

Εφαρμοσμένη Οπτική

Κεφάλαιο 2

Χρήση πινάκων στην παραξονική οπτική
Χρήσιμα διαγράμματα-σχήματα
(συμπληρωματικά των σημειώσεων)

Κύρια σημεία του μαθήματος

- ❖ Παχύς φακός
- ❖ Χαρακτηριστικά σημεία – χαρακτηριστικά επίπεδα
- ❖ Η μέθοδος των πινάκων
- ❖ Πίνακας μετάθεσης
- ❖ Πίνακας διάθλασης από σφαιρική επιφάνεια
- ❖ Πίνακας ανάκλασης από σφαιρική επιφάνεια
- ❖ Πίνακες παχέων και λεπτών φακών
- ❖ Πίνακας οπτικού συστήματος
- ❖ Φυσική σημασία των στοιχείων του πίνακα οπτικού συστήματος

Χαρακτηριστικά σημεία και χαρακτηριστικά επίπεδα παχέος φακού (και οποιουδήποτε οπτικού συστήματος)

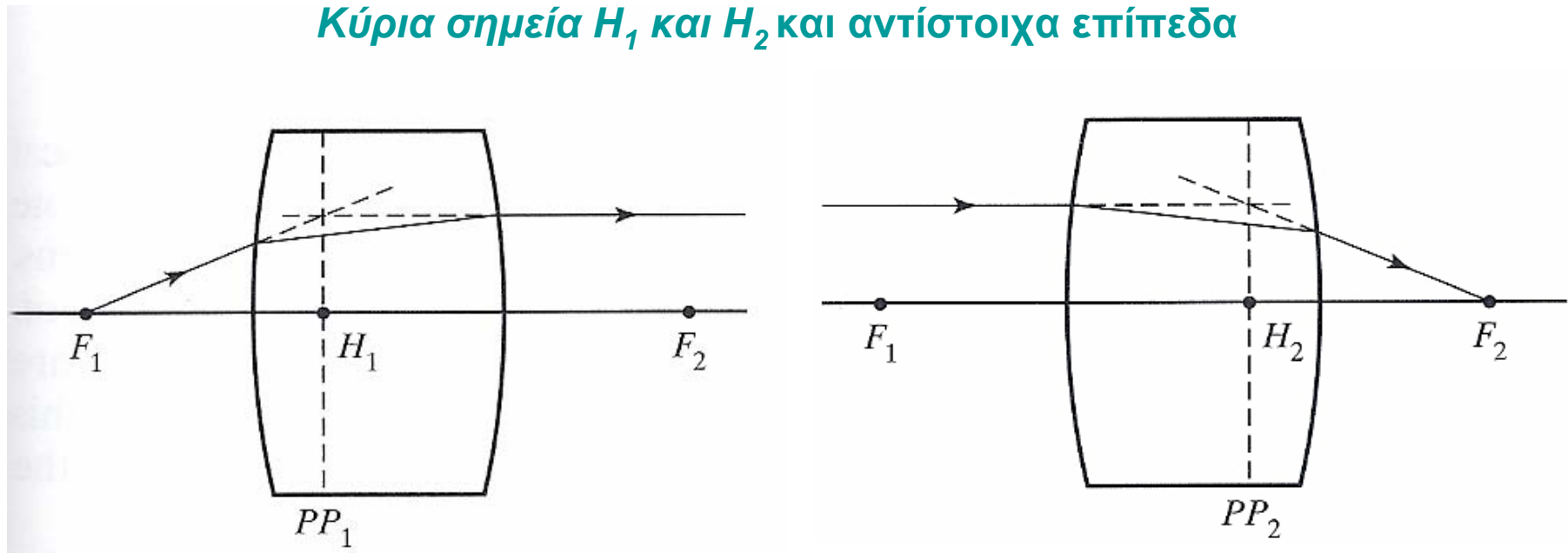
Κάθε οπτικό σύστημα έχει έξι χαρακτηριστικά σημεία και αντιστοίχως έξι χαρακτηριστικά επίπεδα (κάθετα στον οπτικό άξονα, στα χαρακτηριστικά σημεία):

Εστίες F_1 , F_2 (focal points)

Κύρια σημεία H_1 , H_2 (principal points)

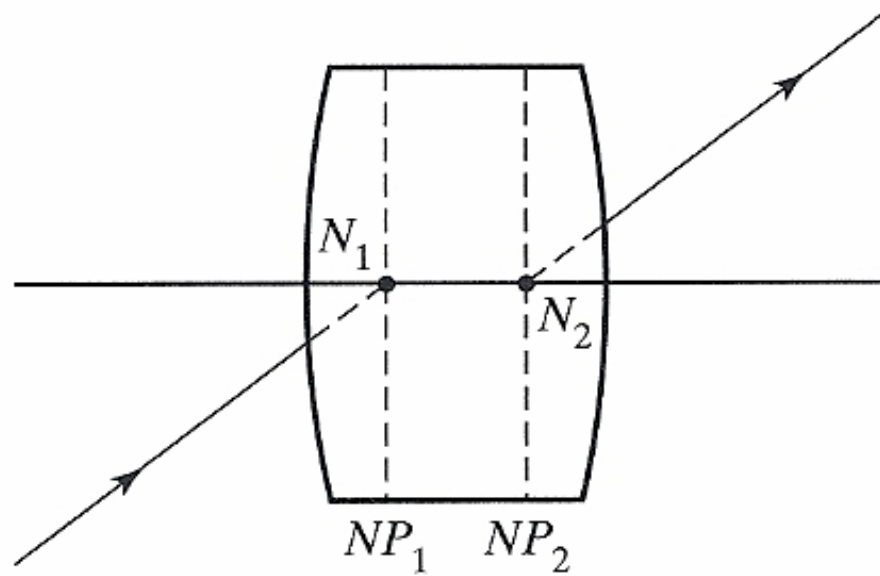
Δεσμικά σημεία N_1 , N_2 (nodal points)

Κύρια σημεία H_1 και H_2 και αντίστοιχα επίπεδα



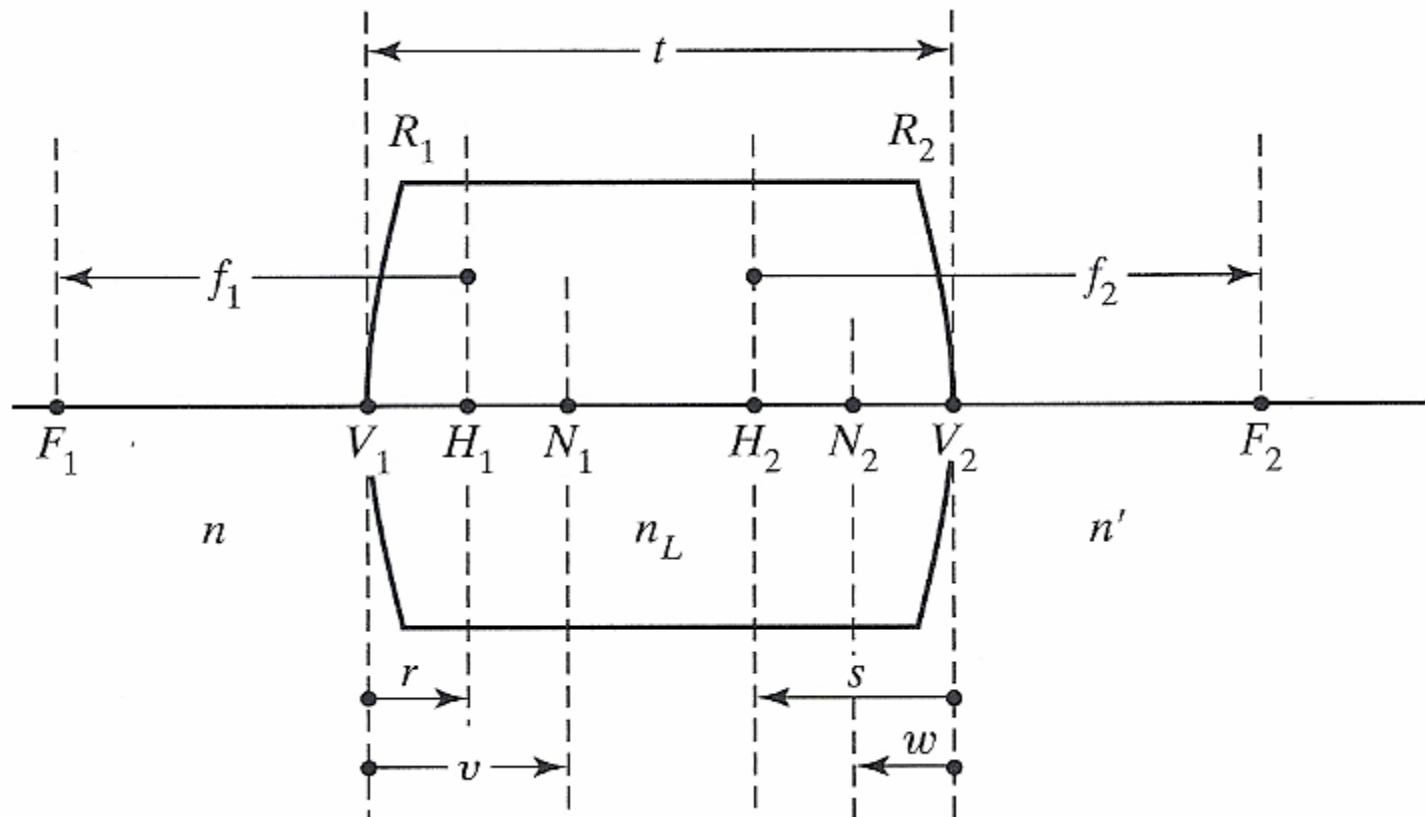
Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Δεσμικά σημεία N_1 και N_2 και αντίστοιχα επίπεδα

