



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ

# **Μέτρηση καμπυλότητας σφαιρικών και τοροειδών επιφανειών με οπτικές και μηχανικές μεθόδους**

**Εργαστηριακή άσκηση  
στο πλαίσιο του μαθήματος  
Οπτική και Εφαρμογές**

**Κ. Γαζέας - Δ. Παπαθανάσογλου**

**Αθήνα, Μάιος 2014**



## Σκοπός της άσκησης

Σκοπός της εργαστηριακής άσκησης είναι η γνωριμία με τις οπτικές και μηχανικές μεθόδους μέτρησης της καμπυλότητας σφαιρικών και τοροειδών επιφανειών.

Η μέτρηση της ακτίνας καμπυλότητας των επιφανειών όπως και ο δείκτης διάθλασης των διοπτρικών υλικών είναι απαραίτητα στοιχεία για τον οπτικό σχεδιασμό, αλλά και γενικότερα για τις οπτικές εφαρμογές. Μέσω της ακτίνας καμπυλότητας των διοπτρικών επιφανειών μπορεί να υπολογιστεί έμμεσα η εστιακή απόσταση και η οπτική (διαθλαστική) ισχύς των φακών. Όπως συμβαίνει και στις εστιακές αποστάσεις των φακών, το εύρος των ακτινών καμπυλότητας είναι μεγάλο, από χιλιοστά του μέτρου (σε αντικειμενικούς μικροσκοπίου) μέχρι και μερικές δεκάδες μέτρα (σε μεγάλα τηλεσκόπια). Η μέτρηση της ακτίνας καμπυλότητας γίνεται με διάφορες μεθόδους, ανάλογα την περίπτωση. Όλες όμως χρησιμοποιούν τη βασική εξίσωση των φακών.

Η άσκηση περιλαμβάνει:

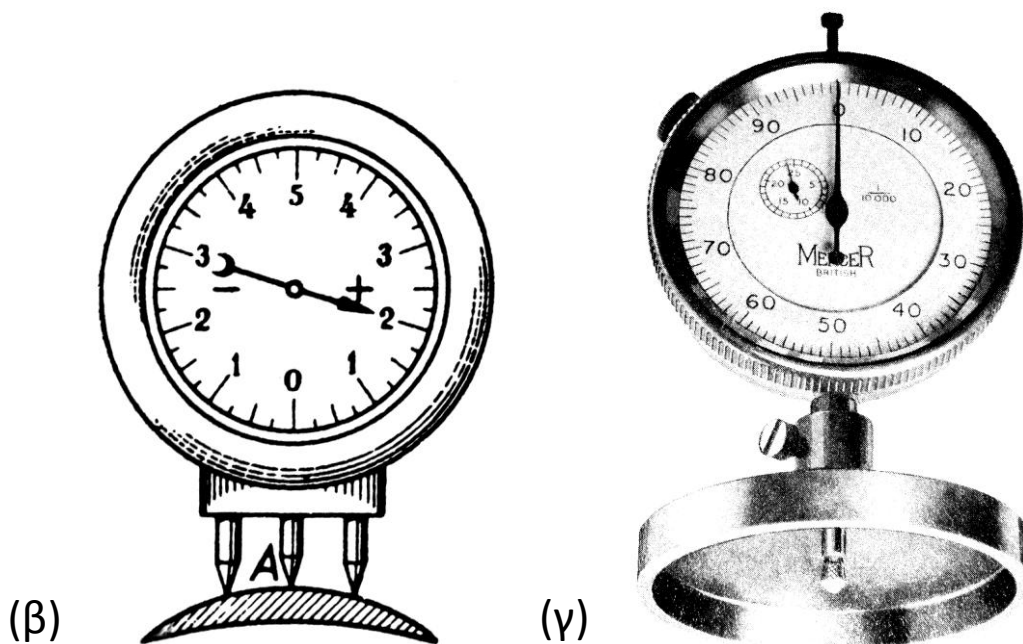
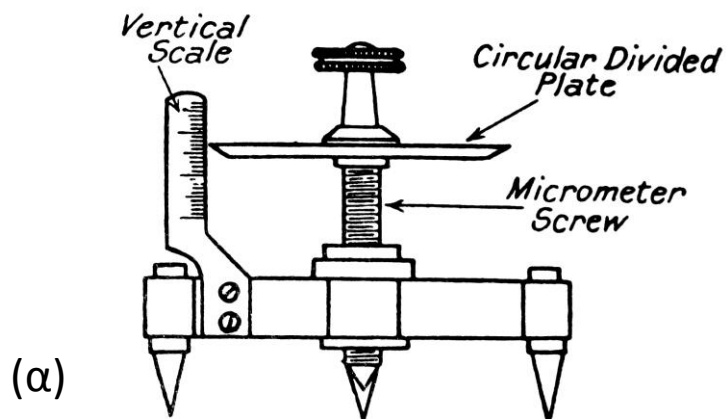
- 1) Πραγματοποίηση πειραμάτων για τη μέτρηση της καμπυλότητας σφαιρικών και τοροειδών επιφανειών με μηχανικές μεθόδους
- 2) Πραγματοποίηση πειραμάτων στην οπτική τροχιά για τη μέτρηση της καμπυλότητας σφαιρικών και επιφανειών με οπτικές μεθόδους, με σκοπό την πειραματική επαλήθευση της θεωρίας του Gauss και της εξίσωσης κατασκευαστών των φακών

