ΚΥΜΑΤΙΚΗ

Ι. Μ**ηχανικά κύματα**

Ασκήσεις Φυλλαδίου 3 **Υπέρθεση-ανάκλαση-διάθλαση**

Άσκηση 1 (Φυλλάδιο 3)

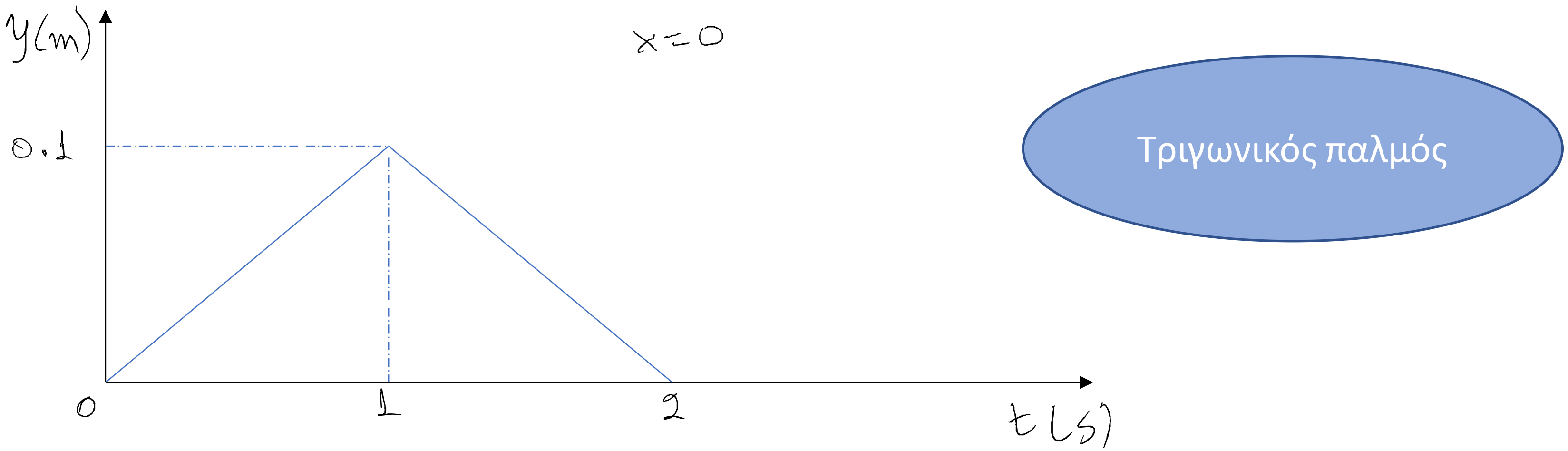
Έστω μία ημιάπειρη τεταμένη χορδή υπό τάση $F = 10\mathrm{N}$ και με γραμμική πυκνότητα $\mu = \frac{0.1kgr}{m}$. Κινούμε το άκρο της με κατακόρυφη ταχύτητα u_y=0.1m/s για χρονικό διάστημα t=1s προς τα επάνω και κατόπιν το επαναφέρουμε στη θέση ισορροπίας με ίση και αντίθετη ταχύτητα κινώντας το πάλι για t=1s. Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται ένας τριγωνικός παλμός.

α) Πόση είναι η ταχύτητα που διαδίδεται ο παλμός στη χορδή και πόση η εμπέδηση;
β) Πόση ενέργεια δώσαμε στη χορδή;
γ) Σχεδιάστε ένα στιγμιότυπο του παλμού που ταξιδεύει στη χορδή, σημειώνοντας και την ταχύτητα u_y για t=3s.
δ) Πόση ενέργεια μεταφέρει αυτός ο παλμός;
ε) Πόση ορμή μεταφέρει αυτός ο παλμός;

Η διαταραχή που διαδίδεται στη τεντωμένη χορδή είναι ένας τριγωνικός παλμός. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο x της χορδής. Η απομάκρυνση y από τη θέση ισορροπίας ($y = 0$) είναι

$$y = u_y t = \begin{cases} 0.1 m s^{-1}\,(t - t_o) & \gamma\iota\alpha \quad t_o \leq t < t_o + 1s \\ -0.1 m s^{-1}(t - t_o) & \gamma\iota\alpha \quad t_o + 1s < t \leq t_o + 2s \end{cases}$$

όπου t_o είναι η χρονική στιγμή που παλμός φτάνει στο σημείο x της χορδής. Προφανώς $t_o = 0$ για το άκρο $x = 0$.