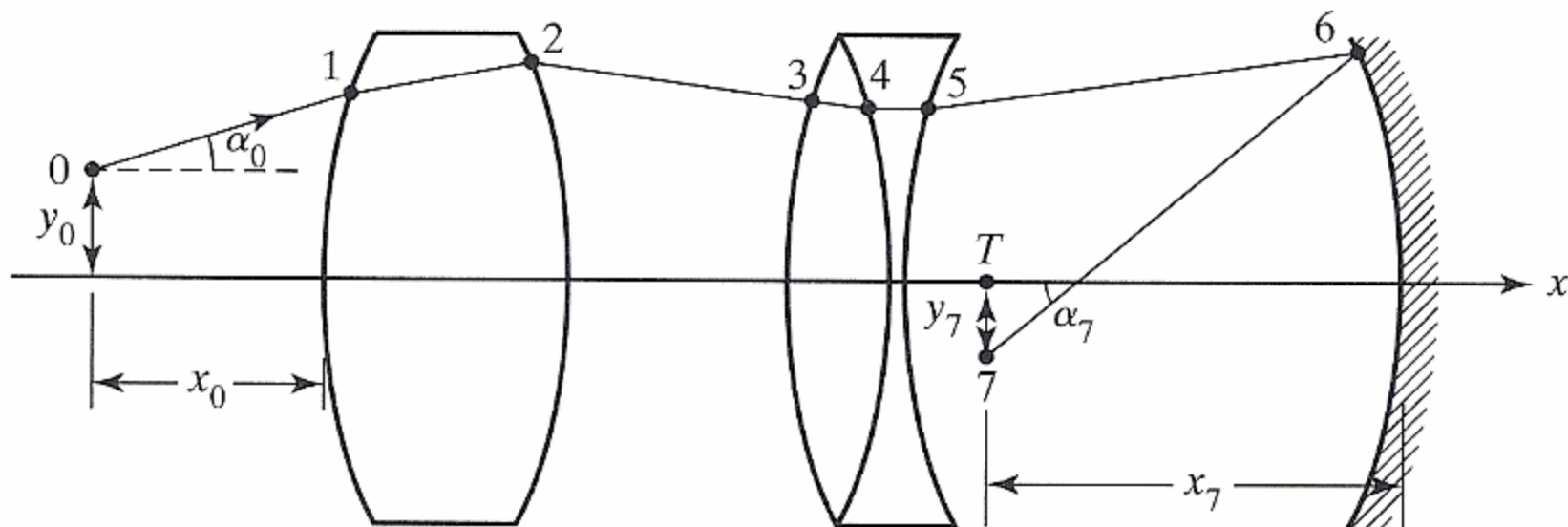


Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Χαρακτηριστικά σημεία και χαρακτηριστικά επίπεδα παχέος φακού (και οποιουδήποτε οπτικού συστήματος)

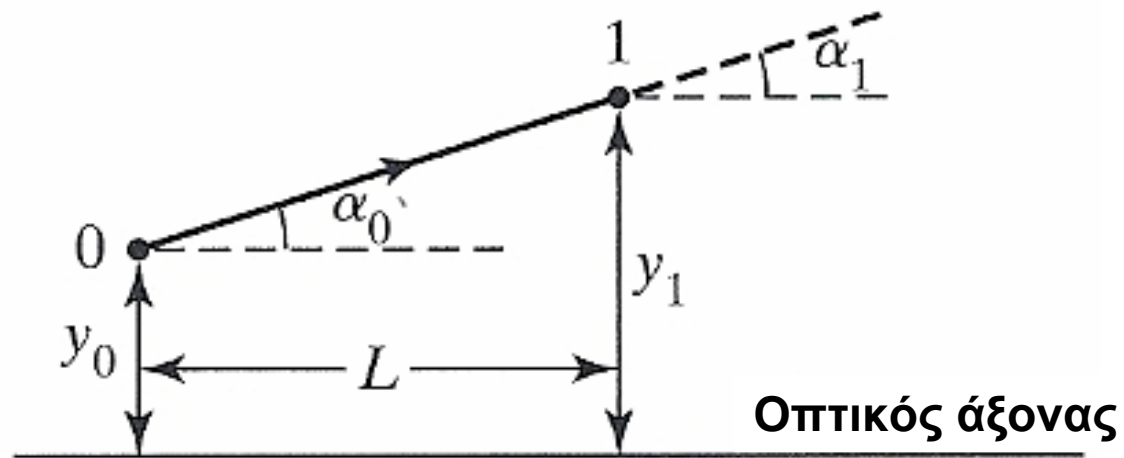


Μέθοδος των Πινάκων



- Μία ακτίνα ξεκινά από το σημείο O σε ύψος y_0 από τον οπτικό άξονα και υπό γωνία α_0 .
- Μετά από διαδοχικές μεταθέσεις, διαθλάσεις και ανακλάσεις σε μέσα με διαφορετικούς γενικά δείκτες διάθλασης, καταλήγει στο σημείο T .
- Θέλουμε να μπορούμε να προβλέψουμε το ύψος y_7 και τη γωνία α_7 .

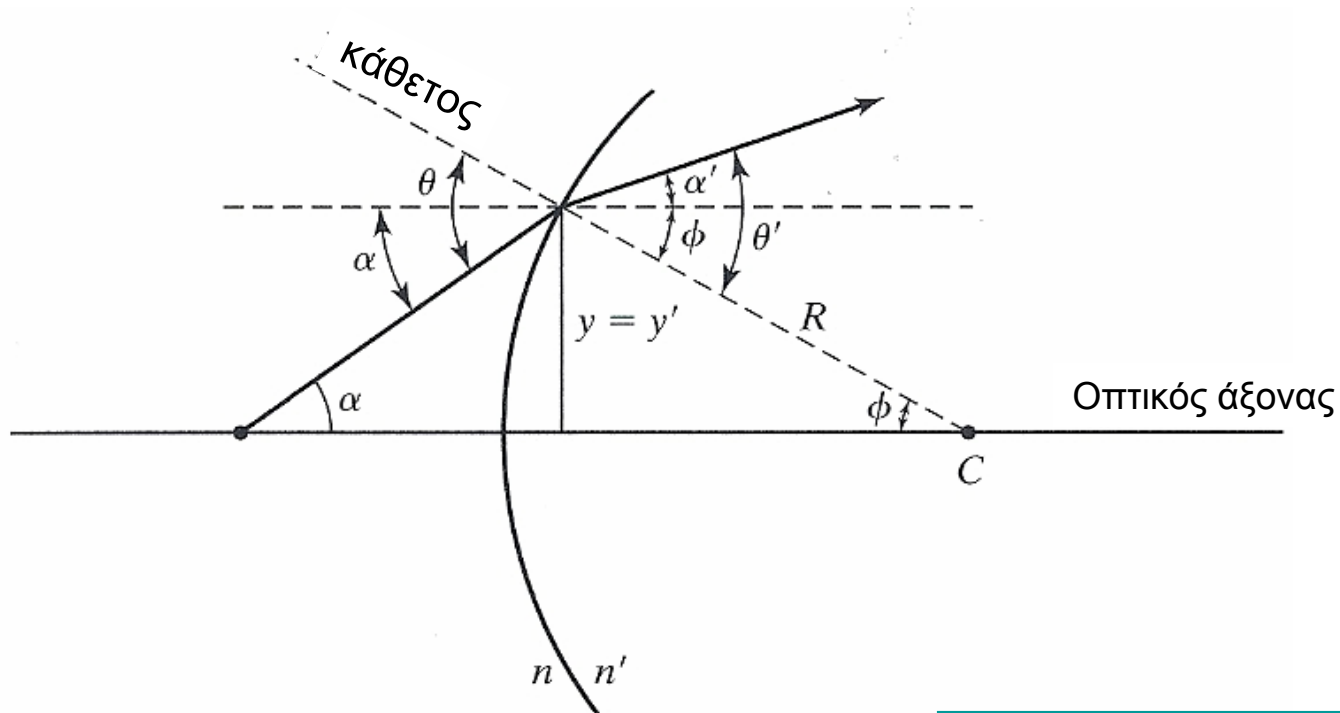
Πίνακας μετάθεσης



$$\alpha_1 = \alpha_0 \quad \text{και} \quad y_1 = y_0 + L \tan \alpha_0$$

$$\begin{aligned} y_1 &= (1)y_0 + (L)\alpha_0 \\ \alpha_1 &= (0)y_0 + (1)\alpha_0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας διάθλασης



$$\alpha' = \theta' - \phi = \theta' - \frac{y}{R} \quad \text{και} \quad \alpha = \theta - \phi = \theta - \frac{y}{R}$$

$$n\theta = n'\theta'$$

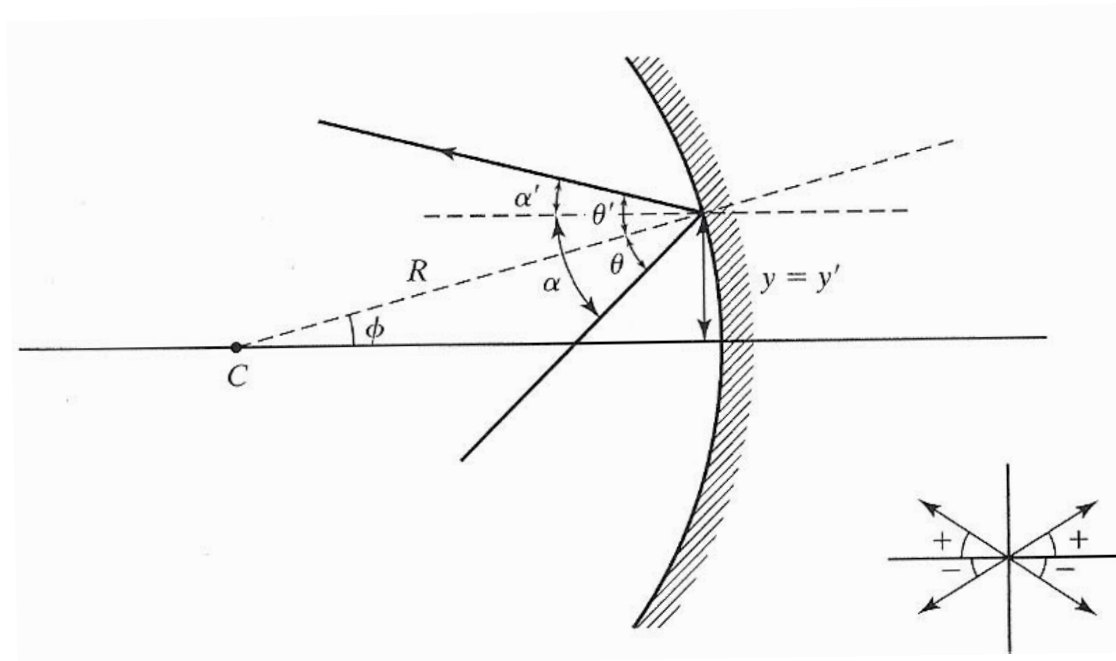
$$\alpha' = \left(\frac{n}{n'}\right)\theta - \frac{y}{R} = \left(\frac{n}{n'}\right)\left(\alpha + \frac{y}{R}\right) - \frac{y}{R}$$

$$\alpha' = \left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{n}{n'} - 1\right)y + \left(\frac{n}{n'}\right)\alpha$$

$$\begin{aligned} y' &= (1)y + (0)\alpha \\ \alpha' &= \left[\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{n}{n'} - 1\right)\right]y + \left(\frac{n}{n'}\right)\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R}\left(\frac{n}{n'} - 1\right) & \frac{n}{n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Πίνακας ανάκλασης



$$\alpha = \theta + \phi = \theta + \frac{y}{-R} \quad \text{και} \quad \alpha' = \theta' - \phi = \theta' - \frac{y}{-R}$$

