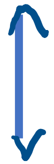
Ασκήσεις με λεπτούς φακούς

Σχηματισμός ειδώλων από οπτικό σύστημα – Πώς δουλεύουμε

- Μας δίνεται ένα οπτικό σύστημα που περιλαμβάνει συνήθως μία σειρά από φακούς ή/και κάτοπτρα
- Μας δίνεται συνήθως ένα εκτεταμένο (μικρό) ευθύγραμμο αντικείμενο συγκεκριμένου ύψους, που είναι τοποθετημένο σε συγκεκριμένη απόσταση από το πρώτο (συνήθως) οπτικό στοιχείο.
- Μας ζητείται (συνήθως) να βρούμε τη θέση και το μέγεθος του τελικού ειδώλου.
- Η επίλυση των προβλημάτων αυτών γίνεται με συνδυασμό
  - γραφικής επίλυσης, ακολουθώντας τη διαδρομή των ακτίνων και
  - χρήσης των νόμων δημιουργίας ειδώλων από ανάκλαση και διάθλαση που έχουμε συζητήσει.
- Αν το οπτικό μας σύστημα περιλαμβάνει περισσότερα από ένα στοιχεία, εργαζόμαστε ως εξής:
- Βρίσκουμε το είδωλο από το **πρώτο στοιχείο** που συναντούν οι οπτικές ακτίνες που φεύγουν από το δεδομένο αντικείμενο, ξεχνώντας όλα τα υπόλοιπα οπτικά στοιχεία.
- Το είδωλο αυτό αποτελεί το αντικείμενο για το επόμενο οπτικό στοιχείο. Βρίσκουμε λοιπόν πρώτα την απόστασή του από το δεύτερο οπτικό στοιχείο, και υπολογίζουμε τη θέση του νέου ειδώλου από το δεύτερο στοιχείο, ξεχνώντας όλα τα υπόλοιπα στοιχεία. Αν έχουμε μόνο δύο στοιχεία στο σύστημα, αυτό θα είναι και το τελικό είδωλο. Η μεγέθυνση του τελικού ειδώλου προκύπτει από το γινόμενο των επιμέρους μεγεθύνσεων. Αν υπάρχει και άλλο οπτικό στοιχείο, τότε το δεύτερο είδωλο αποτελεί αντικείμενο για το τρίτο οπτικό στοιχείο κ.ο.κ.

Οι βασικοί κανόνες γραφικής επίλυσης για λεπτούς φακούς

- Τοποθετούμε τα οπτικά στοιχεία και το αντικείμενο υπό περίπου σωστή κλίμακα κατά μήκος του οπτικό άξονα.
- Συνήθως συμβολίζουμε
  - τον συγκεντρωτικό (συγκλίνοντα) λεπτό φακό με 
  - τον αποκεντρωτικό (αποκλίνοντα) λεπτό φακό με 
- Τοποθετούμε υπό κλίμακα τις θέσεις των εστιών συμμετρικά εκατέρωθεν του κάθε (λεπτού) φακού
- Από το άκρο του αντικειμένου που είναι εκτός του οπτικού άξονα, παίρνω δύο ακτίνες:
  - Μία που περνάει από το κέντρο του φακού και βγαίνει χωρίς αλλαγή διεύθυνσης (βλ. εξήγηση στο παράρτημα)
  - Μία που είναι παράλληλη προς τον οπτικό άξονα και βγαίνοντας από τον φακό αλλάζει διεύθυνση έτσι ώστε να περνά από την εστία του φακού.
  - Εκεί που συναντώνται οι δύο ακτίνες (ή οι προεκτάσεις τους) είναι το είδωλο του άκρου του αντικειμένου. Φέρνω κάθετο προς τον οπτικό άξονα και σχηματίζω το είδωλο