(α) $\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{10\mathrm{N}}{0.1\mathrm{kgm}^{-1}}} = \sqrt{100\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 10\mathrm{ms}^{-1}$

$Z = \sqrt{\mu F} = \sqrt{0.1\mathrm{kgm}^{-1} \times 10\mathrm{N}} = 1\mathrm{kgs}^{-1}$

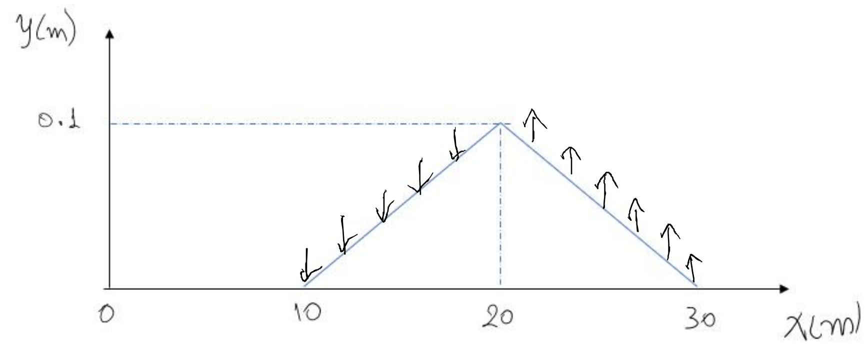
(β) $\mathrm{P(x,t)} = \mathrm{Z}u_y^2 = 1\mathrm{kg}s^{-1} \times (0.1ms^{-1})^2 = 10^{-2}W$

$$\mathrm{P(x,t)} = -\mathrm{F}\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \mathrm{F}\frac{1}{\upsilon}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = Zu_y^2$$

$E = P \cdot \Delta t = 10^{-2}\mathrm{W} \times 2\mathrm{s} = 2 \times 10^{-2}\mathrm{J}$

(γ) Ο παλμός έχει ύψος $h = 0.1m$, και χρονική διάρκεια $\mathrm{T} = 2s$. Η ταχύτητα διάδοσης του παλμού είναι $\upsilon = 10\mathrm{ms}^{-1}$. Οπότε το μήκος κύματος, δηλ. το μήκος της βάσης του τριγωνικού παλμού είναι $\lambda = \upsilon\mathrm{T} = 20m$.

Τη χρονική στιγμή $t = 3s$ ο παλμός έχει φτάσει στο σημείο $x = 10ms^{-1} \times 3s = 30m$



Με κατακόρυφα διανύσματα (βέλη) σημειώνεται η κατακόρυφη ταχύτητα u_y. Το μέτρο του διανύσματος είναι πάντα το ίδιο ίσο με $0.1m/s$.

Η φορά του διανύσματος είναι αρνητική μέχρι το μέγιστο, και μετά γίνεται θετική. Θυμηθείτε ότι $u_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\upsilon\frac{\partial y}{\partial x}$ (για διάδοση προς τα δεξιά) οπότε, όταν η κλίση της χορδής $\frac{\partial y}{\partial x}$ είναι θετική, η κατακόρυφη ταχύτητα είναι αρνητική (προς τα κάτω).

(δ) Γραμμική πυκνότητα μηχανικής ενέργειας

$$\rho_M = 2\rho_\delta = 2\cdot\frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\mathrm{N}\left(\frac{0.1\mathrm{m}}{10\mathrm{m}}\right)^2 = 10\cdot 10^{-4}\mathrm{N} = 10^{-3}\mathrm{N}$$

$$E_M = \int_{10}^{30}\rho_M dx = \rho_M\Delta x = 10^{-3}\mathrm{N}\cdot 20\mathrm{m} = 2\times 10^{-2}\mathrm{J} = E_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma}$$

(ε) γραμμική πυκνότητα ορμής

$g = -\mu\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x} = -\mu u_y\frac{\partial y}{\partial x} = 0.1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\times 0.1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\times\left(\frac{0.1\mathrm{m}}{10\mathrm{m}}\right) = 10^{-4}\mathrm{kg/s}$ (θυμηθείτε ότι $\frac{\partial y}{\partial t}$ $\kappa\alpha\iota$ $\frac{\partial y}{\partial x}$ έχουν αντίθετα πρόσημα).