$$\theta = \theta'$$

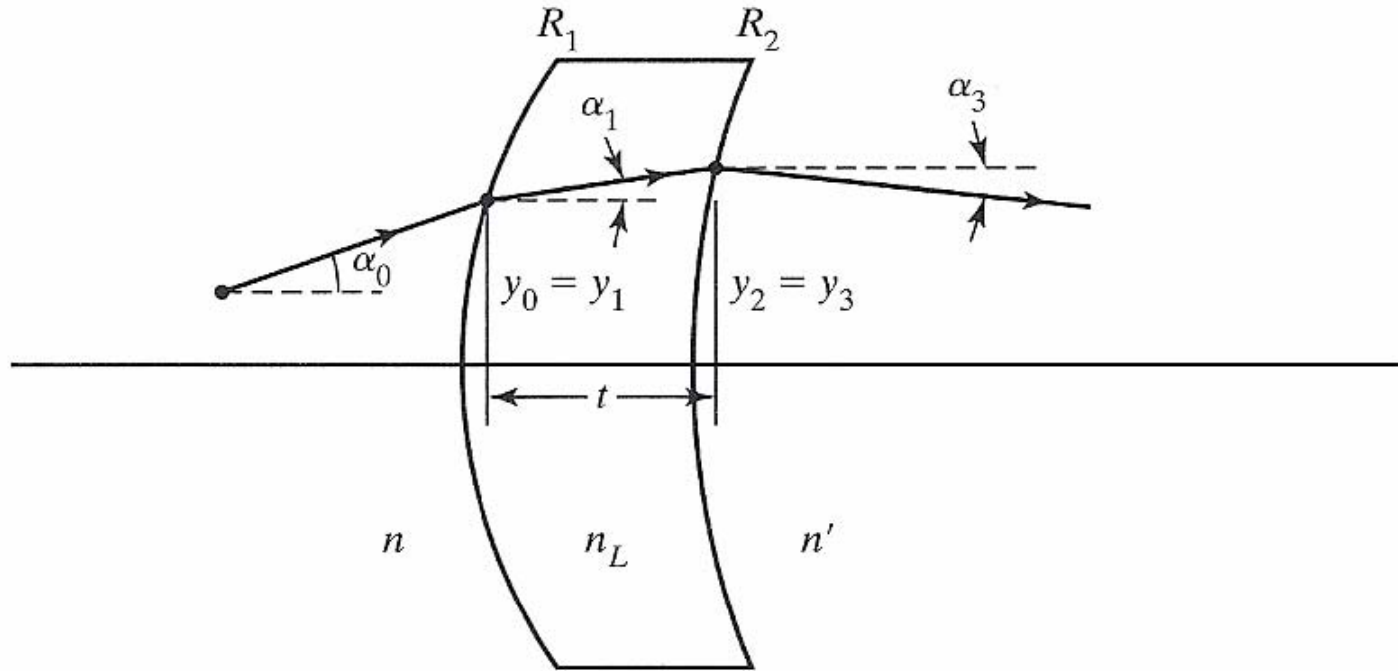
$$\alpha' = \theta' + \frac{y}{R} = \theta + \frac{y}{R} = \alpha + \frac{2y}{R}$$

$$y' = (1)y + (0)\alpha$$

$$\alpha' = \left(\frac{2}{R}\right)y + (1)\alpha$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Πίνακες για παχείς και λεπτές φακούς



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

Πρώτη διάθλαση

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Μετάθεση

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = M_3 \begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Δεύτερη διάθλαση

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = M_3 M_2 M_1 \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$M = \mathcal{R}_2 \mathcal{T} \mathcal{R}_1$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - n'}{n'R_2} & \frac{n_L}{n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n_L}{n_LR_1} & \frac{n}{n_L} \end{bmatrix}$$

Για λεπτό φακό θέτουμε $t=0$, Αν επιπλέον το μέσο είναι το ίδιο πριν και μετά από τον φακό, παίρνουμε τον πίνακα για λεπτό φακό βυθισμένο σε ομοιγενές οπτικό μέσο (π.χ. αέρα)

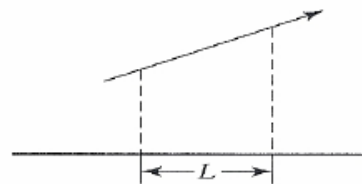
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - n}{nR_2} & \frac{n_L}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n_L}{n_LR_1} & \frac{n}{n_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - n}{n} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο των κατασκευαστών των φακών

$$\frac{1}{f} = \frac{n_L - n}{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

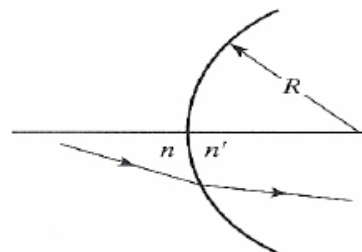
Πίνακας μετάθεσης

$$M = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{X}$$



Πίνακας διάθλασης σε σφαιρική επιφάνεια

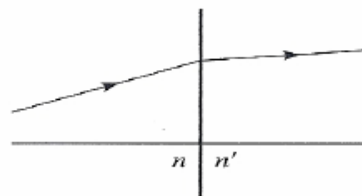
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{Rn'} & \frac{n}{n'} \end{bmatrix} = \mathfrak{R}$$



(+R) κυρτός
(-R) κοίλος

Πίνακας διάθλασης σε επίπεδη επιφάνεια

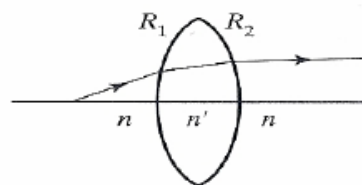
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{bmatrix}$$



Πίνακας λεπτού φακού

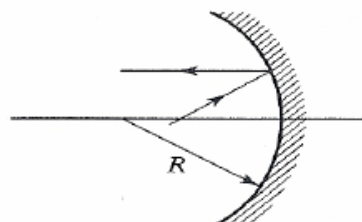
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n' - n}{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



Πίνακας σφαιρικού κατόπτρου

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

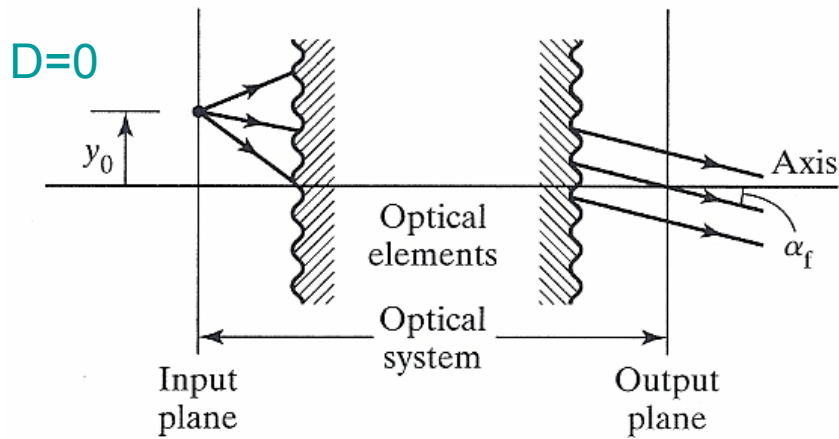


Πίνακας οπτικού συστήματος

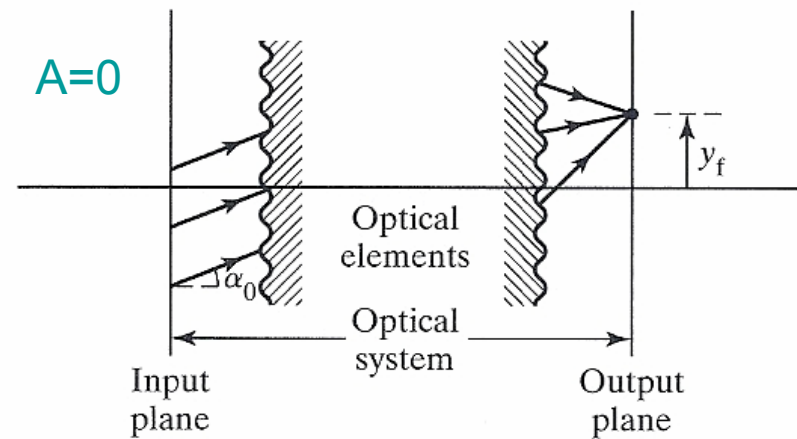
$$\begin{bmatrix} y_f \\ \alpha_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$y_f = Ay_0 + B\alpha_0$$

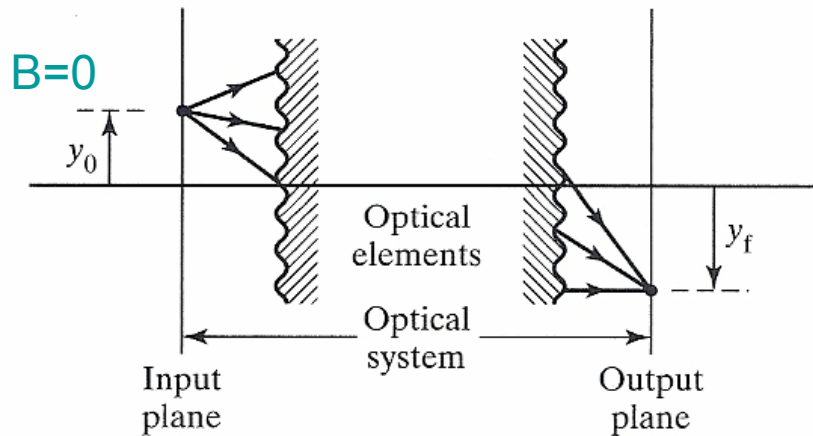
$$\alpha_f = Cy_0 + D\alpha_0$$



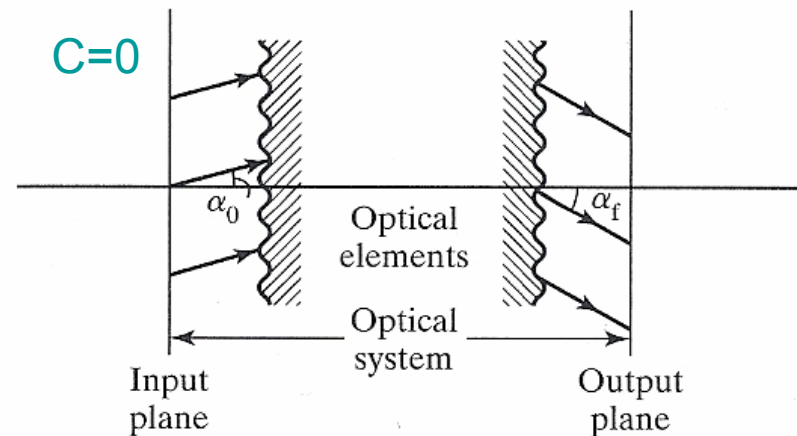
(a)



(b)



(c)



(d)