## Μέτρηση ακτίνας καμπυλότητας με οπτικές και μηχανικές μεθόδους

### 1) Μηχανικές Μέθοδοι

Η μέτρηση της καμπυλότητας μιας επιφάνειας με μηχανικές μεθόδους γίνεται με τη χρήση ειδικών οργάνων, τα οποία ονομάζονται σφαιρόμετρα. Αυτά τα όργανα είναι κατασκευασμένα έτσι ώστε να μετρούν της αποκλίσεις μιας επιφάνειας από το τέλειο επίπεδο, δηλαδή μετρούν την κυρτότητά τους. Υπάρχουν τριών ειδών σφαιρόμετρα για τη μέτρηση της καμπυλότητας κοίλων και κυρτών επιφανειών (Εικόνα 1). Αυτά είναι:

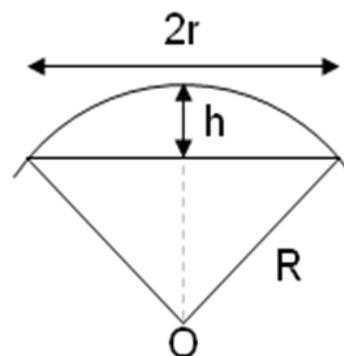
- 1) Σφαιρόμετρο τριών ακίδων. Τα σφαιρόμετρα αυτά είναι πολύ δύσκολα στην κατασκευή αλλά δίνουν πολύ ακριβή αποτελέσματα. Εφαρμόζονται σε σφαιρικούς φακούς, δηλαδή δεν μπορούν να δουλέψουν σε φακούς που είναι αστιγματικοί.
- 2) Σφαιρόμετρο δύο ακίδων (σφαιρόμετρο οπτικών). Τα σφαιρόμετρα αυτά χρησιμοποιούνται από τους οπτικούς για μια εύκολη και άμεση μέτρηση της καμπυλότητας των φακών. Δεν έχουν μεγάλη ακρίβεια στη μέτρηση, αλλά μπορούν να μετρήσουν αστιγματικούς φακούς, λαμβάνοντας δύο μετρήσεις με διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους. Τα σφαιρόμετρα αυτά συνήθως δίνουν την ισχύ των διόπτρων σε διοπτρίες, καθώς εφαρμόζονται παραδοσιακά σε γυάλινους φακούς (crown glass) με δείκτη διάθλασης  $n' = 1.523$ .
- 3) Σφαιρόμετρο τυμπάνου. Τα σφαιρόμετρα αυτά είναι εύκολα στην κατασκευή και τη χρήση και δίνουν καλή ακρίβεια στις μετρήσεις. Εφαρμόζονται σε σφαιρικούς φακούς και στις μετρήσεις υπεισέρχονται δύο σταθερές του οργάνου για τις κοίλες και τις κυρτές επιφάνειες.