Παράδειγμα σχηματισμού ειδώλου από συγκεντρωτικό φακό

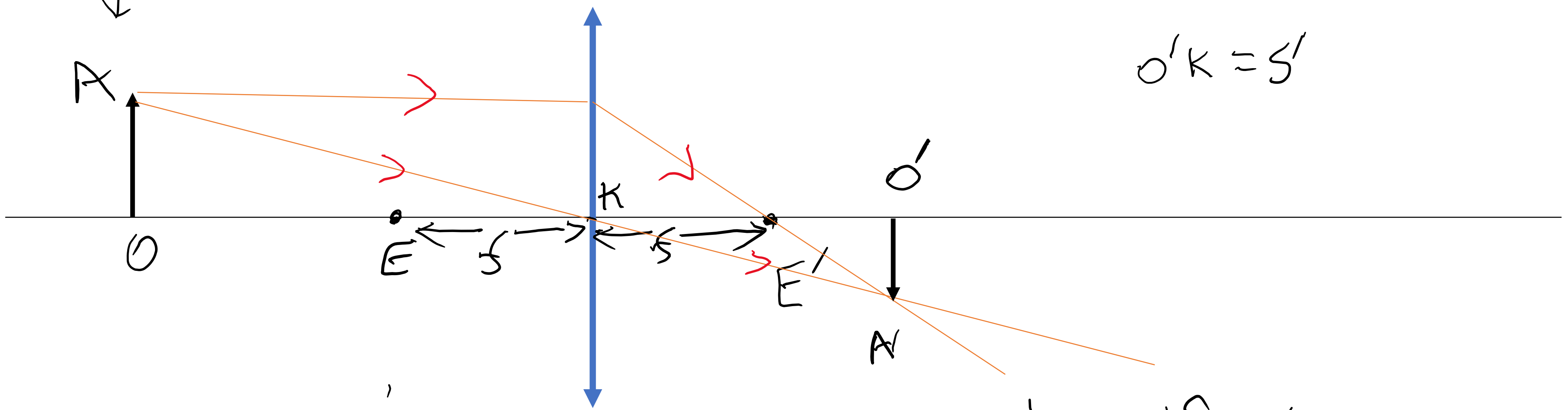
αντικείμενο

συγκλίνων φακός

f: εστιακή απόσταση

$OK = s$ $\qquad$ $OE = OE' = f > 0$

$O'K = s'$



οπτικός άξονας

Πραγματικά αντικείμενα

$s > 0$

(φανταστικά είδωλα

$s' < 0$)

πραγματικά είδωλα

$s' > 0$

(φανταστικά αντικείμενα

$s < 0$)

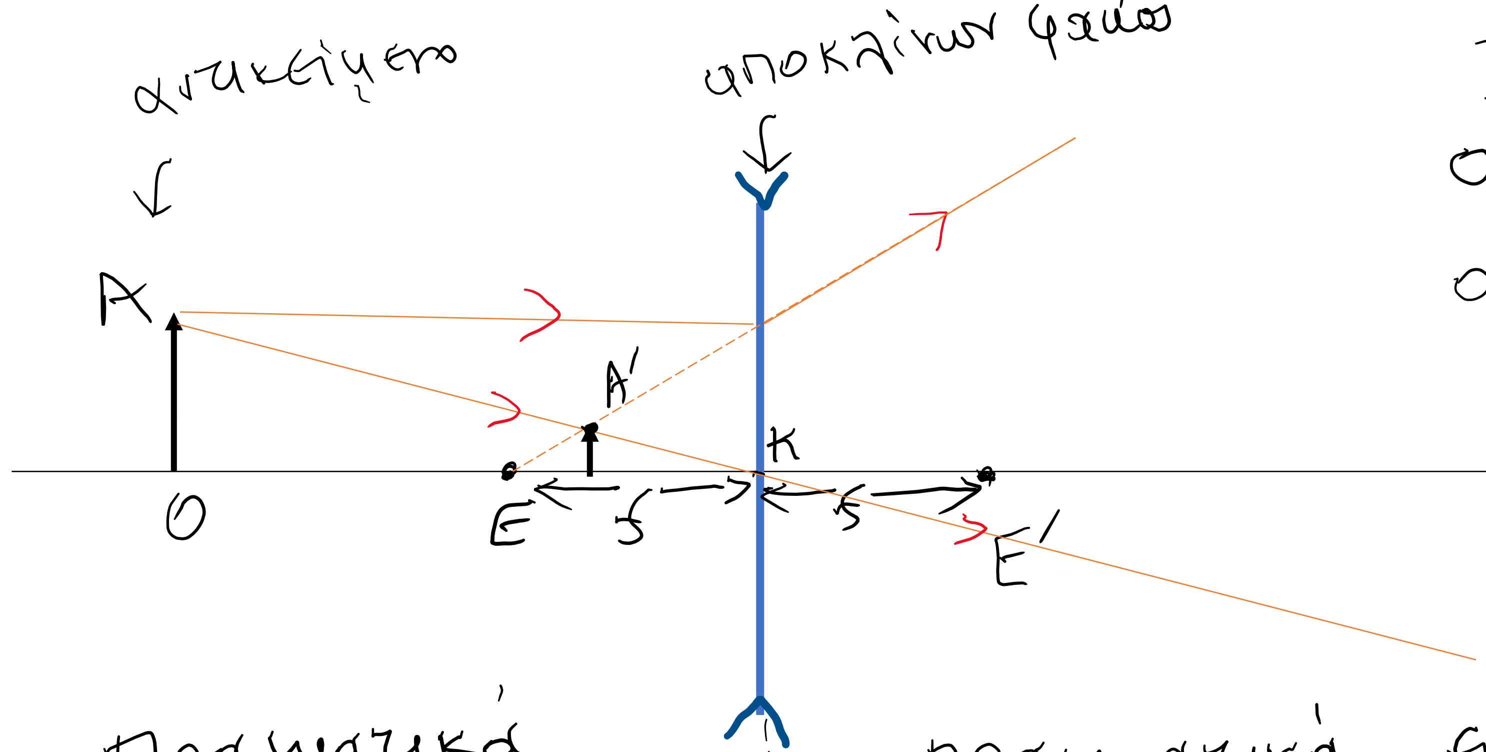
εδώ

$s > 0$

$s' > 0$

$f > 0$

Παράδειγμα σχηματισμού ειδώλου από αποκεντρωτικό φακό



οπτικός άξονας

f: εστιακή απόσταση

$OK = s$

$O'K = s'$

$OE = OE' = f < 0$

Πραγματικά αντικείμενα

$s > 0$

(φανταστικά είδωλα

$s' < 0$)

