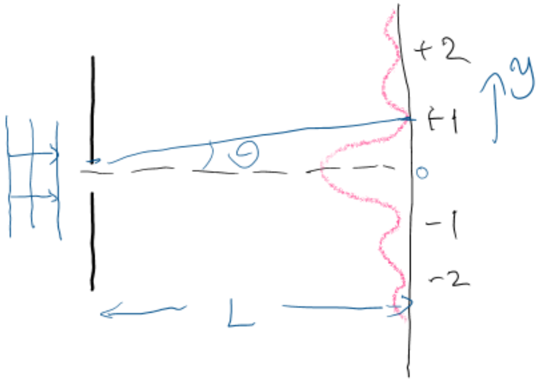
Μάθημα 18α
Ασκήσεις Περίθλασης

Άσκηση 1

Όταν η οθόνη βρίσκεται 40cm μακριά από τη σχισμή και το χρησιμοποιούμενο μήκος κύματος του φωτός είναι 550nm, η απόσταση μεταξύ του πρώτου και πέμπτου ελαχίστου ενός σχηματισμού περίθλασης απλής σχισμής, είναι 0.35mm. (α) Βρείτε το πλάτος της σχισμής και (β) Υπολογίστε τη γωνία θ του πρώτου ελαχίστου περίθλασης

(α)



$I = I_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$, $\beta = \frac{1}{2} k b \sin\theta$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

b = πλάτος της σχισμής

Ελάχιστα: $\beta = \frac{1}{2} k b \sin\theta = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\tan\theta = \frac{y}{L}$, $\tan\theta \approx \sin\theta$

$\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\pi}{\lambda} b \frac{y}{L} \approx m\cancel{\pi} \Rightarrow \boxed{y = \frac{m\lambda L}{b}}$

1ο ελάχιστο $y_1 = \frac{\lambda L}{b}$

5ο ελάχιστο $y_5 = \frac{5\lambda L}{b}$

$y_5 - y_1 = \frac{4\lambda L}{b} \Rightarrow b = \frac{4 \times 550 \times 10^{-9}\,m \times 40 \times 10^{-2}\,m}{0,35 \times 10^{-3}\,m} \simeq 2,51\,mm$

(β) $\frac{1}{2} k b \sin\theta = m\pi \xRightarrow{m=1} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda} b\, \theta_1 \approx \cancel{\pi} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\lambda}{b} = \frac{550\,nm}{2,5\,mm} = \frac{550 \times 10^{-9}\,m}{2,5 \times 10^{-3}\,m} = 2,2 \times 10^{-4}\,rad$

Άσκηση 2

Μια απλή σχισμή φωτίζεται με φως μηκών κύματος λ_α και λ_β , έτσι επιλεμένα ώστε το πρώτο ελάχιστο περίθλασης της λ_α συνιστώσας να συμπίπτει με το δεύτερο ελάχιστο της λ_β συνιστώσας. (α) Αν λ_β=350nm, πόσο είναι το λ_β; (β) Για ποια τάξη m_b (αν υπάρχει) ένα ελάχιστο της λ_β συνιστώσας συμπίπτει με ένα ελάχιστο της λ_α συνιστώσας για την τάξη m_α =2 και m_α=3;

(α) $\theta_m \cong \frac{m\lambda}{b}$ $\qquad \theta_{a,m} = \frac{m_a \lambda_a}{b}$ $\qquad$ για $m_a = 1$, $m_b = 2$ $\quad \theta_{a,m} = \theta_{b,m}$

$\lambda_a = 350nm$ $\qquad \theta_{b,m} = \frac{m_b \lambda_b}{b}$ $\qquad$ Άρα $\frac{1 \cdot \lambda_a}{\cancel{b}} = \frac{2 \cdot \lambda_b}{\cancel{b}} \Rightarrow \lambda_a = 2\lambda_b = 700\,nm$