Εφαρμοσμένη Οπτική

Κεφάλαιο 2-συνέχεια

Χρήση πινάκων στην παραξονική οπτική

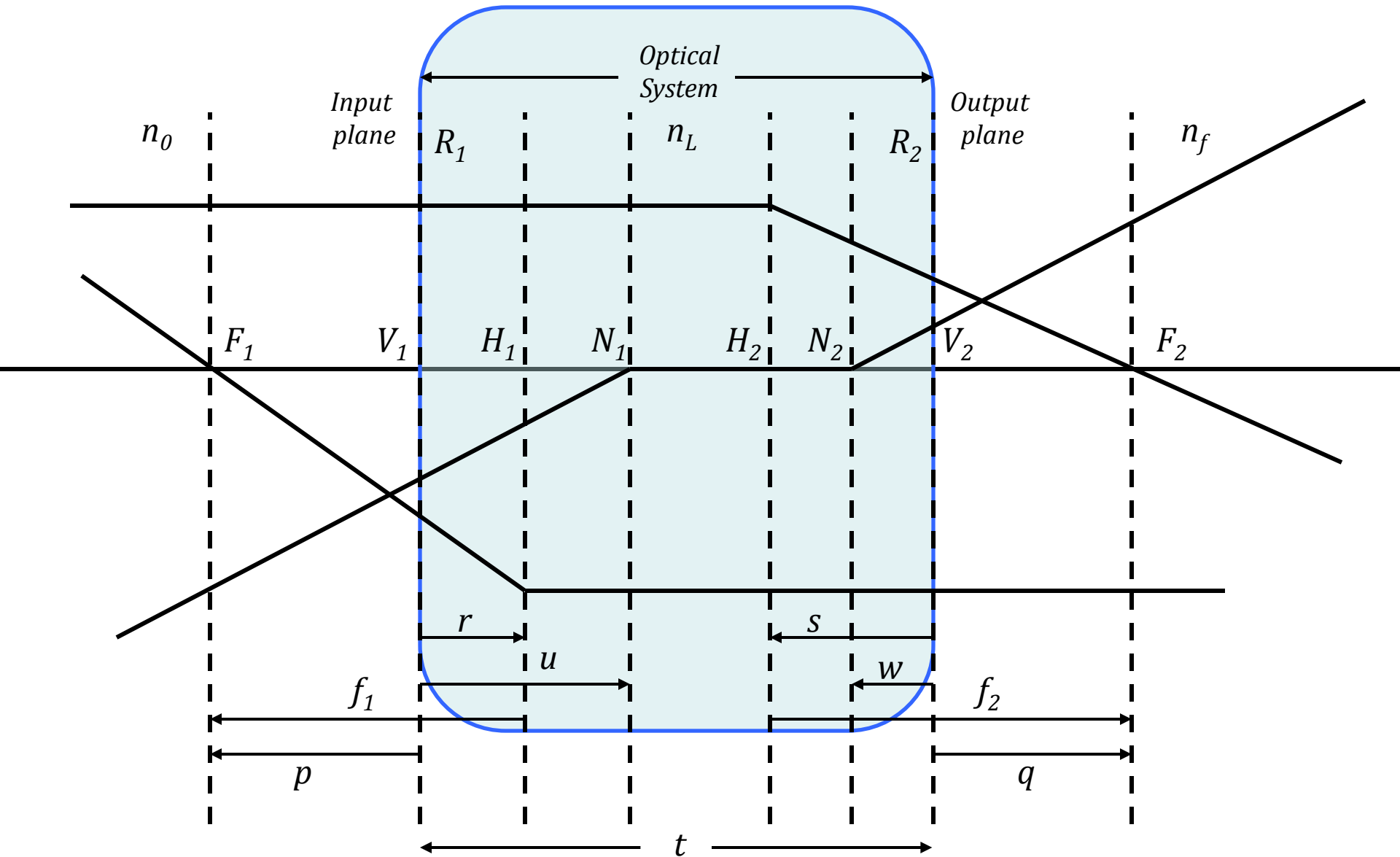
Χρήσιμα διαγράμματα-σχήματα

(συμπληρωματικά των σημειώσεων)

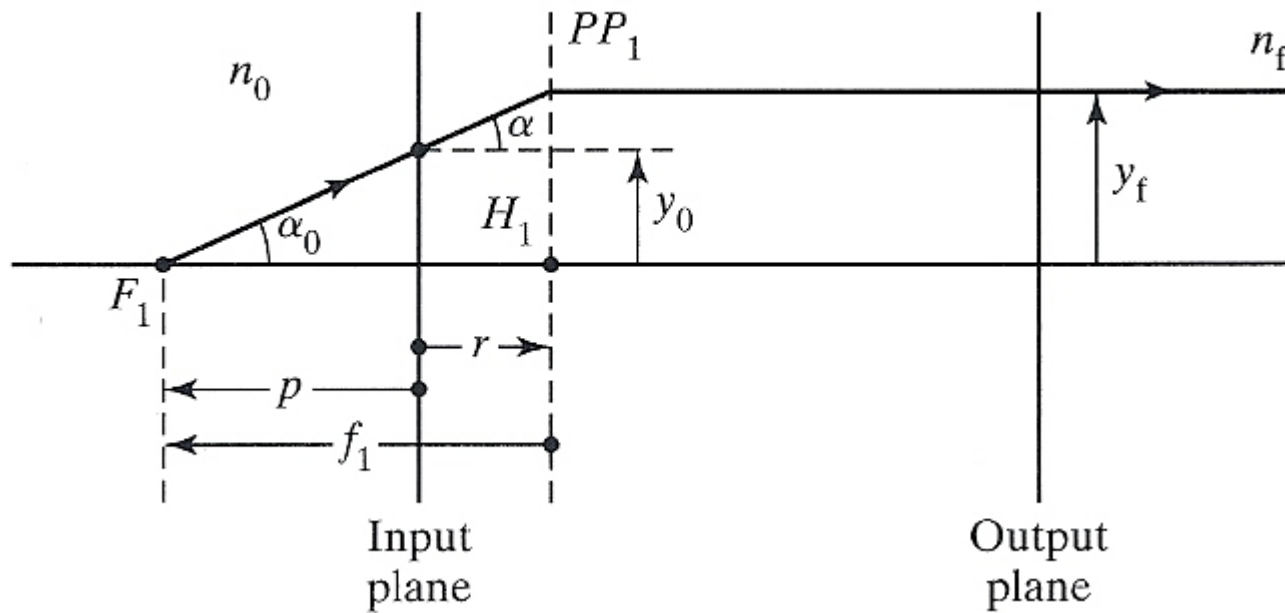
Κύρια σημεία του μαθήματος

- ❖ Θέση των χαρακτηριστικών σημείων οπτικού συστήματος σε σχέση με τα επίπεδα εισόδου και εξόδου
- ❖ Παραδείγματα
- ❖ Ray tracing

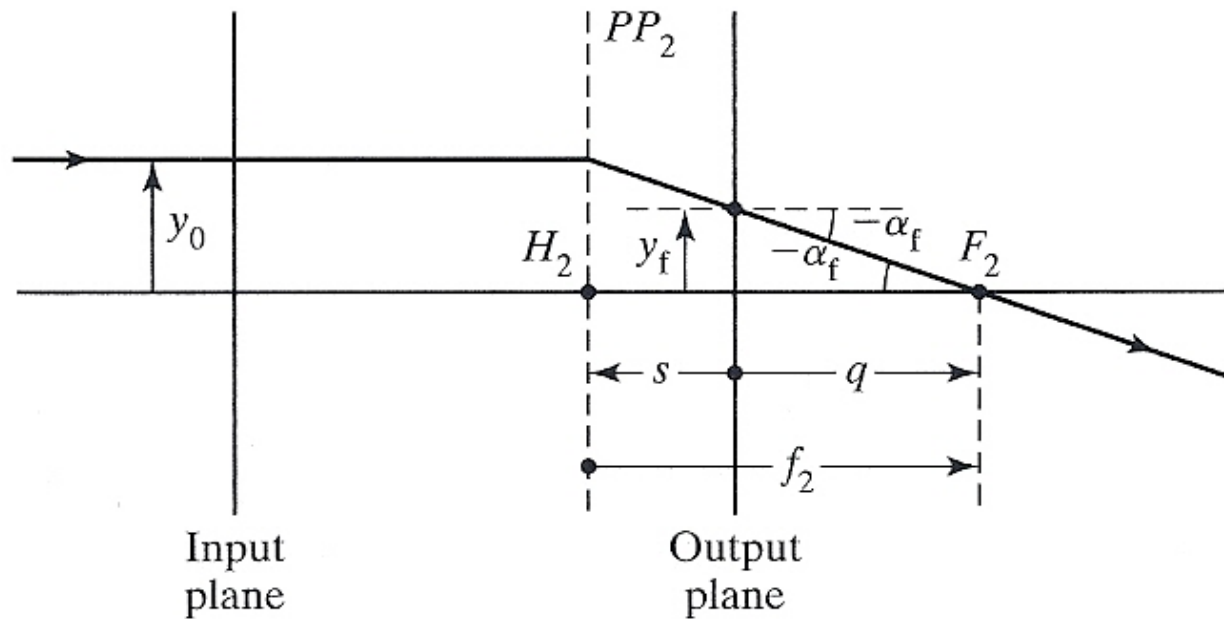
Θέση χαρακτηριστικών σημείων οπτικού συστήματος



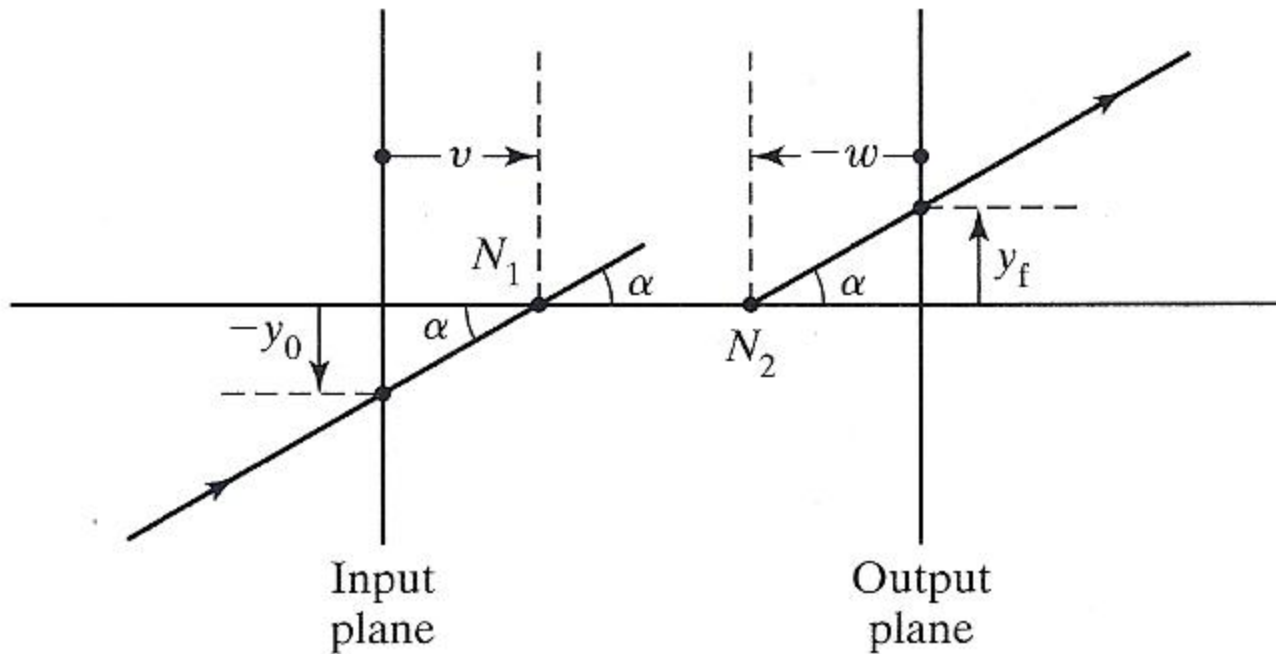
Διαγράμματα για τον υπολογισμό των p, r, f_1 με τα στοιχεία του πίνακα