πραγματικά είδωλα

$s' > 0$

(φανταστικά αντικείμενα

$s < 0$)

Εδώ

$s > 0$

$s' < 0$

$f < 0$

Εφαρμογή τύπων

Τύπος των κατασκευαστών των φακών $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$

Μεγέθυνση $m=-\frac{s'}{s}$

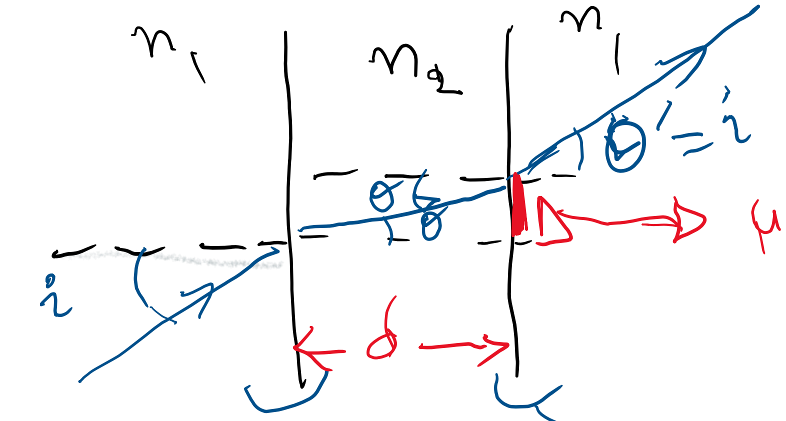
(το τελικό πρόσημο μας λέει αν το είδωλο είναι ορθό (+) η αντεστραμμένο (-)

Στο πρώτο παράδειγμα που είδαμε s και $f\ >0$, οπότε στον τύπο οι αντίστοιχες αποστάσεις μπαίνουν με θετικό πρόσημο. Όπως είδαμε το είδωλο στο παράδειγμα είναι πραγματικό, άρα το s’ πρέπει να βγει θετικό. Άρα η μεγέθυνση θα βγει αρνητική, άρα το είδωλο θα είναι αντεστραμμένο (όπως βρέθηκε και στο διάγραμμα)

Στο δεύτερο παράδειγμα που είδαμε $s>0$ και $f\ <0$, οπότε στον τύπο το s μπαίνει με θετικό πρόσημο και το f με αρνητικό πρόσημο. Όπως είδαμε το είδωλο στο παράδειγμα αυτό είναι φανταστικό, άρα το s’ πρέπει να βγει αρνητικό. Άρα η μεγέθυνση θα βγει θετική, άρα το είδωλο θα είναι ορθό (όπως βρέθηκε και στο διάγραμμα)

Παράρτημα

- Στα διαγράμματα ακτίνων χρησιμοποιήσαμε το ότι μία (παραξονική) ακτίνα που περνά από το κέντρο του φακού συνεχίζει τη διαδρομή της χωρίς αλλαγή διεύθυνσης.
- Θυμηθείτε ότι όταν έχουμε διάθλαση από μία ορθογώνια πλάκα, η δέσμη βγαίνει παράλληλη προς τη προσπίπτουσα αλλά μετατοπισμένη. Εδώ θεωρούμε ότι το μέσο του φακού μπορεί να θεωρηθεί σαν ορθογώνια πλάκα. Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι το πάχος του φακού είναι αμελητέο, τότε δεν υπάρχει μετατόπιση της αναδυόμενης δέσμης.



μετατόπιση $\Delta = d\sin\theta \rightarrow 0$ όταν $d \rightarrow 0$

$n_1 \sin i = n_2 \sin\theta$

$n_2 \sin\theta = n_1 \sin\theta' \Rightarrow \theta' = i$

προσπίπτουσα και αναδυόμενη από την πλάκα παράλληλες μεταξύ τους

Άσκηση 1

Ένας αμφίκυρτος φακός είναι κατασκευασμένος από γυαλί με δείκτη διάθλασης n=1.5. Η μία επιφάνεια έχει διπλάσια ακτίνα καμπυλότητας από την άλλη και η εστιακή απόσταση είναι 60mm. (α) ποια είναι η μικρή και ποια η μεγάλη ακτίνα καμπυλότητας. (β) Έστω μικρό αντικείμενο σε απόσταση 10mm μπροστά από τον φακό. Βρείτε τη θέση και τη μεγέθυνση του ειδώλου.