**Εικόνα 1.** Τα βασικά είδη σφαιρομέτρων. α) σφαιρόμετρο τριών ακίδων β) σφαιρόμετρο δύο ακίδων (σφαιρόμετρο οπτικών) γ) σφαιρόμετρο τυμπάνου

Τα σφαιρόμετρα τυμπάνου βασίζουν τη μέτρησή τους στο γεγονός ότι η καμπύλη (κυρτή ή κοίλη) επιφάνεια των φακών και των κατόπτρων είναι τμήμα σφαίρας. Έτσι, με βάση την Εικόνα 2 ο υπολογισμός της ακτίνας καμπυλότητας  $R$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h} \quad (1)$$



**Εικόνα 2.** Η γεωμετρική αναπαράσταση ενός δίοπτρου με ακτίνα καμπυλότητας  $R$  και η μέτρηση της καμπυλότητάς του.

### Τοροειδείς επιφάνειες

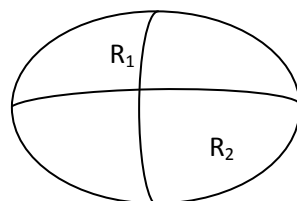
Τοροειδής είναι η επιφάνεια που δημιουργείται από τη σύνθεση δύο σφαιρικών επιφανειών. η καμπυλότητα δηλαδή της επιφάνειας αυτής δεν είναι η ίδια σε κάθε διεύθυνση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τοροειδούς επιφάνειας είναι η σαμπρέλα. Ο κύλινδρος είναι μια εκφυλισμένη περίπτωση τοροειδούς επιφάνειας, στην οποία η μία διεύθυνση έχει άπειρη ακτίνα καμπυλότητας (η γενέτειρα του κυλίνδρου), ενώ η άλλη έχει ακτίνα ίση με την ακτίνα της κυκλικής διατομής του.

Οι αστιγματικοί φακοί (στην οφθαλμολογία και όχι μόνο) χαρακτηρίζονται από τέτοιου είδους επιφάνειες. Για τη μέτρηση της καμπυλότητας των αστιγματικών (τοροειδών) επιφανειών πρέπει να γίνουν δύο μετρήσεις, σε δύο διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους. Οι μετρήσεις αυτές δεν μπορούν να γίνουν με το σφαιρόμετρο των τριών ακίδων ή το σφαιρόμετρο τυμπάνου, διότι αυτά τα όργανα είναι κατασκευασμένα για τη μέτρηση αξονικά συμμετρικών επιφανειών. Οι μέτρηση της καμπυλότητας των τοροειδών επιφανειών γίνεται με τα σφαιρόμετρα των δύο ακίδων.

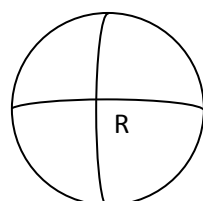
Για τους αστιγματικούς φακούς των οφθαλμών, οι οπτικοί συνήθως καταφεύγουν στη μέτρηση των ακτινών καμπυλότητας και την εφαρμογή του τύπου των κατασκευαστών των φακών. Για τη μέτρηση χρησιμοποιείται το σφαιρόμετρο των οπτικών (δύο ακίδων), το οποίο τοποθετείται στις δύο επιφάνειες του φακού και δίνει απευθείας την τιμή του λόγου  $(n-1)/R$  σε διοπτρίες. Βασική προϋπόθεση είναι ο δείκτης διάθλασης του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένος ο φακός να είναι αυτός για τον οποίο έχει κατασκευαστεί το συγκεκριμένο σφαιρόμετρο.