Διαγράμματα για τον υπολογισμό των q, s, f_2 με τα στοιχεία του πίνακα



Διαγράμματα για τον υπολογισμό των v , w με τα στοιχεία του πίνακα



$$v = \frac{D - 1}{C}$$

$$w = \frac{(n_0/n_f) - A}{C}$$

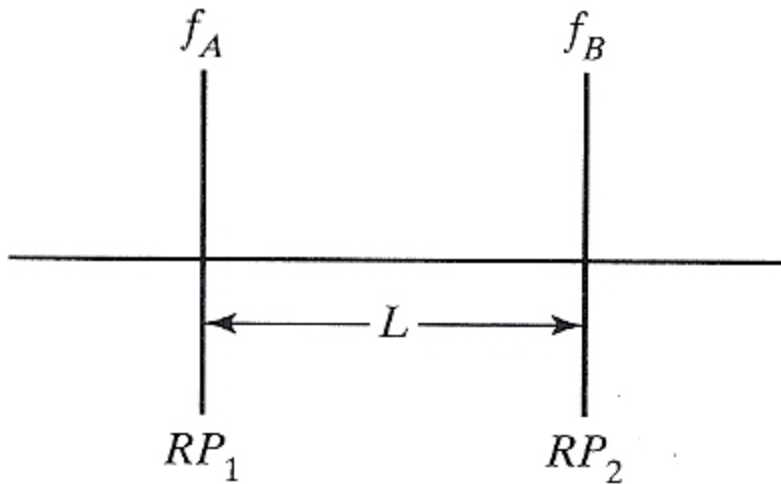
$$\begin{array}{l}
 p = \frac{D}{C} \\
 q = -\frac{A}{C} \\
 r = \frac{D - n_0/n_f}{C} \\
 s = \frac{1 - A}{C} \\
 v = \frac{D - 1}{C} \\
 w = \frac{n_0/n_f - A}{C}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 F_1 \\
 F_2 \\
 H_1 \\
 H_2 \\
 N_1 \\
 N_2
 \end{array} \right\}$$

Θέσεις σε σχέση με τα επίπεδα εισόδου (1) και εξόδου (2)

$$\begin{array}{l}
 f_1 = p - r = \frac{n_0/n_f}{C} \\
 f_s = q - s = -\frac{1}{C}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 F_1 \\
 F_2
 \end{array} \right\}$$

Θέσεις σε σχέση με τα κύρια επίπεδα

Σύστημα Λεπτών Φακών



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_B} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_A} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 - \frac{L}{f_A} & L \\ \frac{1}{f_B} \left(\frac{L}{f_A} - 1 \right) - \frac{1}{f_A} & 1 - \frac{L}{f_B} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_A} + \frac{1}{f_B} - \frac{L}{f_A f_B}$$

Το πρώτο κύριο H_1 και πρώτο κομβικό N_1 σημείο απέχουν από τον πρώτο φακό:

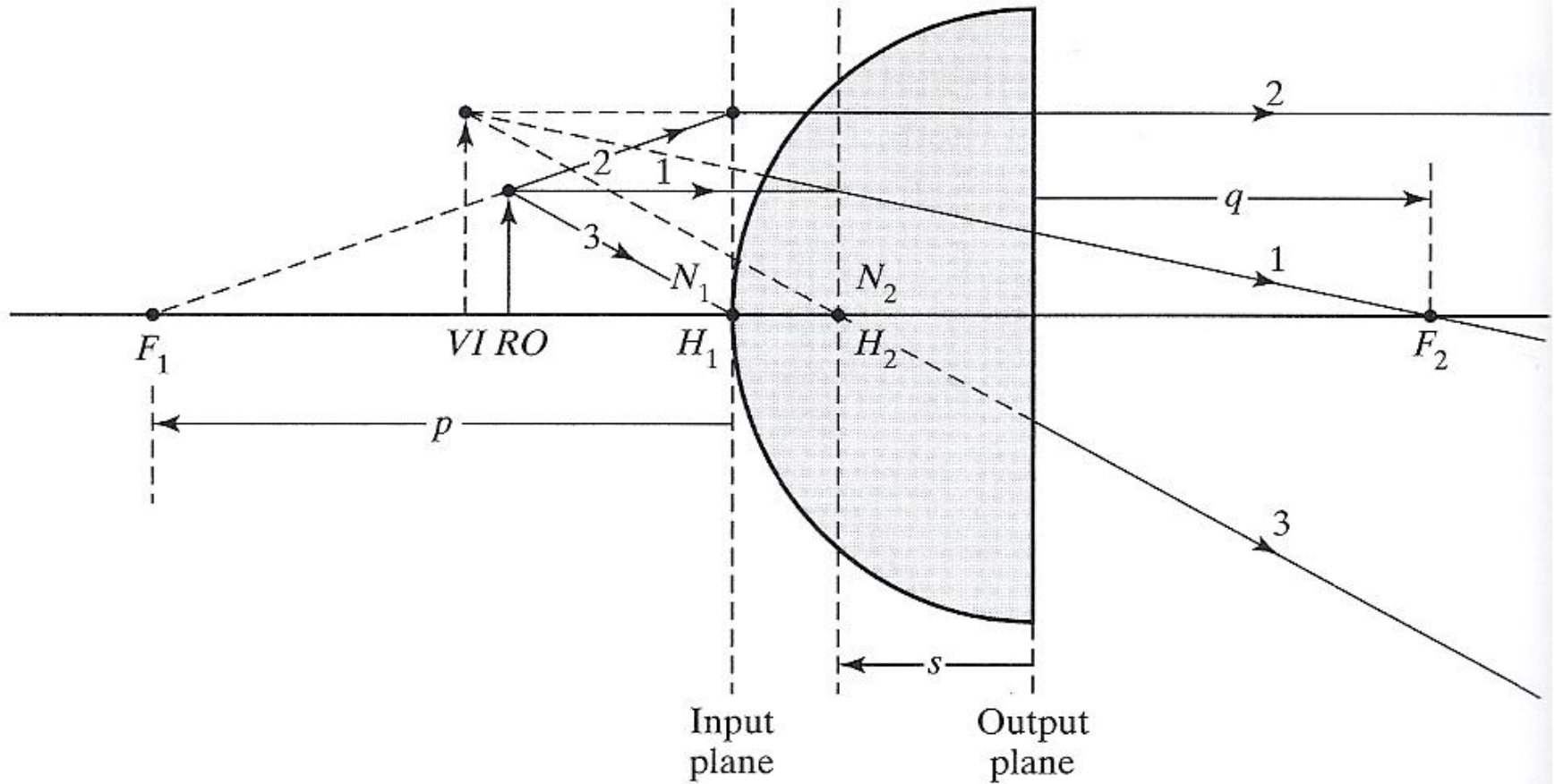
$$r = v = (D - 1)/C \quad \longrightarrow \quad r = v = \left(\frac{f_{eq}}{f_B} \right) L$$

Το δεύτερο κύριο H_2 και δεύτερο κομβικό N_2 σημείο απέχουν από τον δεύτερο φακό:

$$s = w = (1 - A)/C \quad \longrightarrow \quad s = w = - \left(\frac{f_{eq}}{f_A} \right) L$$

$(n_o = n_f)$

Ημισφαιρικός γυάλινος φακός



Πίνακας διάθλασης
σε σφαιρική επιφάνεια

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n'}{Rn'} & \frac{n}{n'} \end{bmatrix} = \mathfrak{R}$$

Πίνακας διάθλασης
σε επίπεδη επιφάνεια

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{bmatrix}$$

Πίνακας μετάθεσης

$$M = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{T}$$

$$M = \mathfrak{R}_2 \mathfrak{T} \mathfrak{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-0.5}{1.5(3)} & \frac{1}{1.5} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 2 \\ -\frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(M) = 1$$



$$p = \frac{D}{C} = -6\text{cm}$$

$$q = -\frac{A}{C} = 4\text{cm}$$

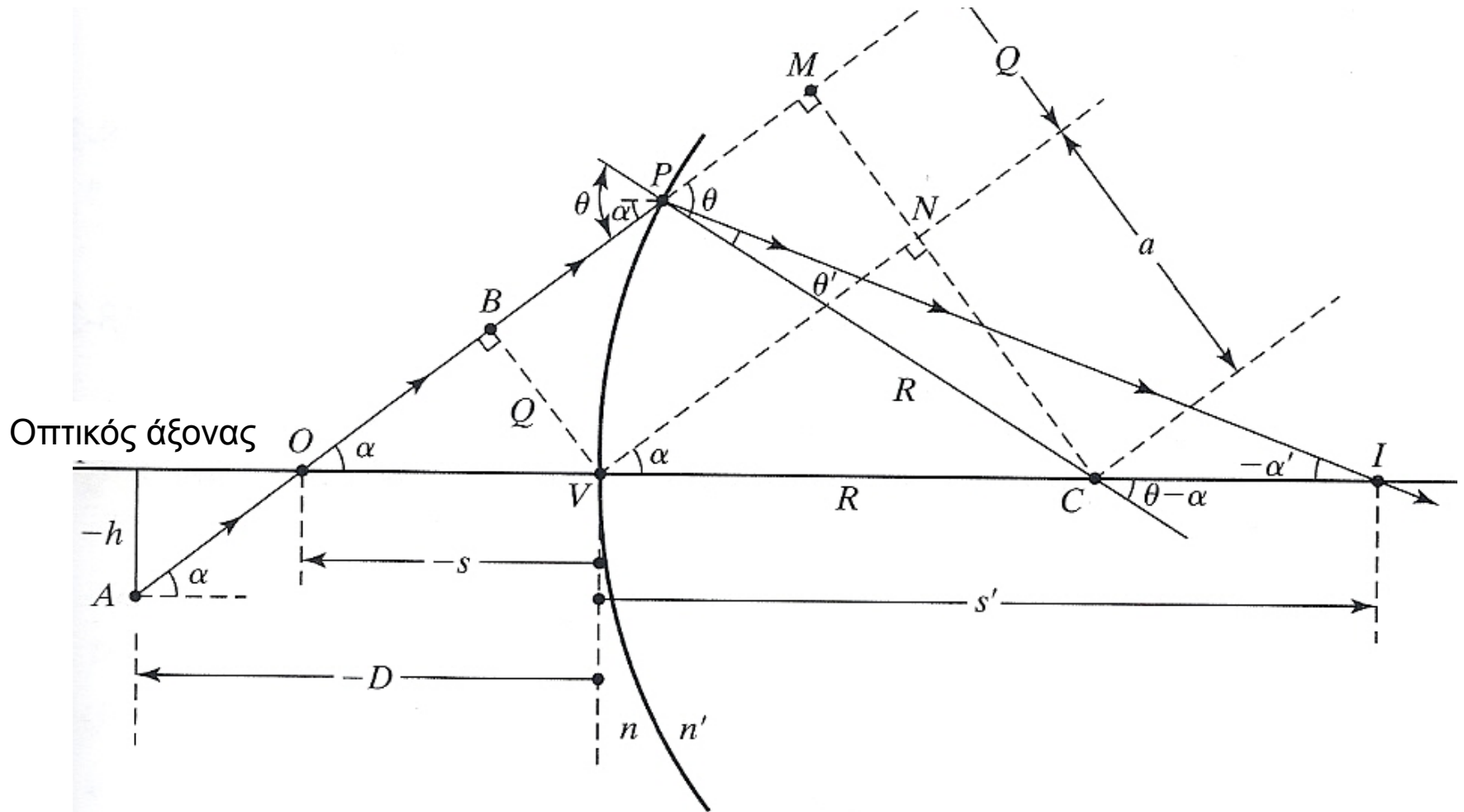
$$r = \frac{1}{C} \left(D - \frac{n_o}{n_f} \right) = 0$$