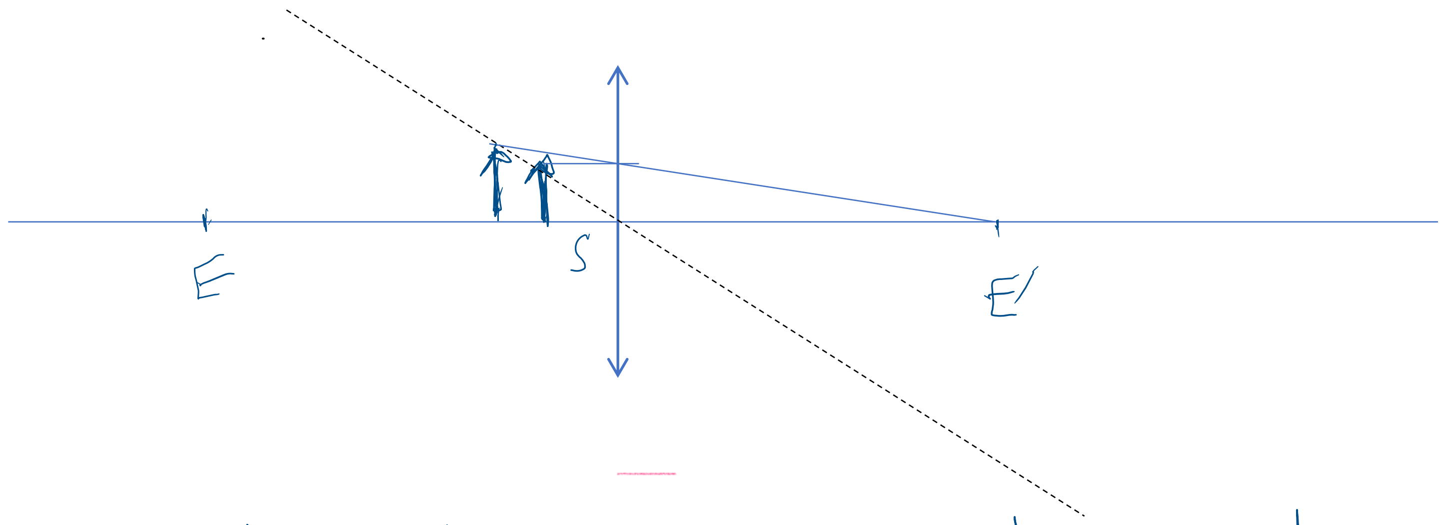
(α) $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{f} = (1,5-1)\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$

Αφού $f>0$ πρέπει $R_2 > R_1$, άρα $R_2 = 2R_1$

$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{2}\frac{R_1}{2R_1^2} = \frac{1}{4R_1} \Rightarrow f = 4R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{60mm}{4} = 15mm$

και $R_2 = 30mm$

(β)



$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{10mm}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{60mm} \Rightarrow s'=-\frac{60}{5}=-12mm$$

$s'<0 \Rightarrow$ μπροστά από τον φακό (στην ίδια πλευρά με το αντικείμενο)

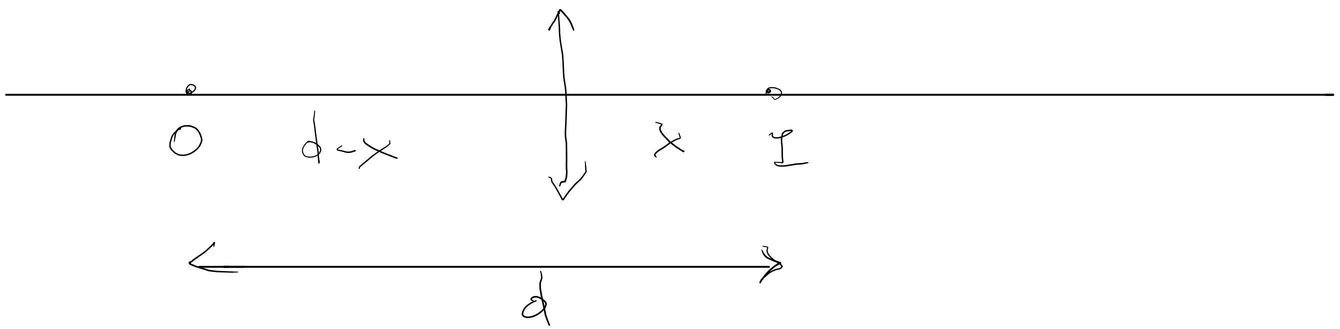
$$m=-\frac{s'}{s}=-\frac{-12}{10}=1.2 \rightarrow$$ ορθό και με μεγέθυνση ×1.2

Άσκηση 2

Δείξτε ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ ενός αντικειμένου και του ειδώλου του , που σχηματίζεται από λεπτό φακό, είναι 4f, όπου f η εστιακή απόσταση του φακού. Πότε συμβαίνει αυτό;

$s = d - x$

$s' = x$



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{\cancel{x} + d - \cancel{x}}{x(d-x)} = \frac{1}{f} \Rightarrow x^2 - xd + fd = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}{2}$$