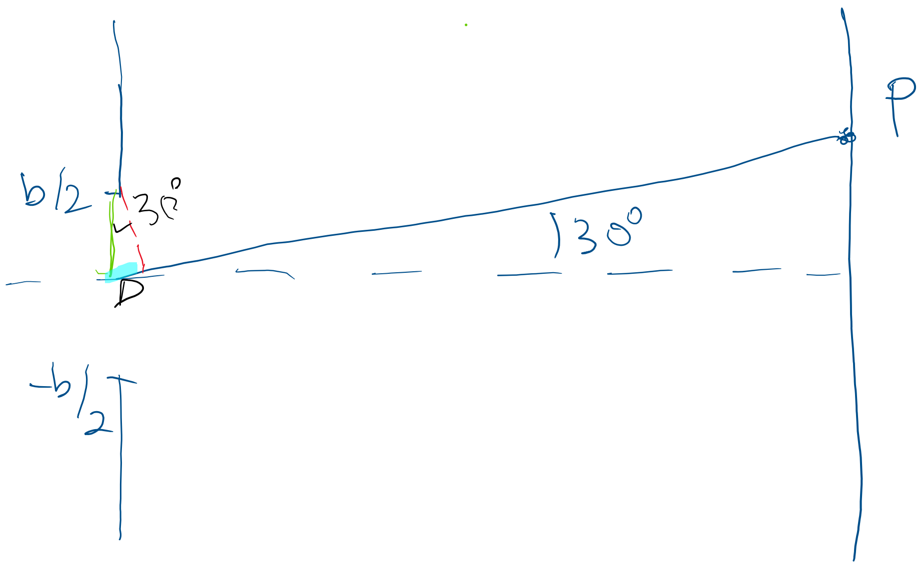
(β) $\theta_{a,m} = \theta_{b,m} \Rightarrow \frac{m_a \lambda_a}{\cancel{b}} = \frac{m_b \lambda_b}{\cancel{b}} \Rightarrow m_a 2 \cancel{\lambda_b} = m_b \cancel{\lambda_b} \Rightarrow m_b = 2m_a$

για $m_a = 2$ $\quad m_b = 4$

$m_a = 3$ $\quad m_b = 6$

Άσκηση 3

Σχισμή πλάτους 0.10mm φωτίζεται με φως μήκους κύματος 589nm. Θεωρείστε ένα σημείο P σε οθόνη όπου παρατηρούμε τον σχηματισμό περίθλασης της σχισμής. Το σημείο βρίσκεται σε γωνία 30° ως προς το κεντρικό άξονά της. Πόση είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των δευτερευόντων κυμάτων Huygens που φτάνουν στο σημείο P από τη κορυφή και το μέσο της σχισμής;



Διαφορά οπτικού δρόμου $\Delta = \frac{b}{2}\sin\theta$

Διαφορά φάσης $\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$

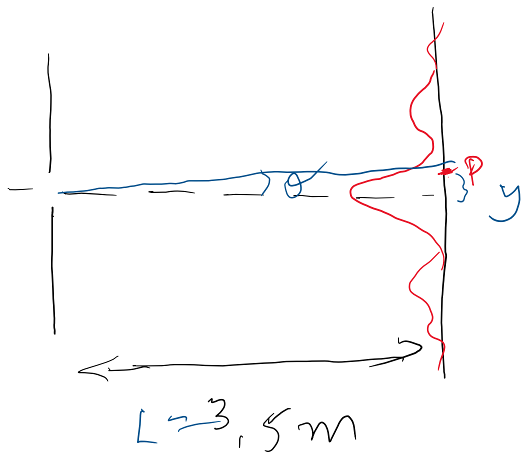
Άρα

$$\varphi = \frac{2\pi}{589\times10^{-9}\,m}\cdot\frac{0{,}1\cdot10^{-3}\,m}{2}\sin 30^{o} = 266{,}6\,rad = 84\pi + 0{,}904\pi$$

$\rightarrow \underline{162{,}7^{o}}$

Άσκηση 4

Μονοχρωματικό φως μήκους κύματος 538nm προσπίπτει σε σχισμή πλάτους 0.025mm. Η απόσταση από τη σχισμή μέχρι την οθόνη είναι 3.5m. Θεωρήστε ένα σημείο στην οθόνη που απέχει 1.1cm από το κεντρικό μέγιστο. Υπολογίστε (α) τη γωνία θ για αυτό το σημείο (β) τον λόγο της έντασης σε αυτό το σημείο προς την ένταση του κεντρικού μεγίστου.