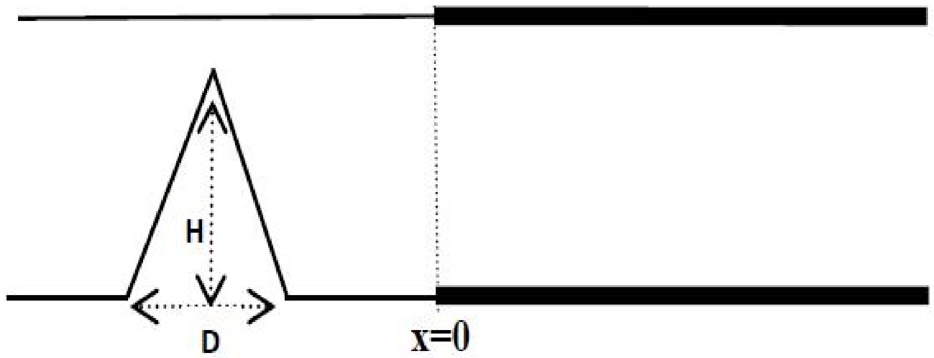
Συνολική ορμή που μεταφέρεται με τον παλμό:

$$p = \int_{10}^{30} \mathrm{g}dx = \mathrm{g}\Delta x = 2\times 10^{-3}\mathrm{kg\,m/s}$$

(Παρατηρείστε ότι $\mathrm{E} = \rho\upsilon$)

Άσκηση 2 (φυλλάδιο 3)

Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται χορδή (T, μ_1, x<0), (T, μ_2, x>0) με $\mu_2 = 9\mu_1$. Στον αρνητικό ημιάξονα οδεύει προς τα δεξιά ο σχεδόν τριγωνικός παλμός (H, D).



A) Να βρεθούν τα πλάτη του ανακλώμενου και του διαθλώμενου παλμού.

B) Να σχεδιαστεί ποσοτικά ένα στιγμιότυπο της χορδής μετά την αποκατάσταση της διαδικασίας ανάκλασης και διάθλασης του παλμού στη θέση x=0.

Γ) Πόση είναι η ενέργεια του παλμού που προσπίπτει;

Δ) Ποιο είναι το ποσοστό της ενέργειας του προσπίπτοντος παλμού που πηγαίνει στον παλμό που

διαθλάται;

A) $r = \frac{A_2}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ $\quad t = \frac{A_3}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$

$\boxed{\mathrm{A}_1 = \mathrm{H} = \text{πλάτος προσπίπτοντος παλμού}}$

$$v_1 = \frac{\omega}{k_1} \Rightarrow k_1 = \frac{\omega}{v_1}, \quad v_2 = \frac{\omega}{k_2} \Rightarrow k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

$$r = \frac{\frac{\omega}{v_1} - \frac{\omega}{v_2}}{\frac{\omega}{v_1} + \frac{\omega}{v_2}} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu_2}} - \sqrt{\frac{F}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{F}{\mu_1}}} \cdot \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} = \frac{\sqrt{\mu_1 F} - \sqrt{\mu_2 F}}{\sqrt{\mu_1 F} + \sqrt{\mu_2 F}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Ομοίως $t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$

Για τα δεδομένα της άσκησης, δηλ. για $\mu_2 = 9\mu_1$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_1 F} - \sqrt{\mu_2 F}}{\sqrt{\mu_1 F} + \sqrt{\mu_2 F}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - 3\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + 3\sqrt{\mu_1}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = -\frac{\mathrm{H}}{2}$$

→ αρνητικό

$$t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + 3\sqrt{\mu_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow A_3 = \frac{\mathrm{H}}{2}$$

B)

Η διάρκεια Τ του παλμού είναι D/υ όπου υ η ταχύτητα διάδοσης του παλμού στη χορδή.