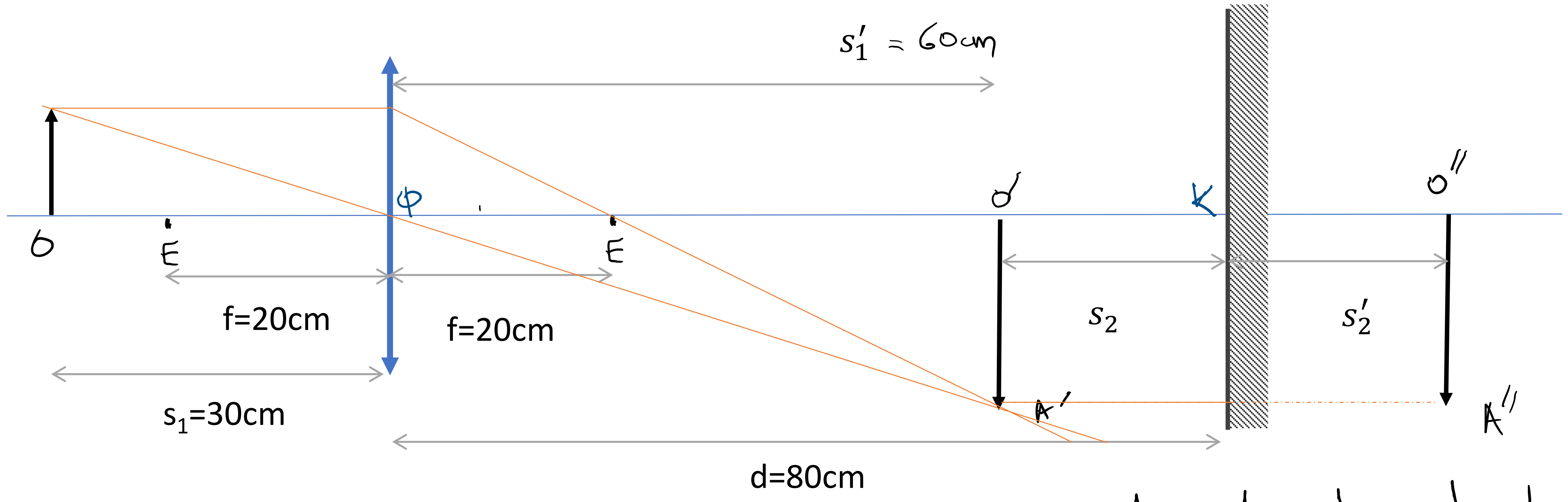
πραγματικό άρα $d^2 \geq 4fd \Rightarrow d \geq 4f$

$(d = 4f$ για $s' = s = \frac{d}{2} = 2f)$

Άσκηση 3 Ένας συγκλίνων φακός f=20cm απέχει d=80 cm από επίπεδο κάτοπτρο. Γραμμικό αντικείμενο AB=10cm βρίσκεται 30 cm έμπροσθεν του φακού. (α) Να βρεθεί η θέση και το ύψος του τελικού ειδώλου μετά από διάθλαση μέσω του φακού και ανάκλαση από το κάτοπτρο. (β) Να λυθεί η ίδια άσκηση για d=40 cm

<u>Λύση:</u>

(α) Φτιάχνω πρώτα το διάγραμμα ακτίνων



1ο βήμα: σχηματισμός ειδώλου από τον φακό $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow s_1' = \frac{f s_1}{s_1 - f} = \frac{(+20cm)(+30cm)}{(+30cm)-(+20cm)} = +60cm$ → πραγματικό είδωλο Ο'Α'

Μεγέθυνση Ο'Α' $m_1 = -\frac{s_1'}{s_1} = -\frac{60}{30} = -2$ → αντεστραμμένο ε/ διπλάσιο

2ο βήμα. Το είδωλο Ο'Α' αποτελεί το αντικείμενο για το 2ο οπτικό στοιχείο, δηλ. το επίπεδο κάτοπτρο. Η απόσταση του Ο΄Α΄ από το κάτοπτρο είναι $s_2 \ = 80cm - 60cm = 20cm$

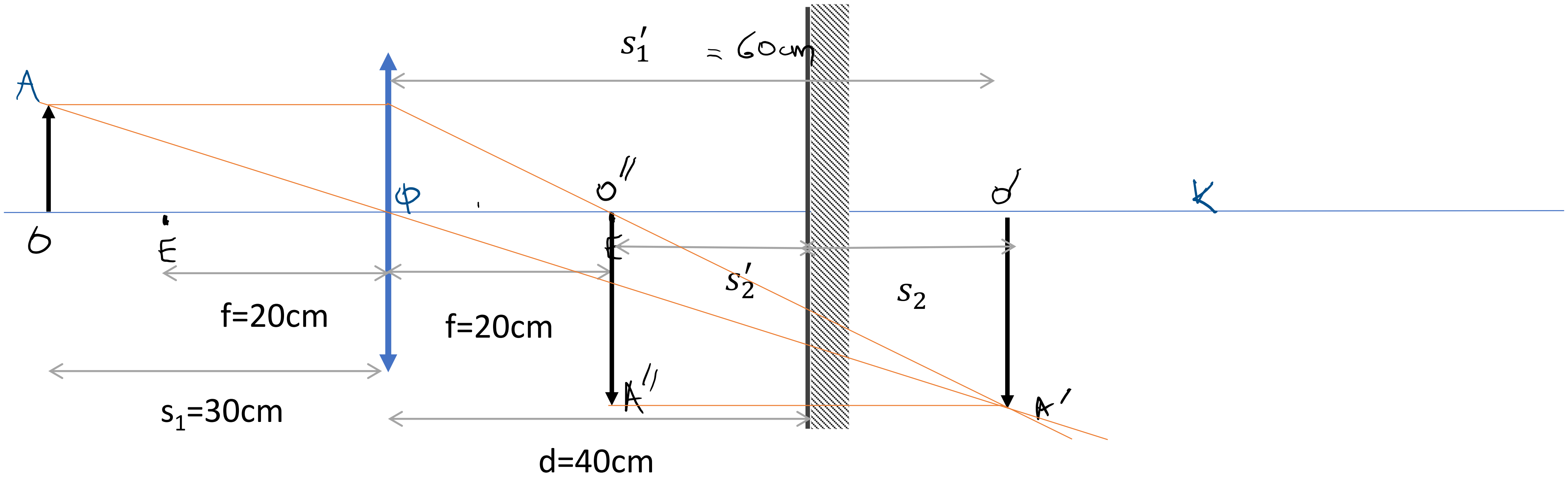
Από ανάκλαση, $s_2^{\prime\prime} = -20cm$ (ίση απόσταση και είδωλο φανταστικό, αφού είναι πίσω από το κάτοπτρο)