Το σφαιρόμετρο των οπτικών έχει δύο σταθερές ακίδες και μια κινητή στο μέσο. Όταν το σφαιρόμετρο τοποθετηθεί επάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια με τις δύο σταθερές ακίδες, η κινητή ακίδα μετακινείται αναλόγως του  $1/R$  και κινεί το δείκτη του τυμπάνου, ο οποίος παρέχει την τιμή της ισχύος της επιφάνειας του φακού σε διοπτρίες. Το αλγεβρικό άθροισμα των δύο ισχύων θα δώσει τη συνολική ισχύ του φακού και έμμεσα την εστιακή τους απόσταση.

Η ισχύς μιας αστιγματικής επιφάνειας ( $P_C$ ) ορίζεται σαν η διαφορά των ισχύων στους δύο άξονες του τοροειδούς. Οι αστιγματικοί φακοί έχουν συνήθως τη μία τους επιφάνεια σφαιρική και την άλλη τοροειδή (Εικόνα 3). Η ισχύς της τοροειδούς επιφάνειας συμβολίζεται με δείκτη το γράμμα C (cylinder) και της σφαιρικής με δείκτη το γράμμα S (sphere). Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε αστιγματικούς φακούς με ισχύ  $C=-1$  dpt και μυωπικούς (αξονικά συμμετρικούς) φακούς με ισχύ  $S=-3$  dpt.



Τοροειδής επιφάνεια:  $P_C = P_{R1} - P_{R2}$

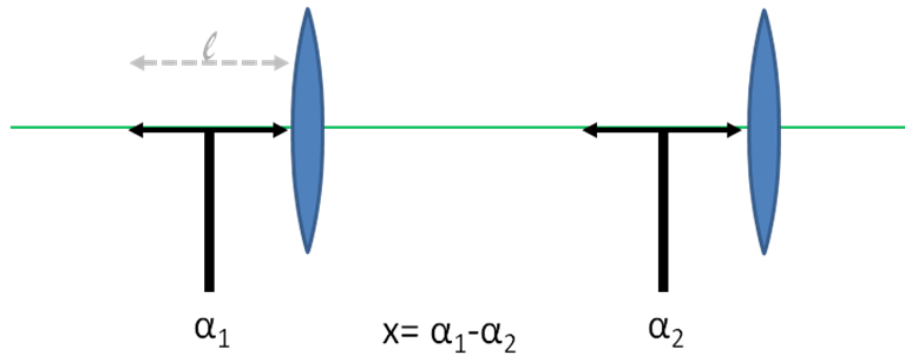


Σφαιρική επιφάνεια:  $P_S = P_R$

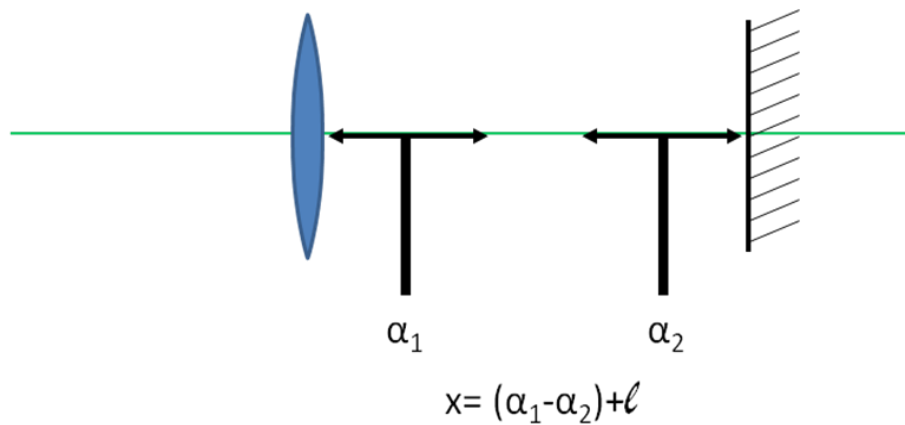
**Εικόνα 3.** Η μία επιφάνεια των αστιγματικών φακών είναι σφαιρική και η άλλη τοροειδής.