<u>Ανακλώμενος παλμός</u>:

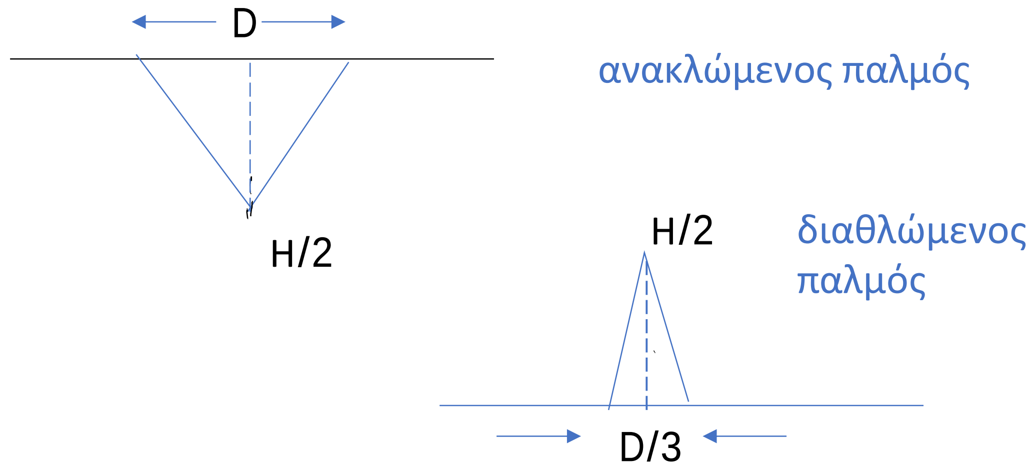
Το μήκος της βάσης του τριγωνικού παλμού είναι το ίδιο για τον προσπίπτοντα και ανακλώμενο παλμό (τα υ_1 και T είναι τα ίδια). Το ύψος του ανακλώμενου παλμού είναι Η/2 και αρνητικό.

<u>Διαθλώμενος παλμός</u>:

Το μήκος της βάσης του διαθλώμενου παλμού είναι $\mathrm{D}_{\delta\iota\alpha\theta\lambda} = \upsilon_2 \mathrm{T}$

Αλλά

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu_1}}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{9\mu_1}} = \frac{1}{3}$$

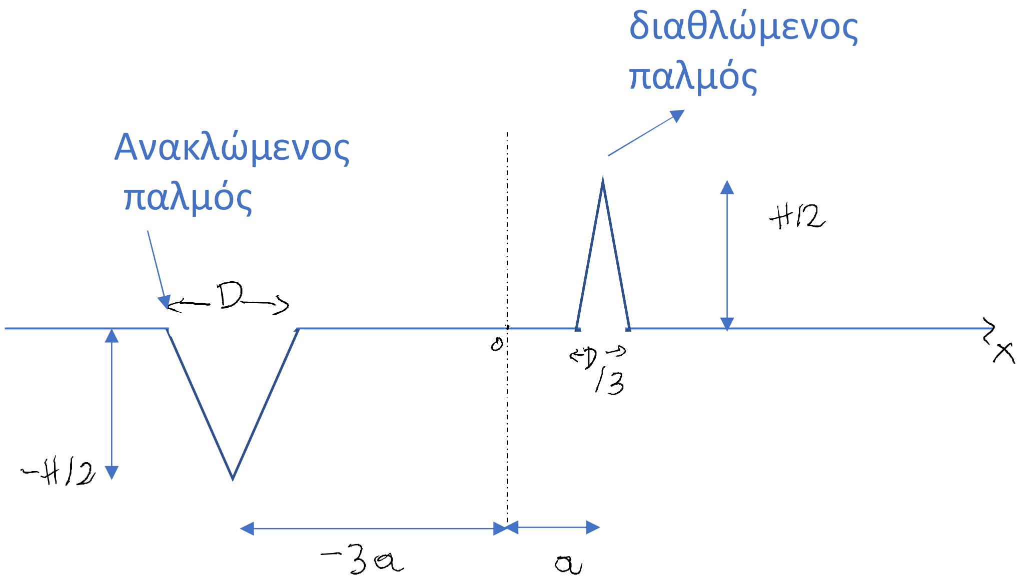


Επομένως

$$\frac{\mathrm{D}_{\delta\iota\alpha\theta\lambda}}{D_{\pi\rho o\sigma\pi}} = \frac{\upsilon_2 \mathrm{T}}{\upsilon_1 \mathrm{T}} = \frac{1}{3}$$