Η μεγέθυνση θα είναι $m_2 = -\frac{s_2^{\prime\prime}}{s_2} = -\frac{-20cm}{20cm} = 1$

και η συνολική μεγέθυνση θα είναι $m \quad = m_1\, m_2 = (-2)(+1) = -2$

Άρα το τελικό είδωλο είναι αντεστραμμένο, διπλάσιο από το αντικείμενο ((άρα έχει μέγεθος Ο''Α''=20cm)), φανταστικό και σε συνολική απόσταση ΟΦ+ΦΚ+ΚΟ''=$30cm + 80cm + 20cm = 130cm$ από το αντικείμενο.

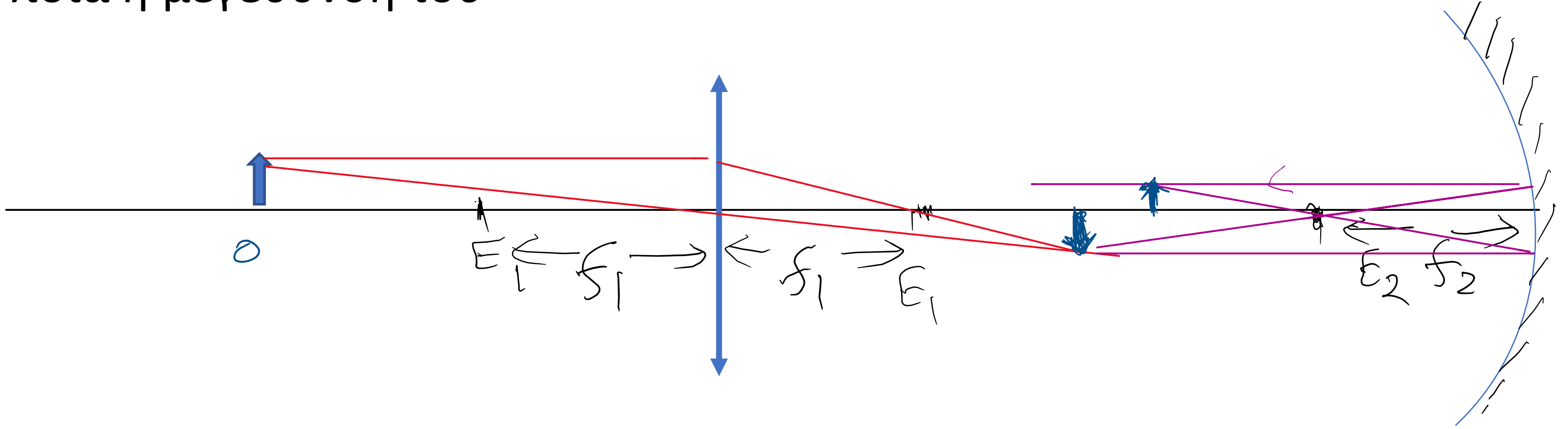
(β) Αυτό που αλλάζει είναι η θέση του κατόπτρου, με d=40cm. Το πρώτο βήμα είναι ακριβώς το ίδιο με προηγουμένως, οπότε το Ο'Α' είναι σε απόσταση 60cm από τον φακό. Όμως ο καθρέπτης είναι στα αριστερά αυτής της θέσης. Οπότε το αντικείμενο για το κάτοπτρο είναι στα δεξιά του, άρα είναι φανταστικό. Το είδωλο σχηματίζεται από την μπροστινή μεριά του κατόπτρου, άρα είναι πραγματικό, αντεστραμμένο, διπλάσιο από το αρχικό αντικείμενο (άρα έχει μέγεθος Ο''Α''=20cm) , σε απόσταση 20 cm από το κάτοπτρο και 50cm συνολικά από το ΟΑ.