$$s = \frac{1 - A}{C} = -2\text{cm}$$

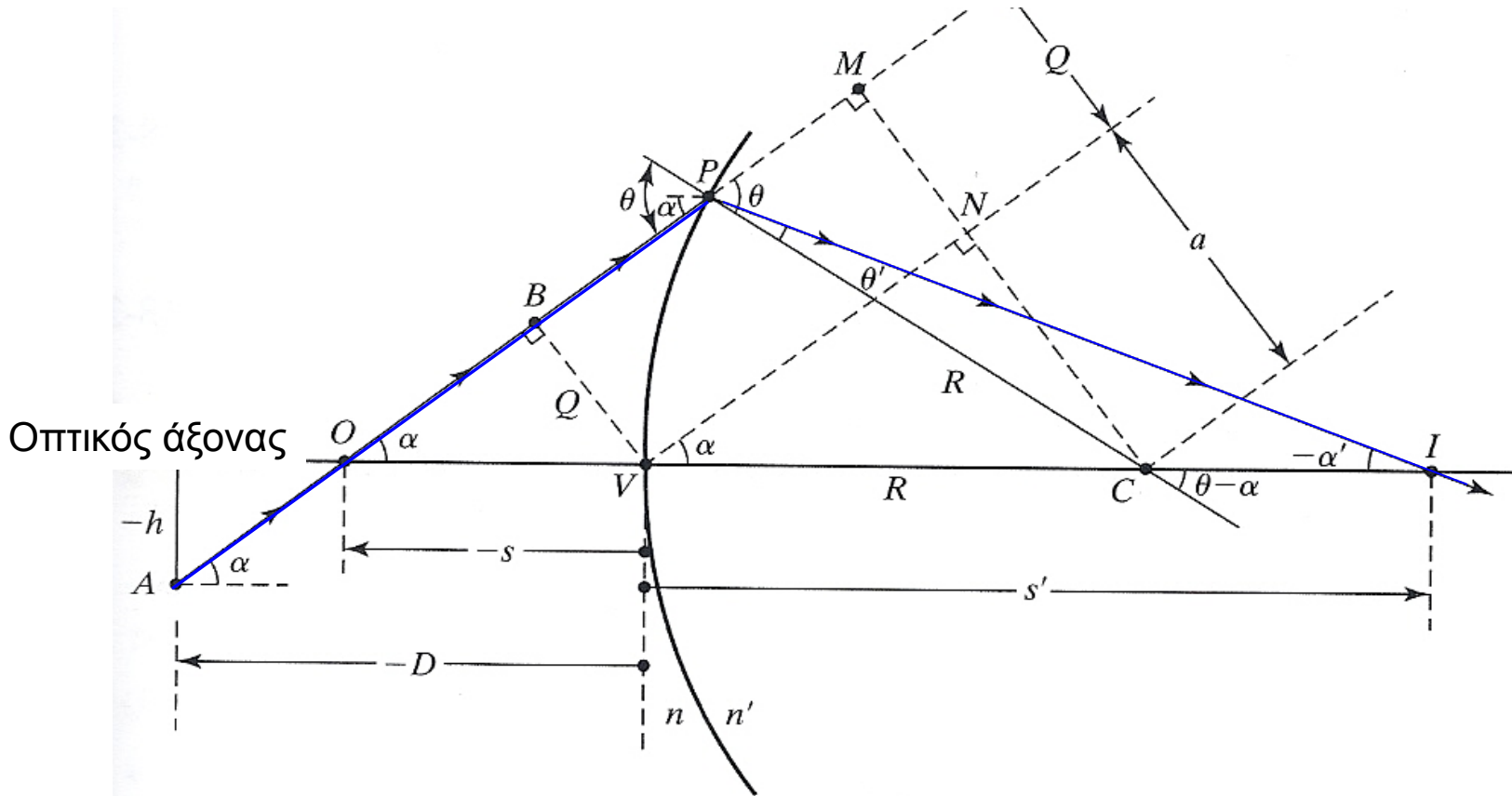
$$f_1 = p - r = -6\text{cm}$$

$$f_2 = q - s = 6\text{cm}$$

Ray tracing



Ray tracing

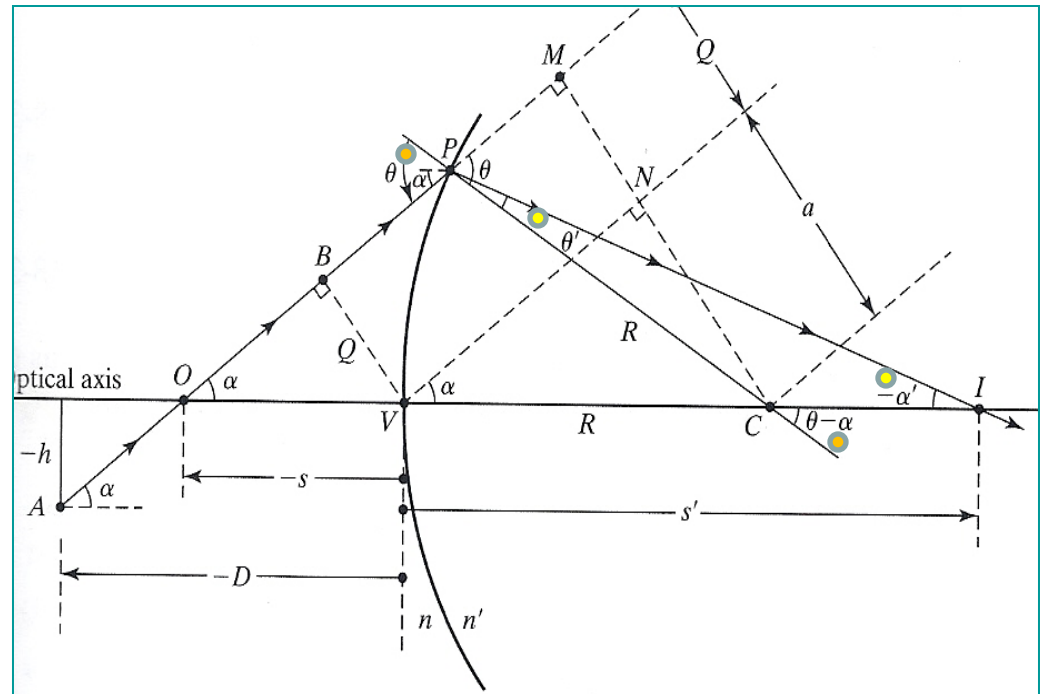


Μεσημβρινές ακτίνες (meridional rays): όσες περνούν από τον οπτικό άξονα – οπότε οι ακτίνες αυτές παραμένουν στο ίδιο επίπεδο → 2D

Μη μεσημβρινές ακτίνες (skew rays) → 3D

$$s = D - \frac{h}{\tan \alpha}$$

$$\begin{aligned} \Delta OBV: \quad \sin \alpha &= \frac{Q}{-s} \\ \Delta PMC \quad \sin \theta &= \frac{a + Q}{R} \\ \Delta VNC \quad \sin \alpha &= \frac{a}{R} \end{aligned}$$

