Εφαρμοσμένη Οπτική

Γεωμετρική Οπτική

Κύρια σημεία του μαθήματος

- Η προσέγγιση της γεωμετρικής οπτικής
- Νόμοι της ανάκλασης και της διάθλασης
- Αρχή του Huygens
- Αρχή του Fermat
- Αρχή της αντιστρεψιμότητας (principle of reversibility)
- Επίπεδες επιφάνειες – ανάκλαση- διάθλαση
- Απεικόνιση με οπτικό σύστημα
- Σφαιρικές επιφάνειες – ανάκλαση- διάθλαση
- Λεπτοί φακοί – εστίαση – ισχύς
- Κυλινδρικοί φακοί

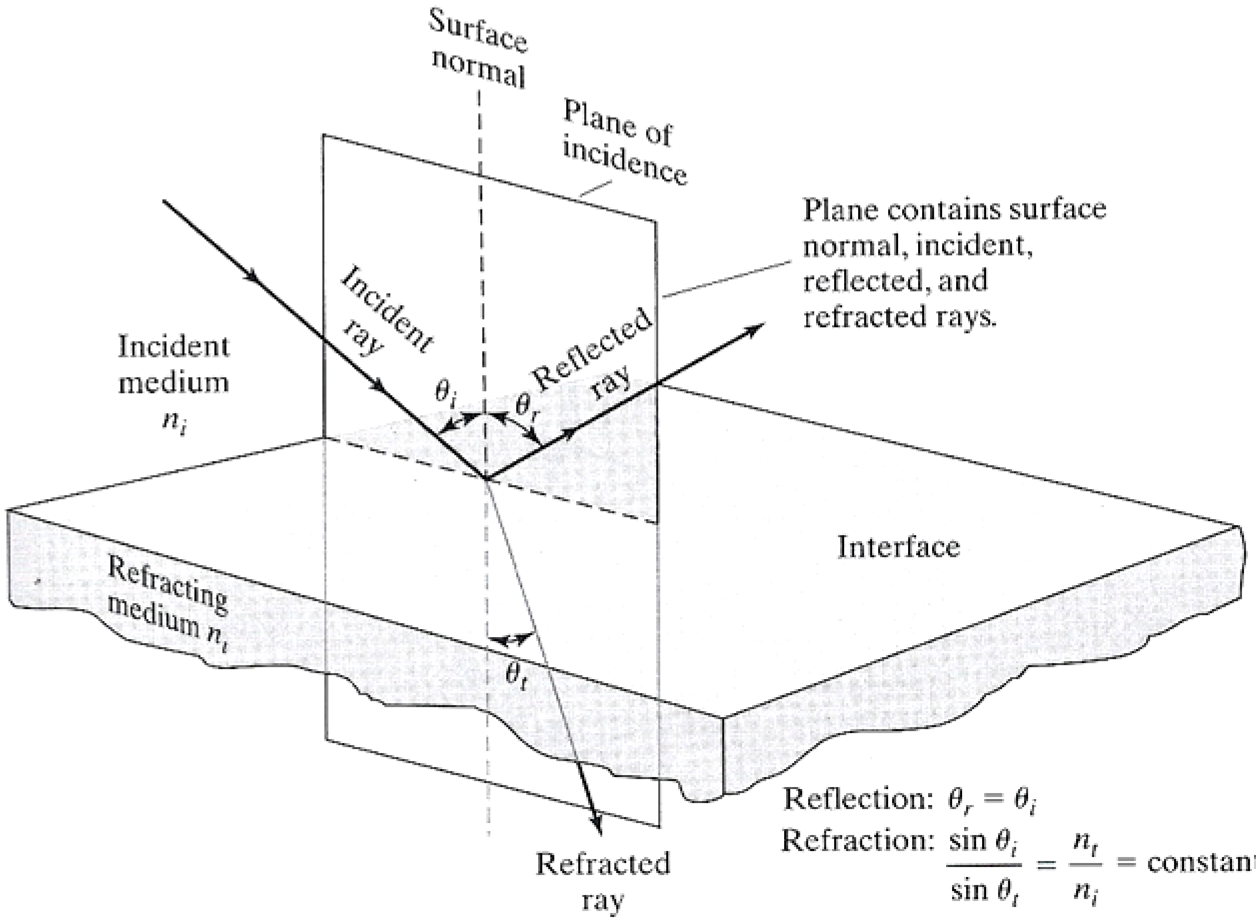
Γεωμετρική Οπτική

Όταν οι διαστάσεις των διαφόρων οπτικών στοιχείων είναι πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος του φωτός μπορούμε να αγνοήσουμε την κυματική φύση του φωτός.

