$

Οι ιδιοτιμές ω_k θα εξαρτώνται από το νόμο αλληλεπίδρασης, δηλαδή από το συγκεκριμένο πίνακα K. Μπορούμε όμως να γράψουμε τη γενική μορφή που έχει ο πίνακας K από την απαίτηση να είναι συμμετρικός και να μετατίθεται με τον S. Αυτές οι δύο συνθήκες αναγκάζουν τον πίνακα K να έχει τη μορφή:

$$K = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d & -c & -b \\ -b & a & -b & -c & -d & -c \\ -c & -b & a & -b & -c & -d \\ -d & -c & -b & a & -b & -c \\ -c & -d & -c & -b & a & -b \\ -b & -c & -d & -c & -b & a \end{bmatrix}$$

(Τα πρόσημα είναι αυθαίρετα, έχουν επιλεγεί απλώς διότι στις περισσότερες περιπτώσεις ο πίνακας έχει αυτά τα πρόσημα. Επίσης δεν έχουμε απαιτήσει ο πίνακας K να είναι θετικός, οπότε μπορεί να υπάρξουν αστάθειες.)

Εξισώνοντας τώρα κάποια συντεταγμένη της ισότητας (A), λ..χ. την πρώτη, συμπεραίνουμε ότι

$$\omega_k^2 = \frac{1}{m}\left(a - b\exp\left(\frac{2ik\pi}{6}\right) - c\exp\left(\frac{4ik\pi}{6}\right) - d\exp\left(\frac{6ik\pi}{6}\right) - c\exp\left(\frac{8ik\pi}{6}\right) - b\exp\left(\frac{10ik\pi}{6}\right)\right)$$

επειδή όμως $\exp\left(\frac{10ik\pi}{6}\right) = \exp\left(-\frac{2ik\pi}{6}\right)$ και $\exp\left(\frac{8ik\pi}{6}\right) = \exp\left(-\frac{4ik\pi}{6}\right)$ έχουμε ότι οι ιδιοτιμές θα είναι

$$\omega_k^2 = \frac{1}{m}\left(a - 2b\cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right) - 2c\cos\left(\frac{4k\pi}{6}\right) - (-1)^k d\right).$$

Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, όπως έτσι και αλλιώς αναμενόταν από τη συμμετρία των πινάκων K και M.

Απομένει μία εκκρεμότητα. Θέλουμε οι ιδιοκαταστάσεις να είναι και αυτές πραγματικές. Παρατηρήστε ότι στις συζυγείς ιδιοκαταστάσεις που αντιστοιχούν συζυγείς ιδιοτιμές του πίνακα S, αντιστοιχούν τώρα ιδιοτιμές του $M^{-1}K$ που είναι ίσες. Ισχύει δηλαδή ότι $\omega_1^2 = \omega_5^2$ και $\omega_2^2 = \omega_4^2$. (Διότι $\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right)$ και $\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{20\pi}{6}\right)$ κ.ο.κ.).

Στο φυσικό πρόβλημα δηλαδή οι ιδιοτιμές δεν είναι διαφορετικές. Αν όμως έχουμε δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ίδιες ιδιοτιμές τότε εύκολα βλέπει κανείς ότι και οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων αυτών θα είναι κανονική ταλάντωση με χαρακτηριστική συχνότητα την κοινή ιδιοτιμή.

Άσκηση: Δείξτε ότι αν $\hat{X}$ και $\hat{X}'$ είναι δύο διαφορετικές κανονικές ταλαντώσεις με κοινή όμως χαρακτηριστική συχνότητα ω τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός των $\hat{X}$ και $\hat{X}'$ είναι κανονική ταλάντωση με την ίδια χαρακτηριστική συχνότητα. Και αντιστρόφως, αν $\hat{X}$ και $\hat{X}'$ είναι κανονικές ταλαντώσεις ενός συστήματος με διαφορετικές ιδιοσυχνότητες ω και ω', αντιστοίχως, τότε η $b\hat{X} + c\hat{X}'$ δεν είναι κανονική ταλάντωση εκτός αν $b = 0$ ή $c = 0$.

Λαμβάνουμε λοιπόν τις εξής 6 πραγματικές ιδιοκαταστάσεις του φυσικού προβλήματος:

$$\hat{X}_0\ ,\ \frac{\hat{X}_1 + \hat{X}_5}{2},\ \frac{\hat{X}_1 - \hat{X}_5}{2i},\ \frac{\hat{X}_2 + \hat{X}_4}{2},\ \frac{\hat{X}_2 - \hat{X}_4}{2i},\ \hat{X}_3,$$

με χαρακτηριστικές συχνότητες αντιστοίχως τις: $\omega_0^2, \omega_1^2, \omega_1^2, \omega_2^2, \omega_2^2, \omega_3^2$. (Προσέξτε ότι αυτές οι ιδιοκαταστάσεις δεν είναι όλες ιδιοκαταστάσεις του πίνακα συμμετρίας S).
Με το τρόπο αυτό η εξέλιξη κάθε αρχικής κατάστασης μπορεί εύκολα να υπολογισθεί.

Άσκηση: Ν ίδια σώματα που βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού Ν-γώνου αλληλεπιδρούν, Γράψτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.