$$\tan\theta = \frac{y}{L} = \frac{1{,}1\times10^{-2}\,m}{3{,}5\,m} = 0{,}00314 \Rightarrow \theta \approx 0{,}00314\,rad$$

$$\rightarrow 0{,}18^\circ$$

$$\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\pi}{\lambda}b\theta = \frac{3{,}14}{538\times10^{-9}\,m}\times0{,}025\times10^{-3}\,m\times3{,}14\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow \beta = 0{,}46\,rad$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2\beta}{\beta^2} = \frac{\sin^2(0{,}46\,rad)}{0{,}46^2} = \left(\frac{0{,}44}{0{,}46}\right)^2 = 0{,}93$$

Άσκηση 5

Οι δύο προβολείς ενός αυτοκινήτου που πλησιάζει απέχουν 1.4m μεταξύ τους. Σε πόση (α) γωνιακή απόσταση και (β) μέγιστη απόσταση θα μπορέσει το μάτι μας να τους διακρίνει; Υποθέστε ότι η διάμετρος της κόρης του ματιού είναι 5.0mm και χρησιμοποιείστε ως μήκος κύματος για το φως τα 550nm. Επίσης υποθέστε ότι μόνο φαινόμενα περίθλασης περιορίζουν την ανάλυση, και ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο Rayleigh.

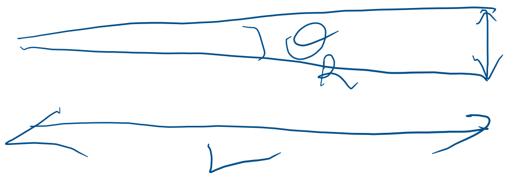
(α) $\theta_R = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}$

$D = 5\,mm = 5\times10^{-3}\,m$

$\lambda = 550\,nm = 550\times10^{-9}\,m$

$\theta_R = 1{,}22\times\frac{550\times10^{-9}}{5\times10^{-3}} = 1{,}34\times10^{-4}$ rad

(β)



$1m = d$

$\frac{d}{L} = \tan\theta_R \approx \theta_R \Rightarrow L_{max} \cong \frac{d}{\theta_R} = \frac{1{,}4}{1{,}34\times10^{-4}} \cong 10{,}45\,Km$

Άσκηση 6

Σε ένα πείραμα περίθλασης μακρινού πεδίου από διπλή σχισμή τα πλάτη των σχισμών είναι 12μm, η απόσταση μεταξύ των σχισμών 24μm, το μήκος κύματος 600nm και η οθόνη παρατήρησης βρίσκεται σε απόσταση 4.0m. Έστω IP η ένταση στο σημείο P της οθόνης σε ύψος y=70.0cm. (α) Ποιος είναι ο λόγος μεταξύ I_P και I_m στο κέντρο του σχηματισμού; (β) Προσδιορίστε τη θέση του P ως προς τα μέγιστα και ελάχιστα συμβολής. (γ) Προσδιορίστε τη θέση του P ως προς τα ελάχιστα περίθλασης.

$$I = 4I_o\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\cos^2\alpha$$

$$\beta \equiv \frac{1}{2}kb\sin\theta$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{2}ka\sin\theta$$

$$y = L\tan\theta \cong L\sin\theta$$

b=12μm

a=24μm $=2b$

λ=600nm

L=4.0m

y=70.0cm

(α)

$$\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\lambda}b\frac{y}{L} = \frac{\pi\cdot 12\times10^{-6}m\times 70\times10^{-2}m}{600\times10^{-9}m\times 4m} = 11\ rad$$

$$\alpha = \frac{1}{2}ka\sin\theta = \ldots = 22\ rad$$

$$(=2\beta)$$

$$\frac{I_P}{I_o} = 4\left(\frac{\sin(11\ rad)}{11}\right)^2\cos^2(22\ rad) = 4\left(\frac{-1}{11}\right)^2\cdot(-1)^2 = 0{,}03$$

$$\frac{I_m}{I_o} = 4 \Rightarrow \frac{I_P}{I_m} = \frac{0{,}03}{4} = 0{,}0075$$

(β) Προσδιορίστε τη θέση του P ως προς τα μέγιστα και ελάχιστα συμβολής.