Αυτή η προσέγγιση αποτελεί την ***Γεωμετρική Οπτική***

1. Το φως θεωρείται ότι διαδίδεται με ευθείες γραμμές, τις *ακτίνες*.
2. Όταν μια φωτεινή ακτίνα διέρχεται μέσα από ένα οπτικό σύστημα αποτελούμενο από διαδοχικά ομοιογενή μέσα, τότε ο οπτικός δρόμος είναι μια ακολουθία από ευθύγραμμα τμήματα.
3. Οι νόμοι της γεωμετρικής οπτικής που περιγράφουν την αλλαγή διεύθυνσης των ακτίνων, είναι οι γνωστοί νόμοι της ανάκλασης και της διάθλασης.

Ανάκλαση και διάθλαση στην διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δυο οπτικών μέσων

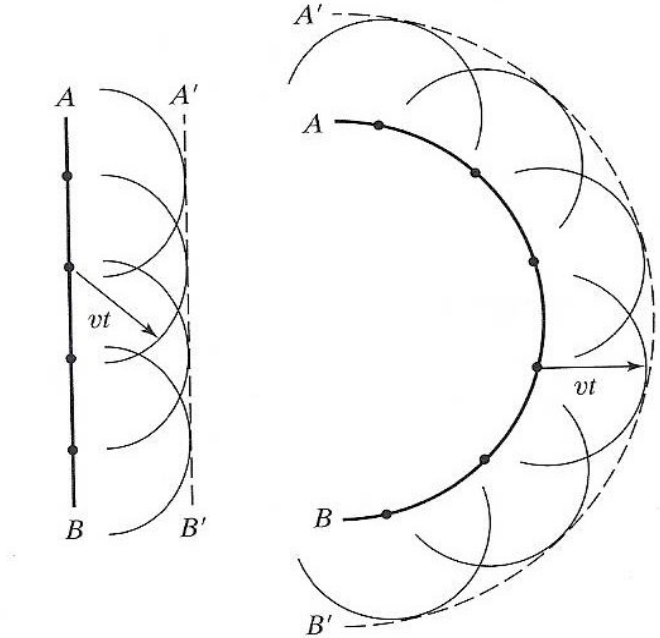


Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Αρχή του Huygens

Η οικογένεια των σφαιρικών επιφανειών που είναι κάθετες στις ακτίνες είναι τα *κυματικά μέτωπα*.

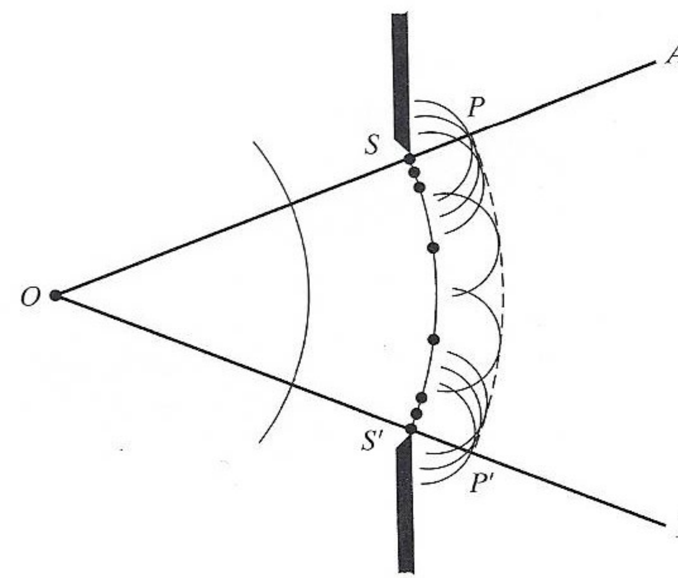
Τα σημεία ενός κυματικού μετώπου <u>ισαπέχουν *χρονικά*</u> από την πηγή.