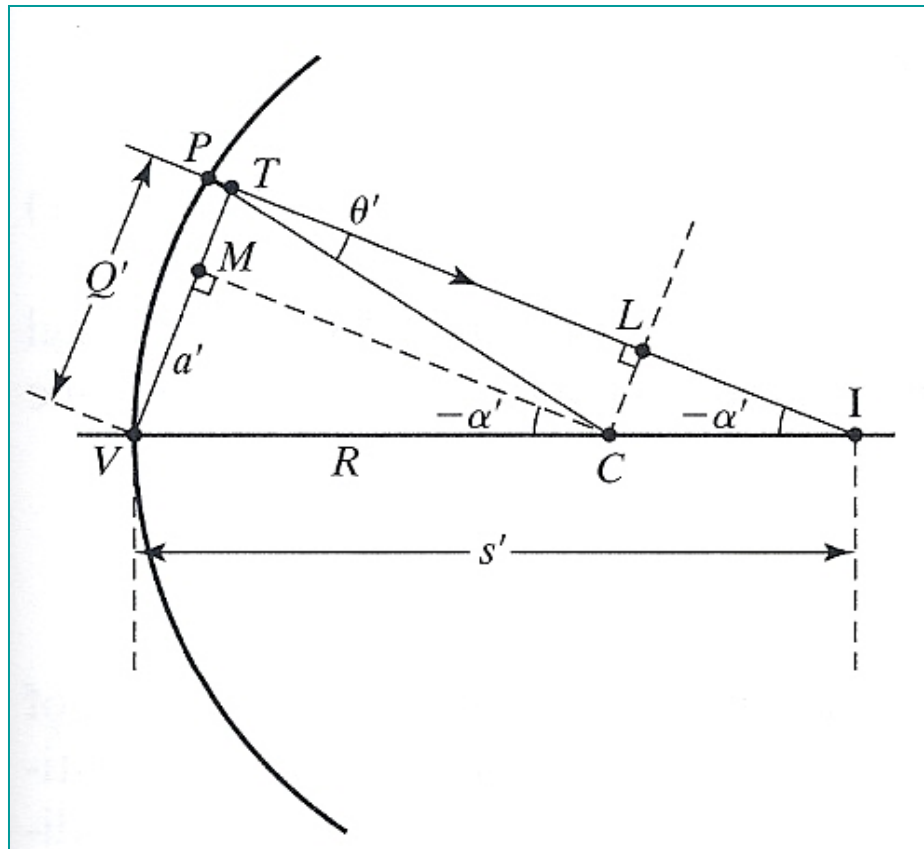


Απαλείφουμε το μήκος α: $\sin \theta = \frac{Q}{R} + \sin \alpha$

Νόμος του Snell στο P: $n \sin \theta = n' \sin \theta'$

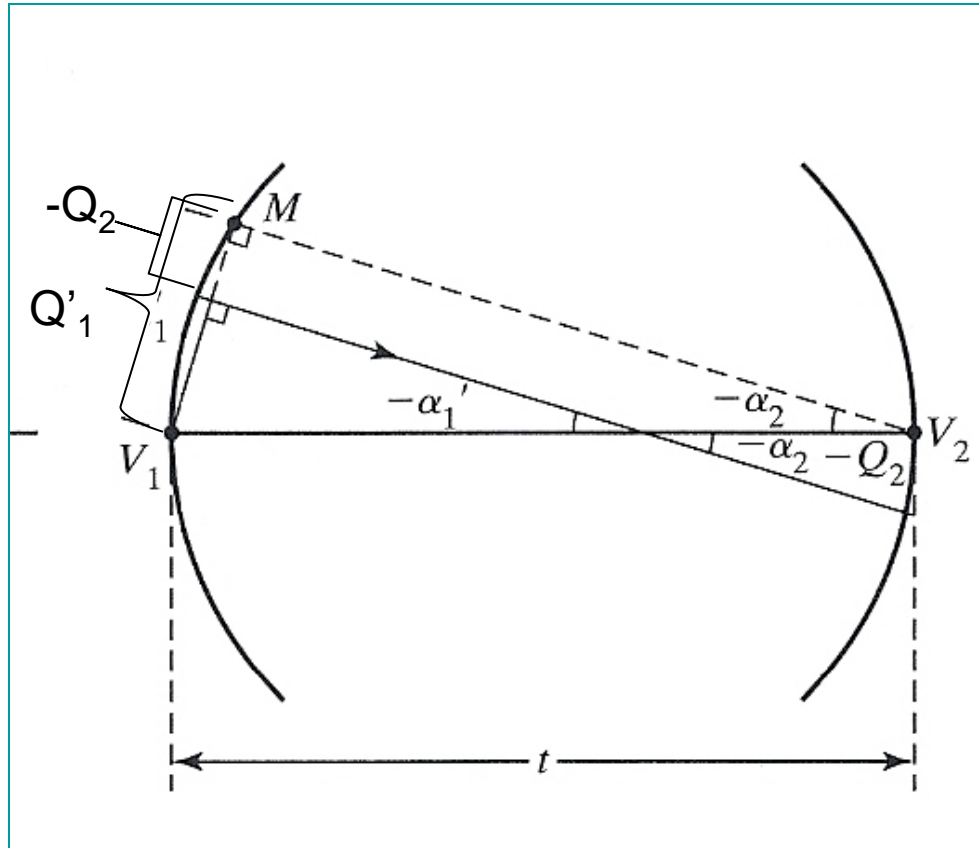
ΔCPI $\theta - \alpha = \theta' - \alpha'$

Οι αποστάσεις προς τα αριστερά της κορυφής είναι αρνητικές.
 Το h κάτω από τον άξονα είναι αρνητικό.
 Το Q κάτω από τον άξονα είναι αρνητικό.



Q' είναι η παράμετρος Q για την ακτίνα μετά τη διάθλαση

$$\begin{array}{l}
 \Delta CM\bar{V} \\
 \Delta PLC \\
 \Delta ITV
 \end{array}
 \quad
 \left.
 \begin{array}{l}
 \sin(-\alpha') = \frac{a'}{R} \\
 \sin \theta' = \frac{Q' - a'}{R} \\
 \sin(-\alpha') = \frac{Q'}{s'} \quad \text{or} \quad s' = \frac{-Q'}{\sin \alpha'}
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{Απαλείφουμε το μήκος } a': \\
 Q' = R(\sin \theta' - \sin \alpha')
 \end{array}$$



$$\sin(-\alpha_2) = \frac{V_1M}{t} = \frac{Q_1' - Q_2}{t}$$

TABLE 18-3 MERIDIONAL RAY-TRACING EQUATIONS (INPUT: n, n', R, α, h, D)

General case	Ray parallel to axis: $\alpha = 0$	Plane surface: $R \Rightarrow \infty$
$s = D - \frac{h}{\tan \alpha}$	—	$s = D - \frac{h}{\tan \alpha}$
$Q = -s \sin \alpha$	$Q = h$	$Q = -s \sin \alpha$
$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{Q}{R} + \sin \alpha \right)$	$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{Q}{R} + \sin \alpha \right)$	—
$\theta' = \sin^{-1} \left(\frac{n \sin \theta}{n'} \right)$	$\theta' = \sin^{-1} \left(\frac{n \sin \theta}{n'} \right)$	—
$\alpha' = \theta' - \theta + \alpha$	$\alpha' = \theta' - \theta + \alpha$	$\alpha' = \sin^{-1} \frac{n}{n' \sin \alpha}$
$Q' = R(\sin \theta' - \sin \alpha')$	$Q' = R(\sin \theta' - \sin \alpha')$	$Q' = Q \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha}$
$s' = \frac{-Q'}{\sin \alpha'}$	$s' = \frac{-Q'}{\sin \alpha'}$	$s' = \frac{-Q'}{\sin \alpha'}$

Transfer: Input: t

$$Q = Q' + t \sin \alpha'$$

$$\alpha = \alpha'$$

$$n = n'$$

Input: new n', R

Return: to calculate θ

Rapid landscape photographic lens

Τρεις διαδοχικοί φακοί σε επαφή, με στοιχεία

$$R_1 = -120.8$$

$$R_2 = -34.6$$

$$R_3 = -96.2$$

$$R_4 = -51.2$$

$$t_1 = 6$$

$$t_2 = 2$$

$$t_3 = 3$$

$$n_1 = 1.521$$

$$n_2 = 1.581$$

$$n_3 = 1.514$$

Θεωρείστε δυο ακτίνες παρ/λες προς τον ΟΑ, η μια σε ύψος 1mm και η άλλη σε ύψος 5mm

1° βήμα

$$\alpha = 0$$

2° βήμα

$$Q_2 = Q'_1 + t \sin \alpha_2$$

$$Q_2 = 1.0000 + 6 \times \sin 0.1625^\circ = 1.0170$$

$$a_2 = a'$$

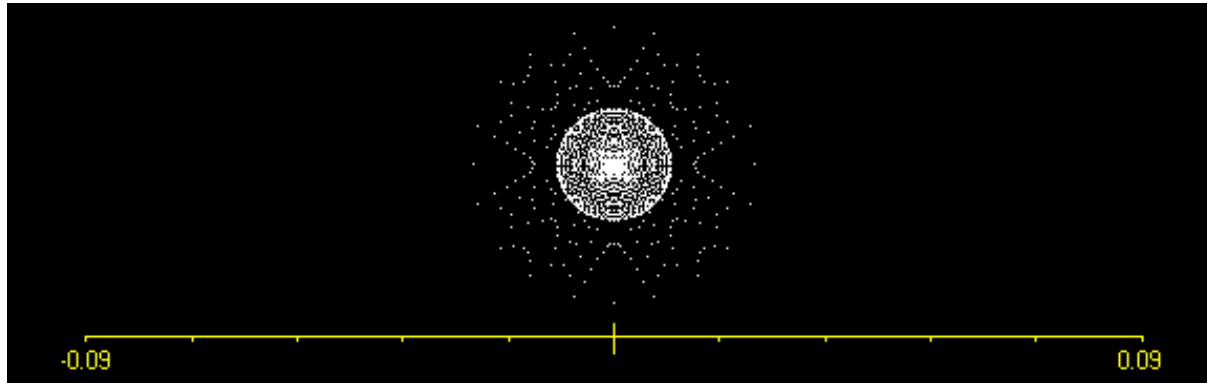
$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{Q}{R} + \sin a \right) = \sin^{-1} \left(\frac{1.017}{-34.6} + \sin 0.1625^\circ \right) = -1.52177^\circ$$

$$\theta' = \sin^{-1} \left(\frac{n \sin \theta}{n'} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{1.521 \sin(-1.52177^\circ)}{1.581} \right) = -1.46401^\circ$$

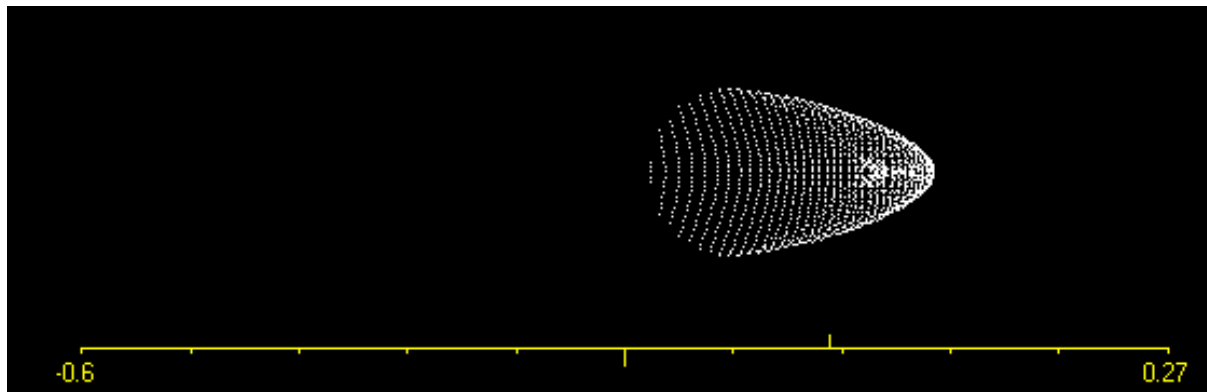
$$a' = \theta' - \theta + a = -1.46401^\circ - (-1.52177^\circ) + 0.1625^\circ = 0.2201^\circ$$