Μέγιστα συμβολής: $a\sin\theta = p\lambda$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L}$, δηλ. $\frac{a y}{L} = p\lambda \Rightarrow y = \frac{p\lambda L}{a}$

$m = 1$ $\quad y_1 = \frac{600\times 10^{-9}\,m \times 4\,m}{24\times 10^{-6}\,m} = 0{,}1\,m = 10\,cm$

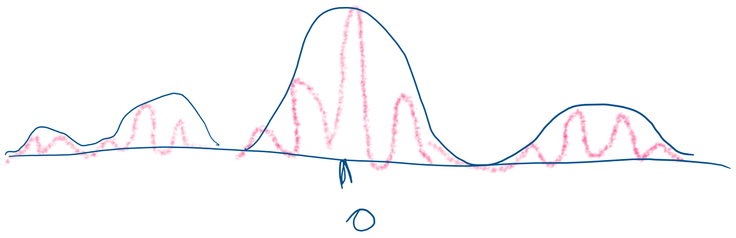
$y_7 = 70\,cm \rightarrow$ μέγιστο συμβολής $p = 7$

Ελάχιστα περίθλασης $b\sin\theta = m\lambda$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

$b\frac{y}{L} \approx m\lambda \Rightarrow y = \frac{m\lambda L}{b}$, $m = 1 \rightarrow y_{1,\pi\epsilon\rho} = 20\,cm$

$y_3 = 60\,cm$ $\quad y_4 = 80\,cm$ Άρα $y = 70\,cm$ μεταξύ 3ου και 4ου ελαχ. περίθλασης

Μπορούμε να το σκεφτούμε και λίγο διαφορετικά:



$a\sin\theta = p\lambda$, $p = 0, \pm 1, \dots$ μέγιστα συμβολής

$b\sin\theta = m\lambda$, $m = \pm 1, \dots$ ελάχιστα περίθλασης

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{1} \Rightarrow p = \frac{2b}{b} = 2$$

δηλ. ο $2^{ος}$ κροσσός συμβολής βρίσκεται στον κεντρικό λοβό περίθλασης

Ο $7^{ος}$ κροσσός συμβολής βρίσκεται στον τρίτο λοβό περίθλασης μεταξύ των ελαχίστων περίθλασης $m=3$ και $m=4$.

Συμπληρώματα στη θεωρία φραγμάτων περίθλασης

- Είδαμε ότι η εξίσωση φράγματος (για τα μέγιστα) είναι: $a\sin\theta = m\lambda$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (για κάθετη πρόσπτωση)

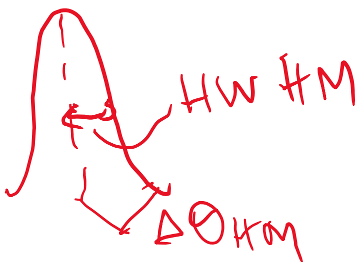
  όπου a η απόσταση μεταξύ διαδοχικών σχισμών

  m: αριθμός τάξης

  $m=0$: γραμμή μηδενικής τάξης

  $m=1$: γραμμή πρώτης τάξης

- HWHM



$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

Πρώτο ελάχιστο για

$$N\alpha = \pi \Rightarrow N\cdot\frac{1}{2}ka\sin\theta = \pi$$

$$\Rightarrow N\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\cancel{\pi}}{\lambda}a\sin\theta = \cancel{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Na\sin\theta = \lambda \Rightarrow \delta\theta_{HWHM} \simeq \lambda/Na$$

- Το πάχος της γραμμής για οποιαδήποτε γωνία θ (δηλ. αυτό της μετρούμενης γραμμής)

$$\Delta\theta_{HWHM} = \frac{\lambda}{N a \cos\theta}$$

- Διασπορά $D = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$

$a \sin\theta = m\lambda \Rightarrow$ διαφορίζουμε $\Rightarrow$

$$a \cos\theta \, d\theta = m \, d\lambda \Rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{a\cos\theta}$$