(a) (b)

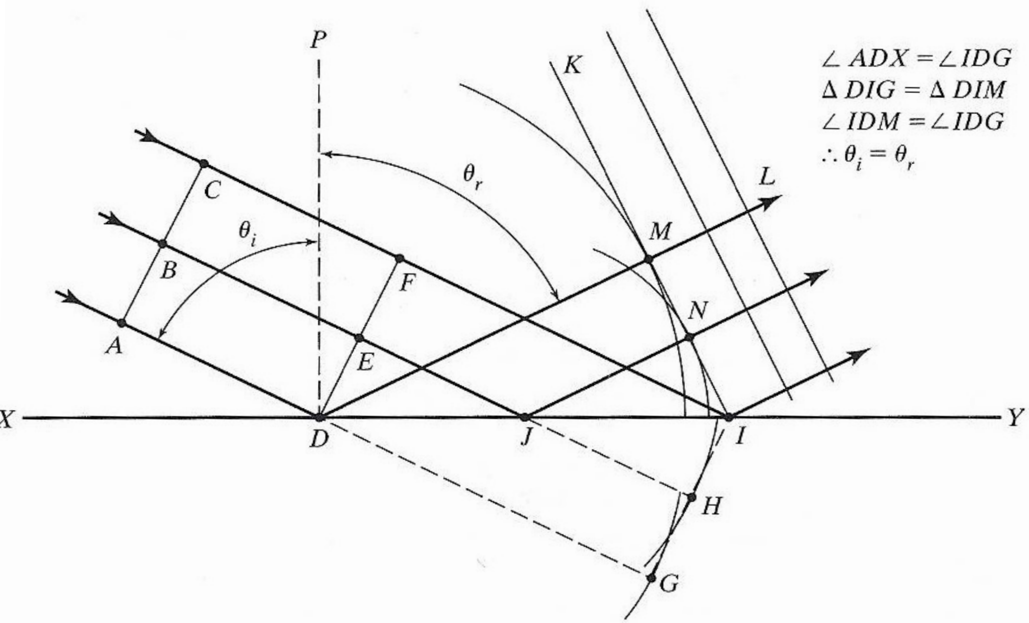
- ❑ Η αρχή του Huygens είναι ένα μοντέλο που περιγράφει την διάδοση του φωτός ορίζοντας ότι κάθε σημείο ενός κυματικού μετώπου μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι πηγή εκπομπής δευτερογενών κυμάτων.

- ❑ Σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή, η νέα θέση του κυματικού μετώπου είναι μια επιφάνεια που εφάπτεται στα δευτερογενή αυτά κύματα