## Συνήθεις μέθοδοι μέτρησης αποστάσεων στην οπτική τροχιά

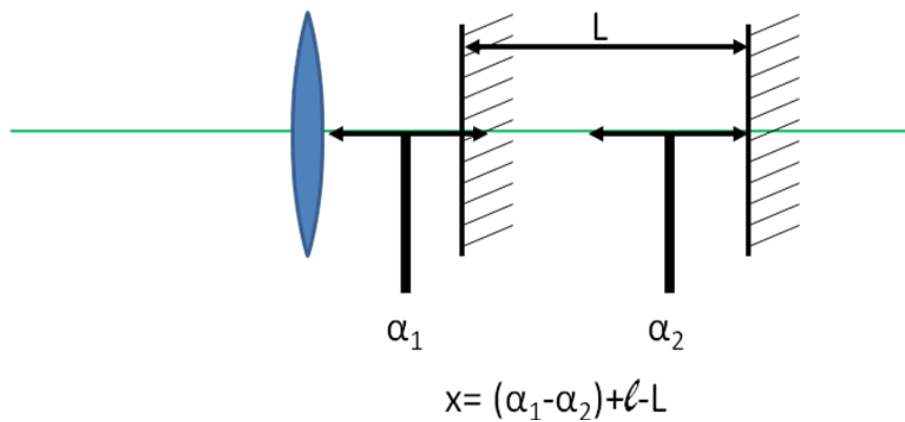
Εάν ένα στοιχείο μετακινείται επάνω στην οπτική τράπεζα (γενική περίπτωση)



Εάν η μέτρηση της απόστασης είναι μεγαλύτερη από τη μετρητική ράβδο μήκους  $\ell$



Εάν η μέτρηση της απόστασης είναι μικρότερη από τη μετρητική ράβδο μήκους  $\ell$  (μετατόπιση του ενός οπτικού στοιχείου κατά μια γνωστή απόσταση  $L$ )



**Εικόνα 4.** Μέθοδοι μέτρησης αποστάσεων και μετακινήσεων επάνω στην οπτική τροχιά.

Το μήκος της μετρητικής ράβδου είναι  $\ell$ .

## **2) Οπτικές Μέθοδοι**

Για να μετρηθεί η ακτίνα καμπυλότητας μιας επιφάνειας με οπτικές μεθόδους είναι χρήσιμο οι επιφάνεια να είναι ανακλαστική. Στα κάτοπτρα οι επιφάνειες είναι ανακλαστικές εξ ορισμού, οπότε η συνθήκη αυτή ικανοποιείται. Ανάλογα εάν η επιφάνεια είναι κοίλη ή κυρτή, οι μέθοδοι μέτρησης είναι δύο και παρουσιάζονται στις επόμενες σελίδες.

Αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι το γεγονός ότι το είδωλο στο κέντρο καμπυλότητας των κατόπτρων έχει μεγέθυνση  $M=1$  και ότι είναι καλής ποιότητας, διότι δεν υπάρχουν τα σφάλματα της κόμης και του αστιγματισμού (σφάλματα των πλαγίων ακτινών) ούτε το χρωματικό, παρά μόνον το σφάλμα της σφαιρικότητας, εάν η επιφάνεια δεν είναι τελείως σφαιρική.

Οι μετρήσεις των αποστάσεων και των μετακινήσεων των οπτικών στοιχείων επάνω στην οπτική τροχιά γίνονται με τη χρήση της μετρητικής ράβδου (γνωστού μήκους), όπως φαίνεται στην Εικ. 4.