Άσκηση 4

Ένας αμφίκυρτος φακός εστιακής απόστασης f_1 τοποθετείται σε απόσταση $2(f_1+f_2)$ από σφαιρικό κάτοπτρο εστιακής απόστασης f_2. Έστω μικρό αντικείμενο σε απόσταση $2f_1$ από μπροστά από τον φακό. Ποια είναι η θέση του ειδώλου και ποια η μεγέθυνσή του

$s_1 = 2f_1$



1ο βήμα: είδωλο I_1 του O από τον φακό:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{2f_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow s_1' = 2f_1 \quad , \; m_1 = -\frac{s_1'}{s_1} = -1$$

2ο βήμα: είδωλο I_2 του I_1 από το κάτοπτρο

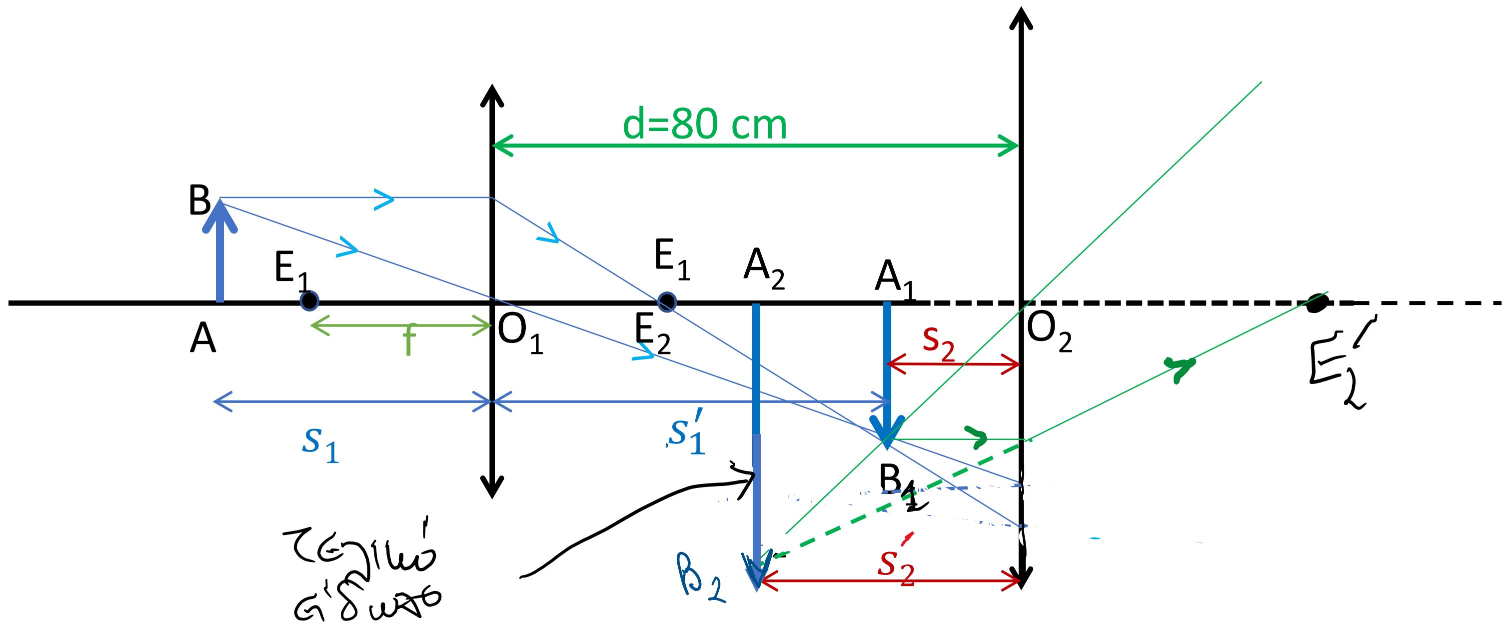
$$\underset{>0}{\frac{1}{s_2}} + \frac{1}{s_2'} = \underset{>0}{\frac{1}{f_2}} \Rightarrow \frac{1}{(\cancel{2f_1}+2f_2-\cancel{2f_1})} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow s_2' = 2f_2$$

$$m_2 = -\frac{s_2'}{s_2} = -1$$

$$m = m_1 m_2 = (-1)(-1) = 1$$

Άσκηση 5: Δύο συγκλίνοντες φακοί εστιακών αποστάσεων f_1=20cm & f_2=60cm, απέχουν μεταξύ τους απόσταση d=80cm. Αντικείμενο ΑΒ=10cm τοποθετείται σε απόσταση s_1=30cm έμπροσθεν του πρώτου φακού. Ζητείται το είδος, η θέση και το μέγεθος του τελικού ειδώλου.

Λύση:



1ος Φακός: $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{+30\text{cm}}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{+20\text{cm}} \Rightarrow s_1'=60\text{cm}$ και $m_1=-\frac{s_1'}{s_1}=-\frac{60cm}{30cm}=-2$