Με βάση τα παραπάνω, σχεδιάζουμε ένα στιγμιότυπο της χορδής:

Ας υποθέσουμε ότι κάποια χρονική στιγμή η κορυφή του διαθλώμενου παλμού βρίσκεται στη θέση $x = +\alpha$,. Τότε η κορυφή του ανακλώμενου παλμού, ο οποίος διαδίδεται με τριπλάσια ταχύτητα, θα είναι στη θέση $x = -3\alpha$:



Γ) Η γραμμική πυκνότητα μηχανικής ενέργειας του προσπίπτοντος παλμού είναι

$$\rho_{M,\pi\rho o\sigma\pi} = 2\rho_{\triangle,\pi\rho o\sigma\pi} = 2 \cdot \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2\frac{F}{2}\left(\frac{H}{D/2}\right)^2 = 4\frac{FH^2}{D^2}$$

Η συνολική ενέργεια του προσπίπτοντος παλμού είναι

$$E_{M,\pi\rho o\sigma\pi} = \int_0^{D} \rho_{M,\pi\rho o\sigma\pi} dx = \rho_{M,\pi\rho o\sigma\pi} D = 4\frac{FH^2}{D}$$

Δ) Η γραμμική πυκνότητα μηχανικής ενέργειας του διαθλώμενου παλμού είναι

$$\rho_{M,\delta\iota\alpha\theta\lambda} = 2\rho_{\triangle,\delta\iota\alpha\theta\lambda} = 2 \cdot \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2\frac{F}{2}\left(\frac{H/2}{D/6}\right)^2 = \frac{9FH^2}{D^2}$$

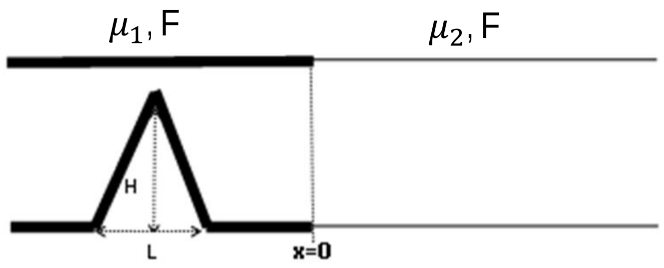
Η συνολική ενέργεια του διαθλώμενου παλμού είναι

$$E_{M,\delta\iota\alpha\theta\lambda} = \int_0^{D} \rho_{M,\delta\iota\alpha\theta\lambda} dx = \rho_{M,\delta\iota\alpha\theta\lambda}\left(\frac{D}{3}\right) = \frac{9FH^2}{D^2}\frac{D}{3} = \frac{3FH^2}{D}$$

Επομένως,

$$\frac{E_{M,\delta\iota\alpha\theta\lambda}}{E_{M,\pi\rho o\sigma\pi}} = \frac{\frac{3FH^2}{D}}{4\frac{FH^2}{D}} = \frac{3}{4} = 75\%$$

Άσκηση 3



Στο σχήμα απεικονίζεται χορδή (Τ, μ_1, x<0), (Τ, μ_2, x>0) με $\mu_1 = 9\mu_2$.
Στον αρνητικό ημιάξονα οδεύει προς τα δεξιά ο σχεδόν τριγωνικός παλμός (Η, L).
Α) Να βρεθούν τα πλάτη του ανακλώμενου και του διαδιδόμενου προς τα δεξιά (διαθλώμενου) παλμού.
Β) Να σχεδιαστεί ποσοτικά ένα στιγμιότυπο της χορδής, αφού ο παλμός έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο x=0.Πόση ενέργεια μεταφέρει ο παλμός;

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= 9\mu_2 \\ \upsilon_1 &= \sqrt{F/\mu_1} \\ \upsilon_2 &= \sqrt{F/\mu_2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \sqrt{\mu_2/\mu_1} = 1/3 \Rightarrow \upsilon_2 = 3\upsilon_1$$