## **Μέθοδοι μέτρησης ακτίνας καμπυλότητας φακών και κατόπτρων**

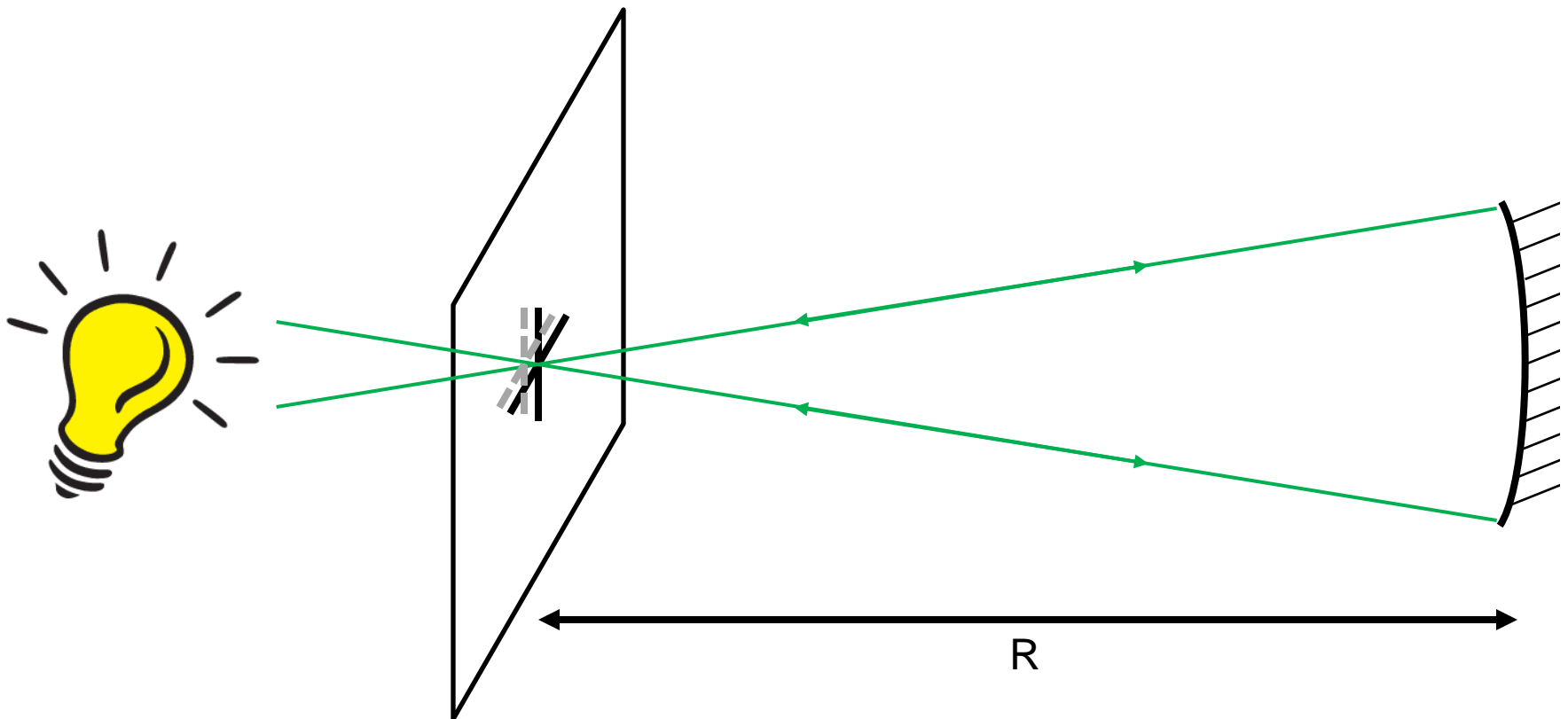
1. Μέτρηση ακτίνας καμπυλότητας κοίλου κατόπτρου ή διόπτρου (οπτική μέθοδος)
2. Μέτρηση ακτίνας καμπυλότητας κυρτού κατόπτρου ή διόπτρου (οπτική μέθοδος)
3. Μέτρηση ακτίνας καμπυλότητας κοίλου κατόπτρου ή διόπτρου (σφαιρόμετρο τυμπάνου - μηχανική μέθοδος)
4. Μέτρηση ακτίνας καμπυλότητας κυρτού κατόπτρου ή διόπτρου (σφαιρόμετρο τυμπάνου - μηχανική μέθοδος)

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

Κ. Αλεξόπουλου, Οπτική: Κεφάλαιο 1.