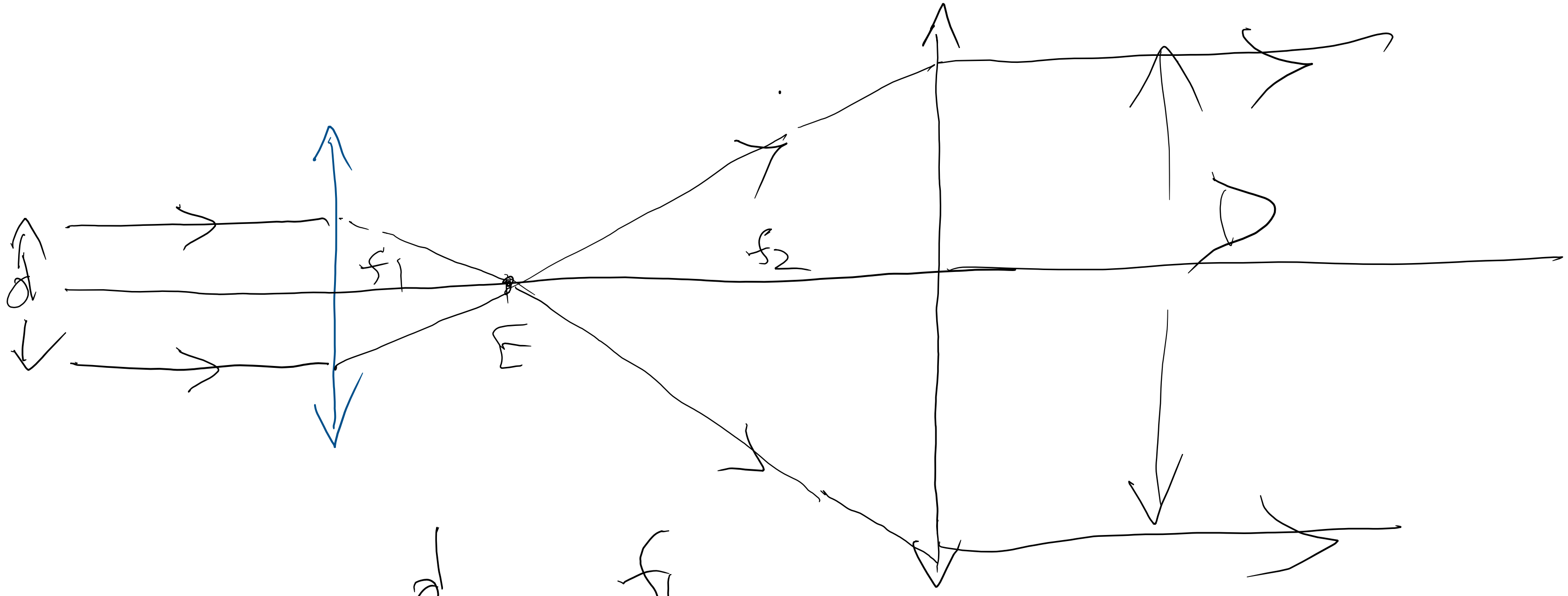
2ος Φακός: $s_2=d-s_1'=80\text{cm}-60\text{cm}=+20\text{cm}$

$\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{+20\text{cm}}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{+60\text{cm}} \Rightarrow s_2'=-30\text{cm}$ και $m_2=-\frac{s_2'}{s_2}=-\frac{-30cm}{+20cm}=\frac{3}{2}$ και m= $m_1\,m_2=(-2)\left(\frac{3}{2}\right)=-3$

Άρα το είδωλο είναι αντεστραμμένο και 3 φορές μεγαλύτερο, άρα έχει μήκος 30cm και βρίσκεται ανάμεσα στους δυο φακούς.

Άσκηση 6

- Μεγεθυντής δέσμης



$$\frac{d}{D} = \frac{f_1}{f_2}$$

Άσκηση: Είδωλο κοίλου κατόπτρου.

Υποθέστε ότι ένα κοίλο σφαιρικό κάτοπτρο έχει $f = 10$ cm. Βρείτε την θέση του ειδώλου όταν (α) $p = 25$ cm, (β) $p = 10$ cm κ' (γ) $p = 5$ cm. Περιγράψτε το είδωλο που σχηματίζεται σε κάθε περίπτωση.

Λύση

(α)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{25\,cm} + \frac{1}{q} = \frac{1}{10\,cm} \Rightarrow q = 16.7\,cm$$

$$M = -\frac{q}{p} = \frac{16.7}{25} = -0.68$$ Αντεστραμμένο Πραγματικό

(β) όταν $p = 10$ cm βρίσκεται πάνω στην κ.Ε.

$$\frac{1}{10\,cm} + \frac{1}{q} = \frac{1}{10\,cm} \Rightarrow q = \infty$$

(γ)

$$\frac{1}{5\,cm} + \frac{1}{q} = \frac{1}{10\,cm} \Rightarrow q = -10\,cm$$ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-10}{5}\right) = 2$$ ΟΡΘΟ.

Είδωλο κυρτού κατόπτρου

Αντικείμενο ύψους 3 cm απέχει 20 cm από κυρτό κάτοπτρο με $f = 8$ cm. Υπολογίστε (α) τη θέση του ειδώλου κ' (β) την μεγέθυνση που προκαλεί το κάτοπτρο.

Λύση

(α) Αφού το κάτοπτρο είναι κυρτό η f είναι αρνητική.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = -\frac{1}{8\,cm}$$

$$\frac{1}{q} = -\frac{1}{8\,cm} - \frac{1}{20\,cm} \Rightarrow q = -5.71\,cm.$$

Είδωλο ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ.

(β) $$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-5.71\,cm}{20\,cm}\right) = 0.286$$

Είδωλο ΟΡΘΙΟ.