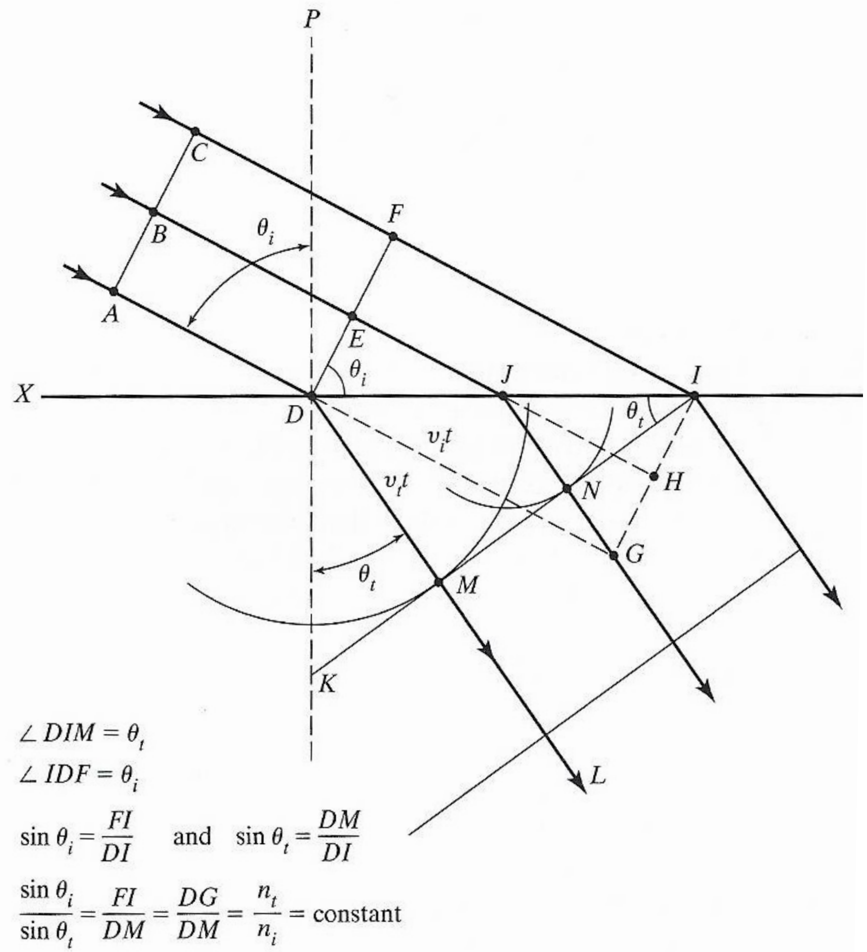


Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Οι νόμοι της ανάκλασης και της διάθλασης με την αρχή του Huygens



(a)



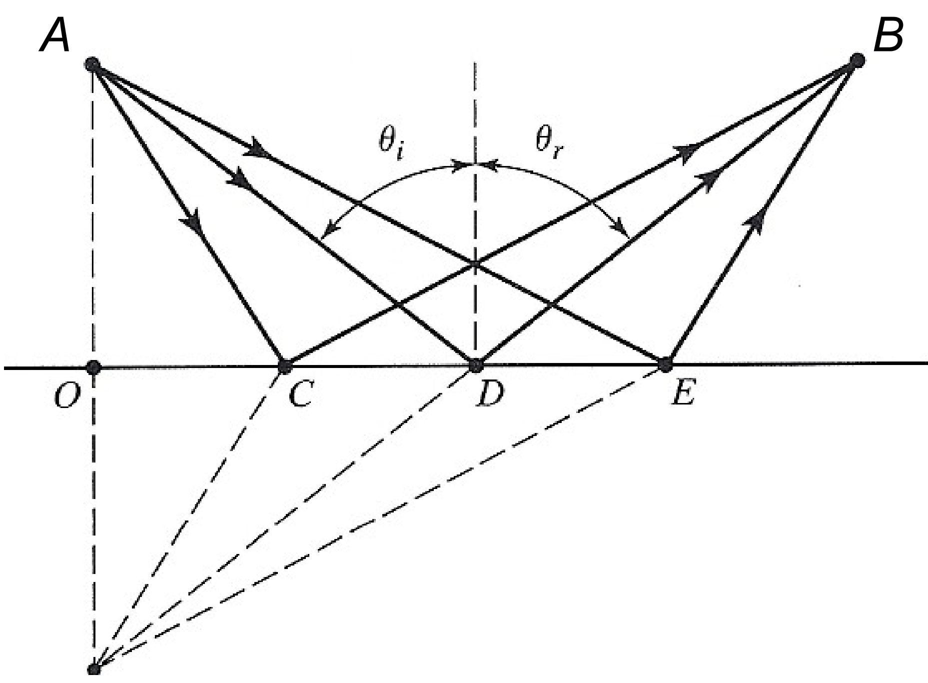
(b)

Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

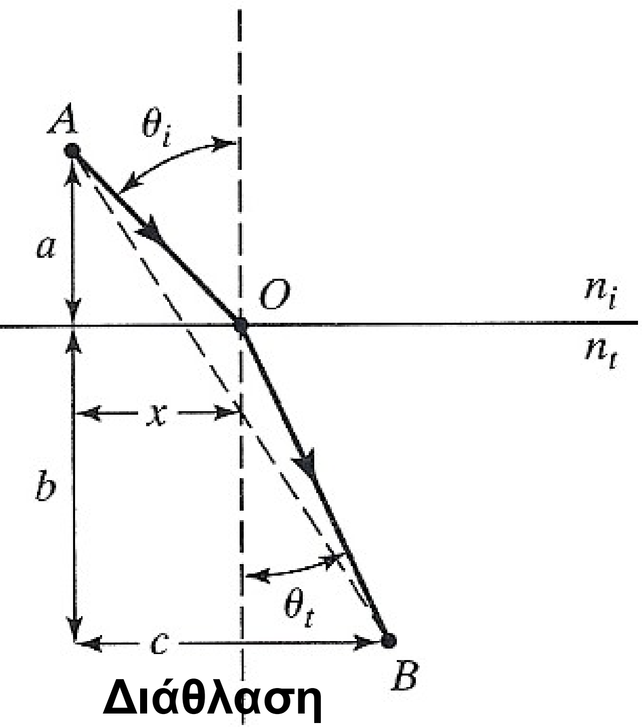
Αρχή του Fermat

Ορίζει ότι το φως καλύπτει την απόσταση που χωρίζει δύο σημεία έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται ο απαιτούμενος χρόνος.