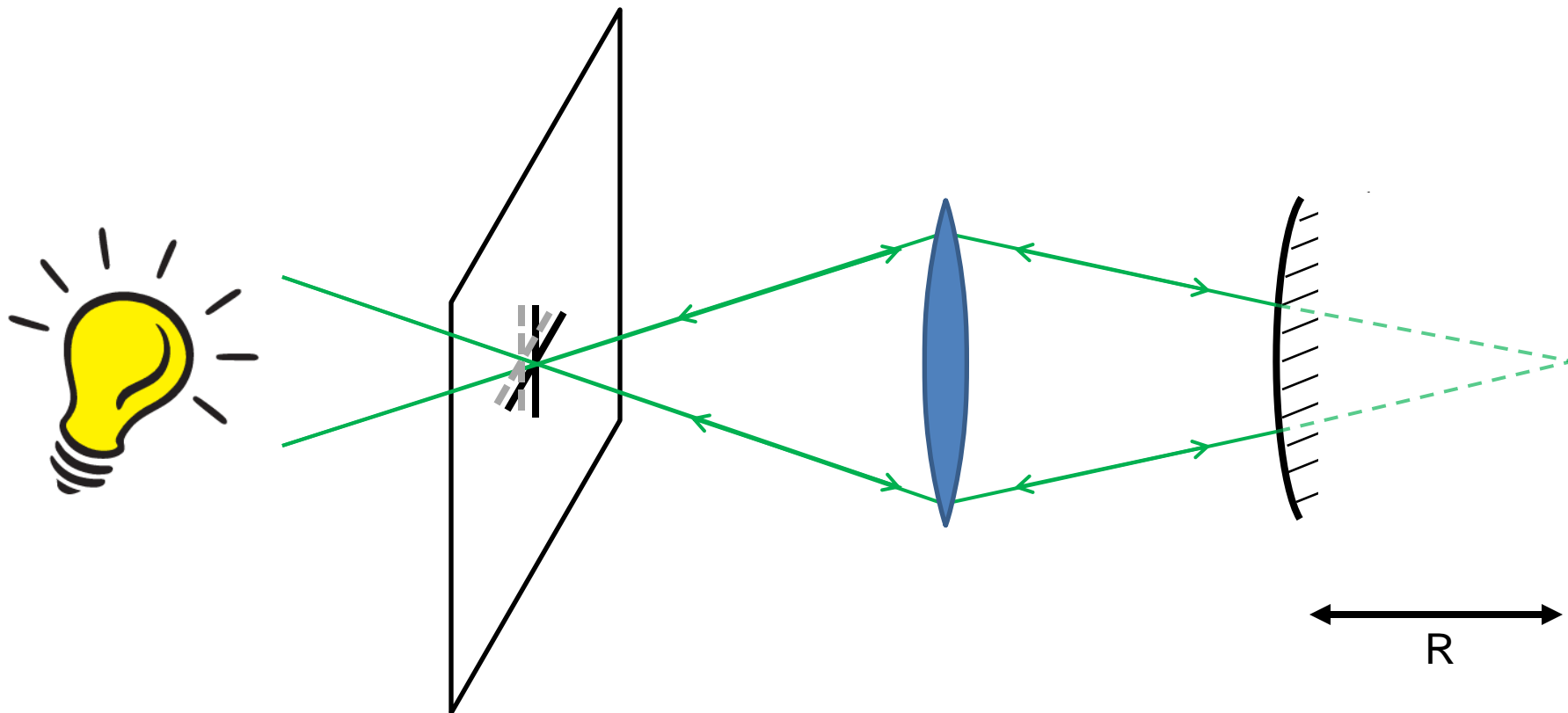
Δ. Παπαθανάσογλου, Εφαρμοσμένη Οπτική: Κεφάλαια 3 και 4.