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_1 &= \omega/k_1 \Rightarrow k_1 = \omega/\upsilon_1 \\ \upsilon_1 &= \omega/k_2 \Rightarrow k_2 = \omega/\upsilon_2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = 3 \Rightarrow k_1 = 3k_2 \text{ και } \lambda_2 = 3\lambda_1$$

Η βάση του διαθλώμενου παλμού είναι τριπλάσια ($\lambda_2 = 3L$) από τη βάση του ανακλώμενου παλμού ($\lambda_1 = L$)

Λόγος πλάτους ανακλώμενου / πλάτος προσπίπτοντος παλμού

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{3k_2 - k_2}{3k_2 + k_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Άρα το ύψος του ανακλώμενου παλμού είναι ίσο με Η/2

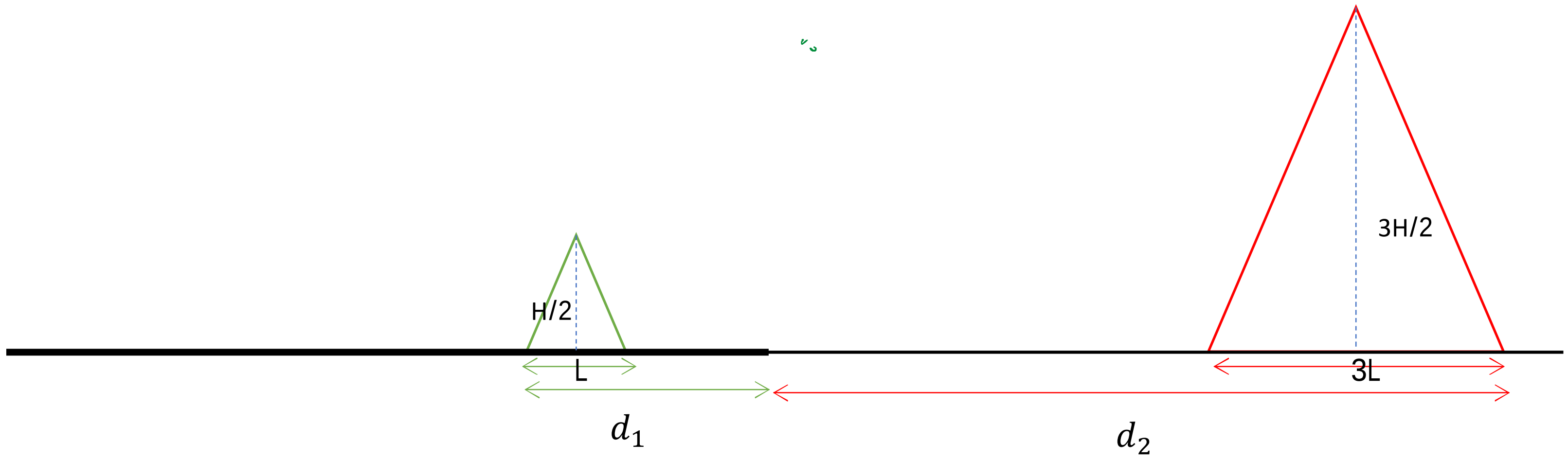
Λόγος πλάτους διαθλώμενου / πλάτος προσπίπτοντος παλμού

$$t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{6k_2}{3k_2 + k_2} = \frac{3}{2}$$

Άρα το ύψος του διαθλώμενου παλμού είναι ίσο με 3Η/2.

Ανακλώμενος παλμός → εγκάρσια συστολή ($H/2$), διαμήκης διάσταση σταθερή ($\lambda_1 = L$)
Διαθλώμενος παλμός → εγκάρσια ($3H/2$) και διαμήκης ($\lambda_2 = 3L$) διαστολή

Μέσα σε χρόνο t ο ανακλώμενος παλμός έχει φτάσει σε απόσταση d_1 προς τα αριστερά ασυνέχειας και ο διαθλώμενος παλμός σε απόσταση d_2 προς τα δεξιά της ασυνέχειας.



$d_1 = \upsilon_1 t$ και $d_2 = \upsilon_2\, t$ οπότε $\frac{d_2}{d_1} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = 3 \Rightarrow d_2 = 3d_1$