Η πιο γενική και ορθότερη διατύπωση της αρχής του Fermat (ή αρχής ελαχίστου χρόνου):
Μια φωτεινή ακτίνα που διαδίδεται από το σημείο Α στο σημείο Β ακολουθεί οπτική διαδρομή που είναι «στάσιμη» σε σχέση με μεταβολές αυτής της διαδρομής (δηλ. αποτελεί ακρότατο, όχι υποχρεωτικά ελάχιστο)**.**

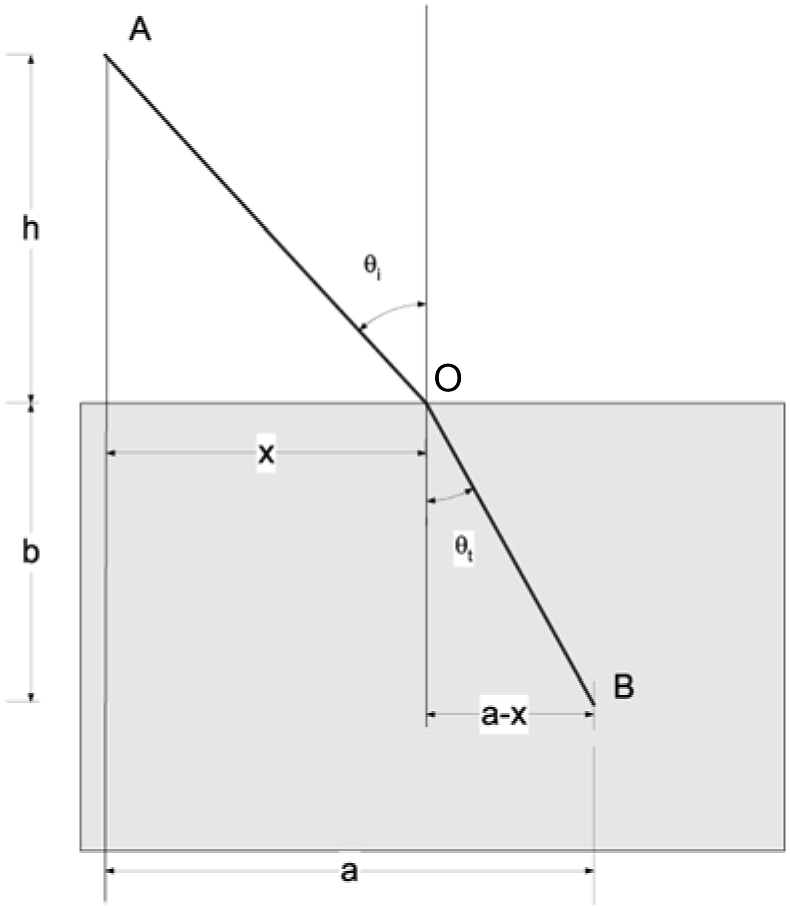


Ανάκλαση



Διάθλαση

Ο νόμος της Διάθλασης με την αρχή του Fermat



$$t_{AB} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\upsilon_i} + \frac{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{\upsilon_t}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\upsilon_i \sqrt{h^2 + x^2}} + \frac{-(a-x)}{\upsilon_t \sqrt{b^2 + (a-x)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta_i}{\upsilon_i} = \frac{\sin\theta_t}{\upsilon_t} \Rightarrow \upsilon_t \sin\theta_i = \upsilon_i \sin\theta_t$$