- Διακριτική ικανότητα – κριτήριο Rayleigh

$$\Delta\theta = \frac{m}{a\cos\theta}\Delta\lambda \, , \quad \Delta\theta_{HWHM} = \frac{\lambda}{N a \cos\theta} \Rightarrow \frac{\lambda}{N \cancel{a\cos\theta}} = \frac{m}{\cancel{a\cos\theta}}\Delta\lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \lambda/\Delta\lambda = N \cdot m}$$

Άσκηση 7

Φράγμα περιθλασης έχει 1.26×10^4 χαραγές ομοιόμορφα κατανεμημένες σε ένα πλάτος $w = 25.4mm$. Φωτίζεται κάθετα με κίτρινο φως λάμπας Νατρίου, που περιέχει δύο κοντινές φασματικές γραμμές με μ.κ. 589nm και 589.59nm.

(a) Σε ποια γωνία εμφανίζεται το μέγιστο πρώτης τάξης για τη γραμμή των 589nm

(b) Χρησιμοποιώντας τη διασπορά του φράγματος, υπολογίστε τη γωνιακή απόσταση μεταξύ των δύο γραμμών στη πρώτη τάξη.

(c) Πόσος είναι ο ελάχιστος αριθμός χαραγών που μπορεί να έχει ένα φράγμα και να εξακολουθεί να μπορεί να διακρίνει τη διπλή γραμμή του Νατρίου.

(α) $a = \frac{w}{N} = \frac{25,4 \times 10^{-3}\,m}{1,26 \times 10^{4}} = 2,016 \times 10^{-6}\,m = 2,016\,\mu m = 2016\,nm$

Μέγιστο 1ης τάξης, $m = 1$ $\quad a \sin\theta = 1 \cdot \lambda \Rightarrow \sin\theta = \frac{589\,nm}{2016\,nm} \Rightarrow \theta \cong 17^\circ$

(β) $D = \frac{m}{a\cos\theta} = \frac{1}{2016\,nm \cdot \cos 17^\circ} = 5,187 \times 10^{-4}\,rad/nm \quad D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta\theta = D\,\Delta\lambda \Rightarrow \Delta\theta = 5,187 \times 10^{-4}\,\frac{rad}{nm} \cdot 0,59\,nm = \underline{0,018^\circ}$

(c) $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)/2}{(\lambda_2-\lambda_1)} = \frac{(589+589{,}59)/2}{0{,}59} = 999{,}98 \approx 10^3$

$R = N \cdot m$

Άρα αν χρησιμοποιήσουμε το φράγμα σε πρώτη τάξη $(m=1)$ $\quad N = R = 10^3$

Άσκηση 8

Υποθέστε ότι τα όρια του ορατού φάσματος επιλέγονται αυθαίρετα να είναι τα 430nm και τα 680nm. Υπολογίστε τον αριθμό των χαραγών ανά χιλιοστό ενός φράγματος που θα διαχέει το φάσμα πρώτης τάξης κατά μία γωνία 20^{o} .

$\lambda_1 = 430nm$, $\lambda_2 = 680nm$ $\quad \Delta\theta = 20^{o}$ $\quad \lambda_1 \rightarrow \theta$, $\lambda_2 \rightarrow \theta + \Delta\theta$

Για $m=1$, από τον τύπο του φράγματος έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= a \sin\theta \\ \lambda_2 &= a \sin(\theta + \Delta\theta) = a\left[\sin\theta \cos\Delta\theta + \cos\theta \sin\Delta\theta\right] \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = a\left[\frac{\lambda_1}{a}\cos\Delta\theta + \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{a}\right)^2}\sin\Delta\theta\right] = \lambda_1 \cos\Delta\theta + \sqrt{a^2 - \lambda_1^2}\,\sin\Delta\theta$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1\cos\Delta\theta)^2 + (\lambda_1 \sin\Delta\theta)^2}{\sin^2(\Delta\theta)}} = \ldots 9{,}14 \times 10^{-4}\,mm$$

$$\rightarrow 1/9{,}14\times10^{-4} = 1{,}09\times10^{3}\ \text{χρ}/mm$$