Μέτρηση ακτίνας καμπυλότητας κοίλου κατόπτρου ή διόπτρου  
(οπτική μέθοδος)

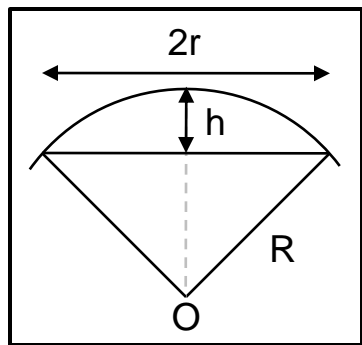




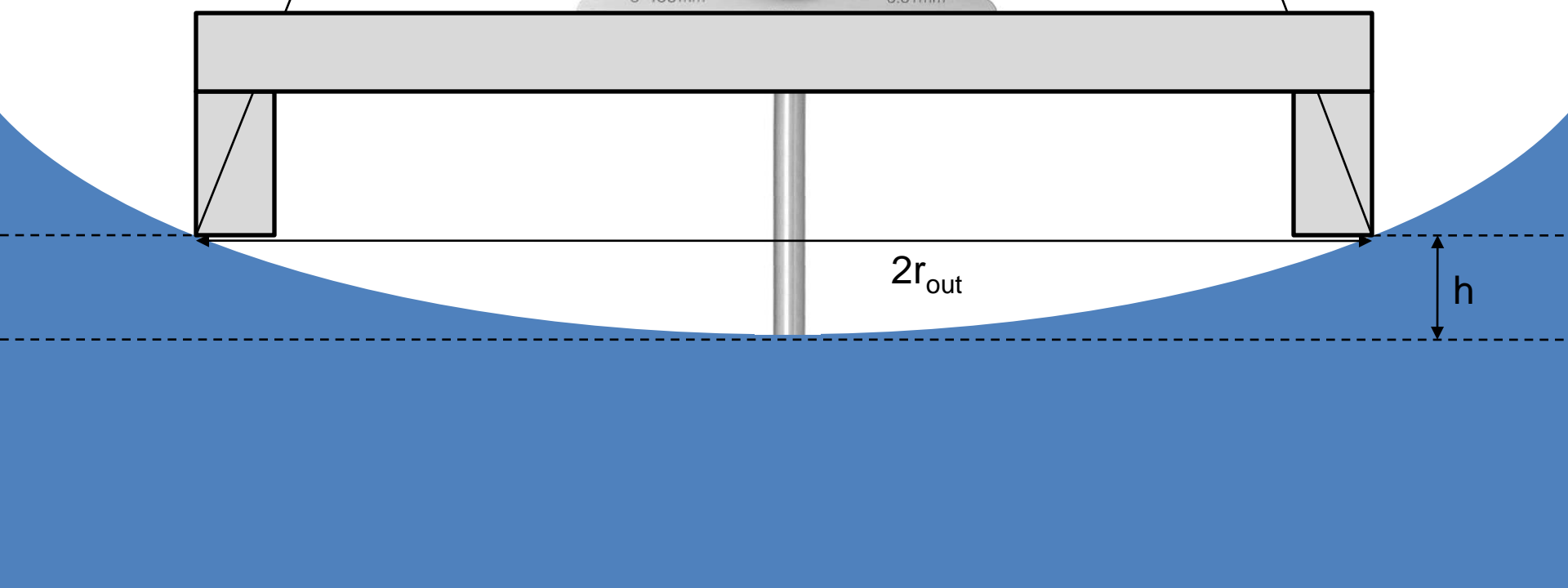
Μέτρηση ακτίνας καμπυλότητας κυρτού κατόπτρου ή διόπτρου  
(οπτική μέθοδος)



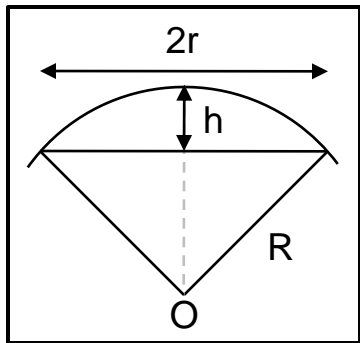
Μέτρηση ακτίνας καμπυλότητας κοίλου κατόπτρου ή διόπτρου  
(σφαιρόμετρο τυμπάνου - μηχανική μέθοδος)



$$R = \frac{r_{out}^2 + h^2}{2h}$$



Μέτρηση ακτίνας καμπυλότητας κυρτού κατόπτρου ή διόπτρου  
(σφαιρόμετρο τυμπάνου - μηχανική μέθοδος)



$$R = \frac{r_{in}^2 + h^2}{2h}$$