Input	Results: ray at $h = 1$	Results: ray at $h = 5$
First surface:		
$n = 1, n' = 1.521$	$Q = 1$	$Q = 5$
$\alpha = 0$	$\alpha' = 0.1625^\circ$	$\alpha' = 0.8128^\circ$
$h = 1$ or 5	$s' = -352.66$	$s' = -352.53$
$R = -120.8$	$Q' = 1.0000$	$Q' = 5.0010$
Second surface:		
$t = 6$	$Q = 1.0170$	$Q = 5.0861$
$n = 1.581$	$\alpha' = 0.2202^\circ$	$\alpha' = 1.1041^\circ$
$R = -34.6$	$s' = -264.59$	$s' = -264.03$
	$Q' = 1.0170$	$Q' = 5.0876$
Third surface:		
$t = 2$	$Q = 1.0247$	$Q = 5.1261$
$n = 1.514$	$\alpha' = 0.2030^\circ$	$\alpha' = 1.0178^\circ$
$R = -96.2$	$s' = -289.26$	$s' = -288.58$
	$Q' = 1.0247$	$Q' = 5.1260$
Final surface:		
$t = 3$	$Q = 1.0353$	$Q = 5.1793$
$n = 1$	$\alpha' = -0.2883^\circ$	$\alpha' = -1.4520^\circ$
$R = -51.2$	$s' = 205.72$	$s' = 203.91$
	$Q' = 1.0353$	$Q' = 5.1672$

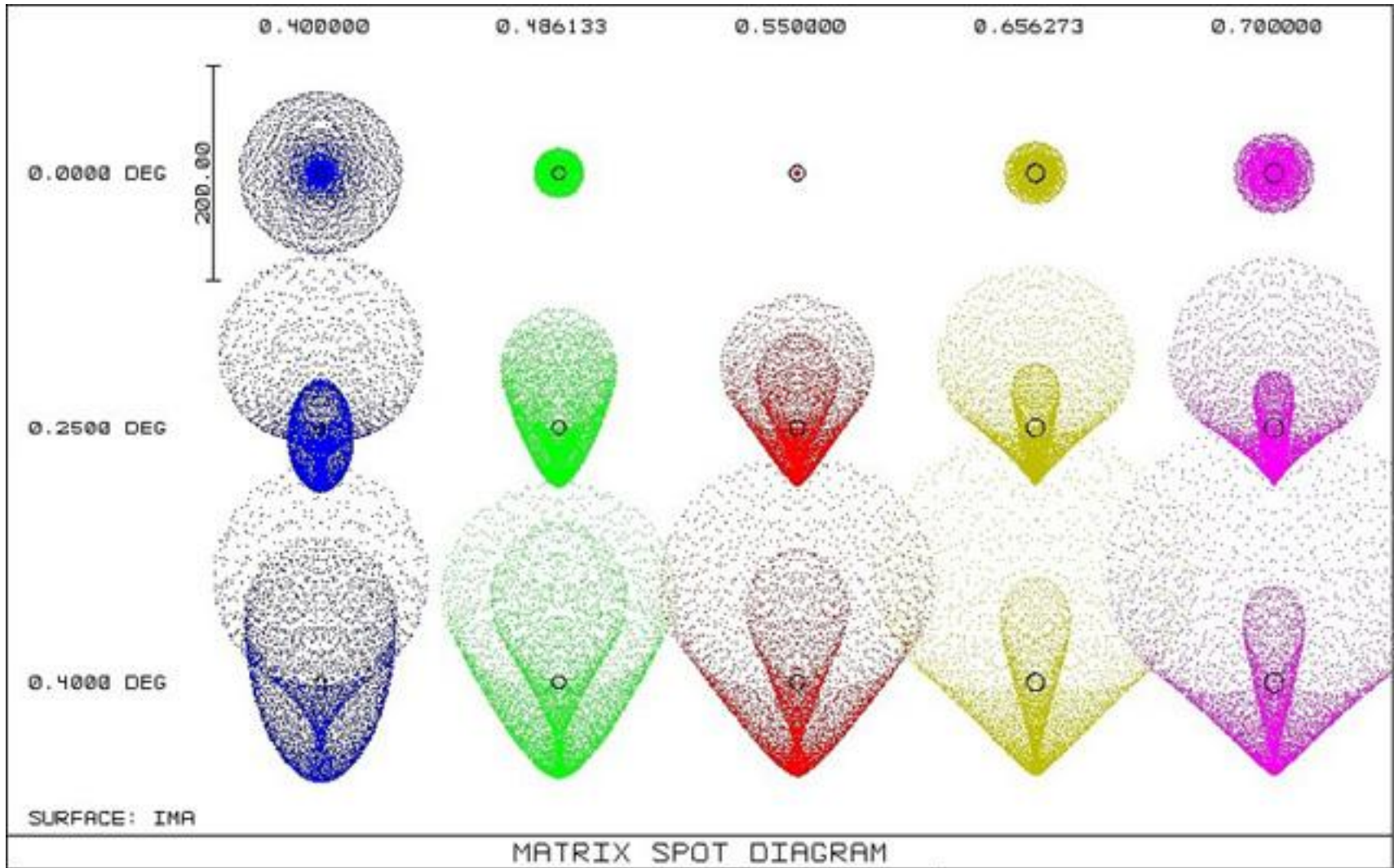
Ένα οπτικό σύστημα με φακό 500mm f/8 με το ίχνος 2000 παραξονικών ακτίνων φωτός



Για το ίδιο οπτικό σύστημα, οι ακτίνες εισέρχονται υπό γωνία 5°

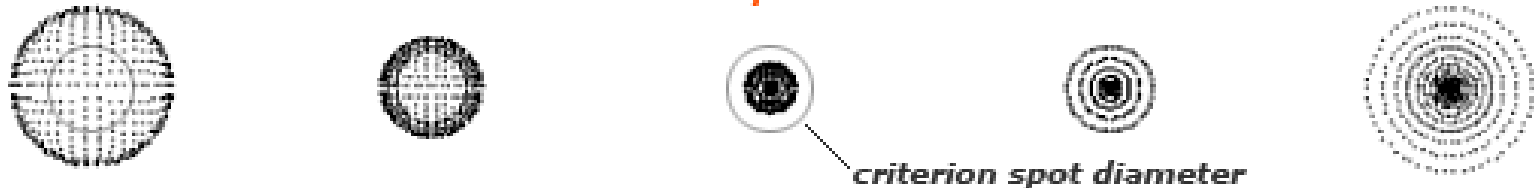


Spot diagrams για διάφορα οπτικά συστήματα



Spot diagrams για διάφορα οπτικά συστήματα

undercorrected spherical aberration



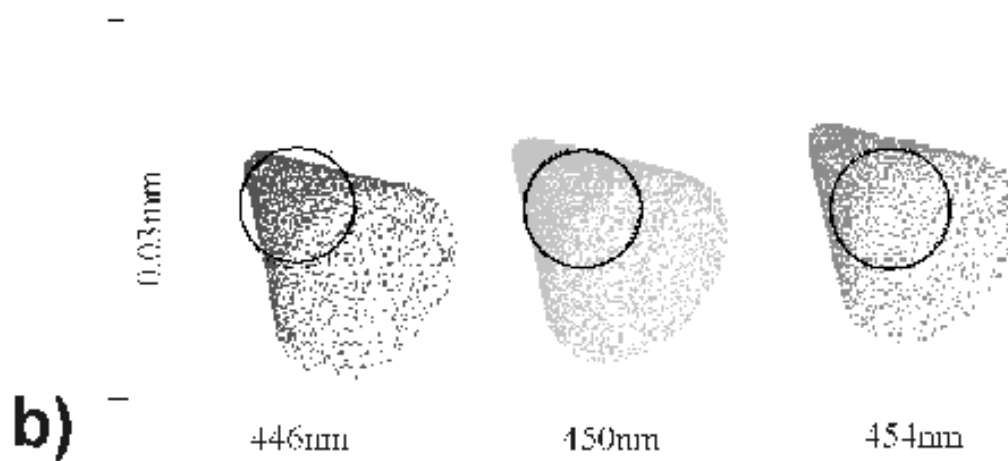
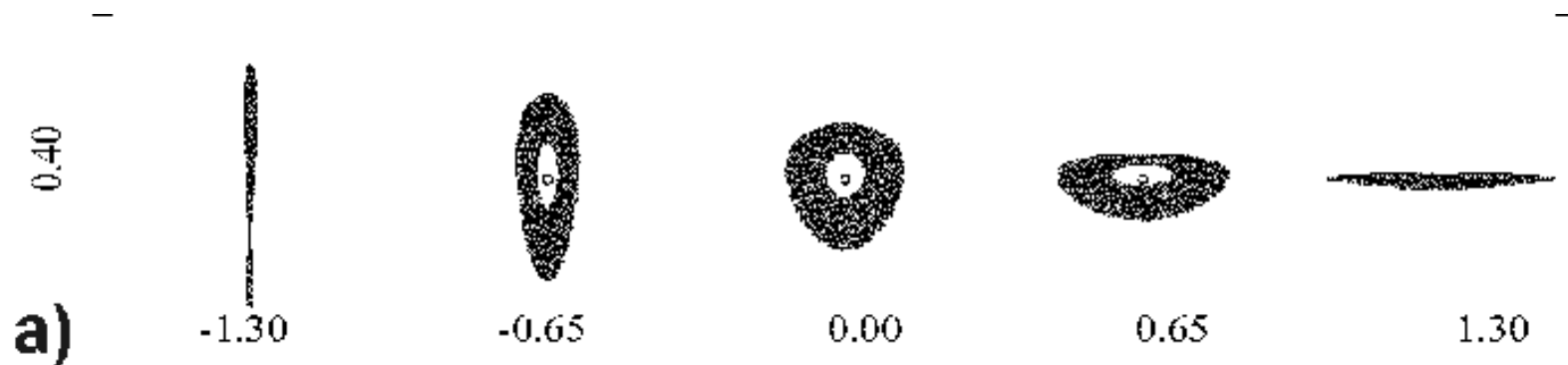
coma



astigmatism

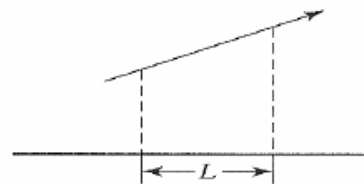


Spot diagrams για διάφορα οπτικά συστήματα



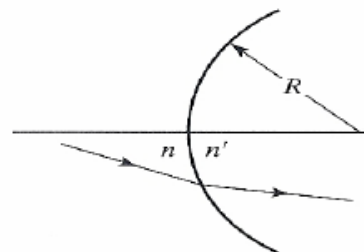
Πίνακας μετάθεσης

$$M = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{X}$$



Πίνακας διάθλασης σε σφαιρική επιφάνεια

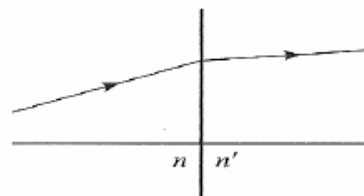
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{Rn'} & \frac{n}{n'} \end{bmatrix} = \mathfrak{R}$$



(+R) κυρτός
(-R) κοίλος

Πίνακας διάθλασης σε επίπεδη επιφάνεια

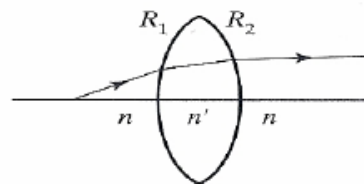
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{bmatrix}$$



Πίνακας λεπτού φακού

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n' - n}{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



Πίνακας σφαιρικού κατόπτρου

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