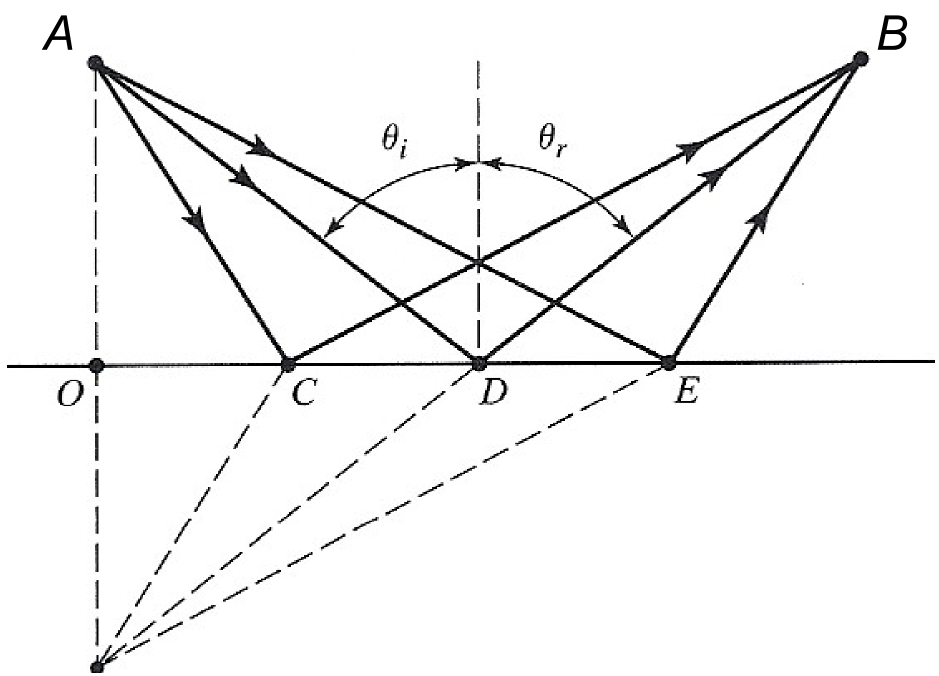
$$\Rightarrow n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$$

Σε διαδοχικά στρώματα διαφορετικών ομοιογενών μέσων, με διαφορετικό δείκτη διάθλασης το καθένα, ο χρόνος μετάβασης από το Α στο Β, δηλ. ο οπτικός δρόμος, θα είναι:

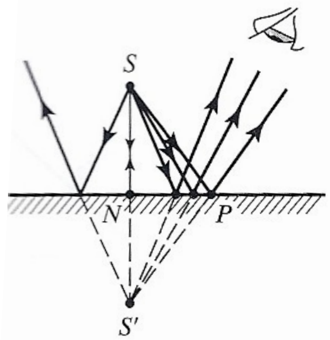
$$t_{AB} = \frac{s_1}{\upsilon_1} + \frac{s_2}{\upsilon_2} + \ldots + \frac{s_m}{\upsilon_m} = \sum_{i=1}^{m} s_i / \upsilon_i = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{m} n_i s_i$$

Αρχή της αντιστρεψιμότητας

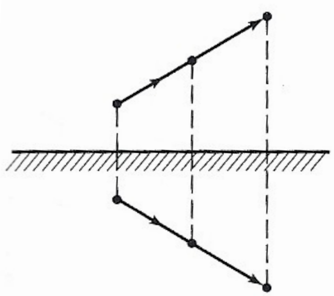
Όταν αντιστραφεί η πορεία μιας οπτικής ακτίνας, αυτή θα ακολουθήσει ακριβώς την ίδια διαδρομή, αλλά αντίστροφα (διότι το αποτέλεσμα της εφαρμογής της αρχής του Fermat δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα σημεία A και B).



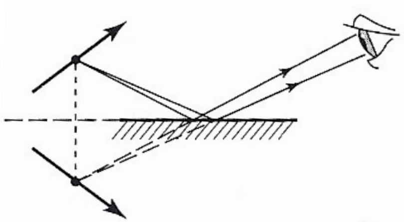
Σχηματισμός ειδώλου από ανάκλαση από επίπεδη επιφάνεια



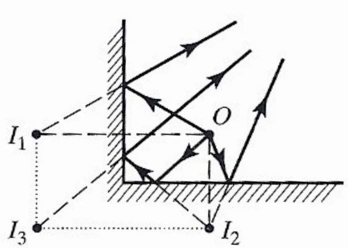
(a)



(b)



(c)



Το μάτι βλέπει το φανταστικό είδωλο S’
(Δεν μπορεί να προβληθεί π.χ. σε μία οθόνη)

Φανταστικό είδωλο εκτεταμένου αντικειμένου:

- Μεγέθυνση =1
- Αναστροφή προσανατολισμού

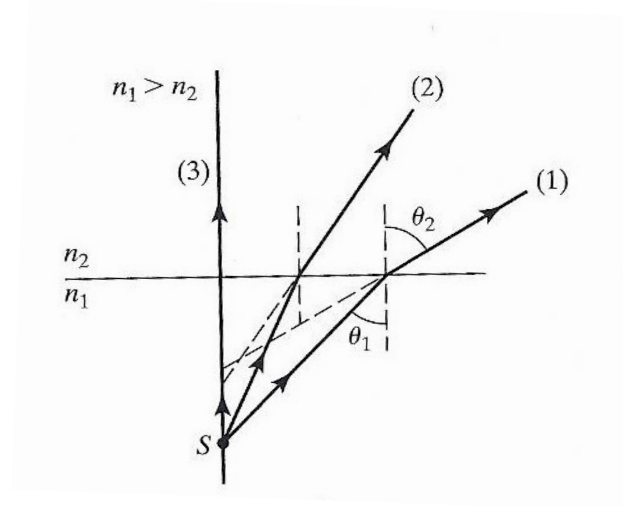
Το κάτοπτρο δεν χρειάζεται να βρίσκεται ακριβώς κάτω από το αντικείμενο

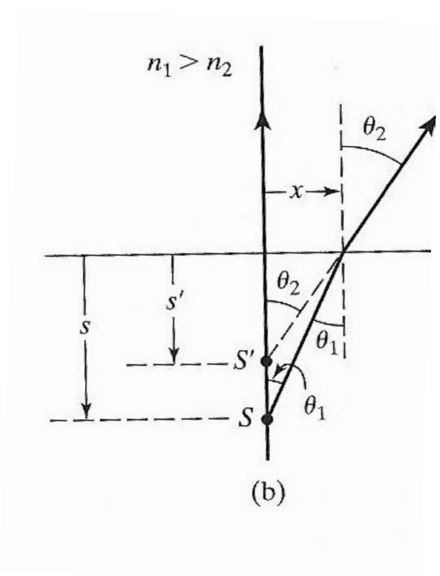
Τρία φανταστικά είδωλα:
I_1 και I_2 από απλή ανάκλαση από τα κάτοπτρα 1 και 2 και το I_3 μετά από δύο διαδοχικές ανακλάσεις

Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Σχηματισμός ειδώλου από διάθλαση από επίπεδη επιφάνεια

Οι (1), (2) και (3) δεν τέμνονται, σε κοινό σημείο οπότε δε δημιουργείται ευκρινές είδωλο.
(μόνο για παραξονικές ακτίνες έχουμε ευκρινές είδωλο)





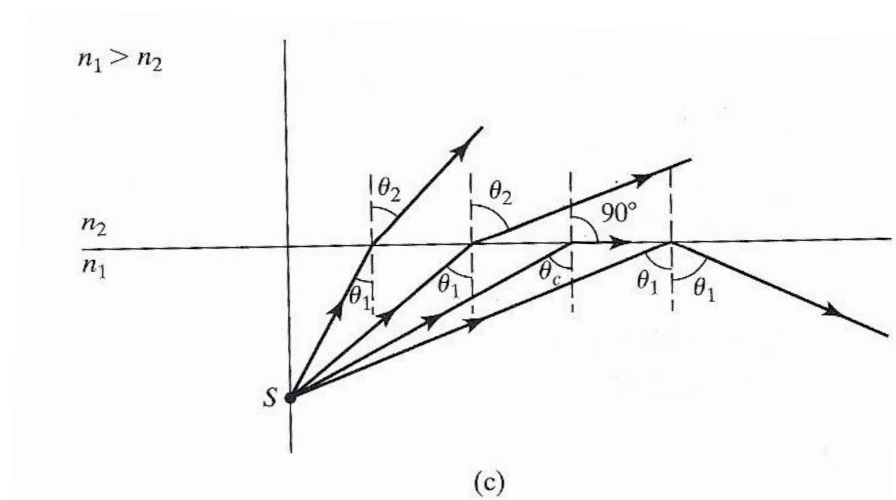
$\sin\theta \sim \tan\theta \sim \theta$

$n_1 \tan\theta_1 \sim n_2 \tan\theta_2$

$n_1(x/s) = n_2(x/s')$

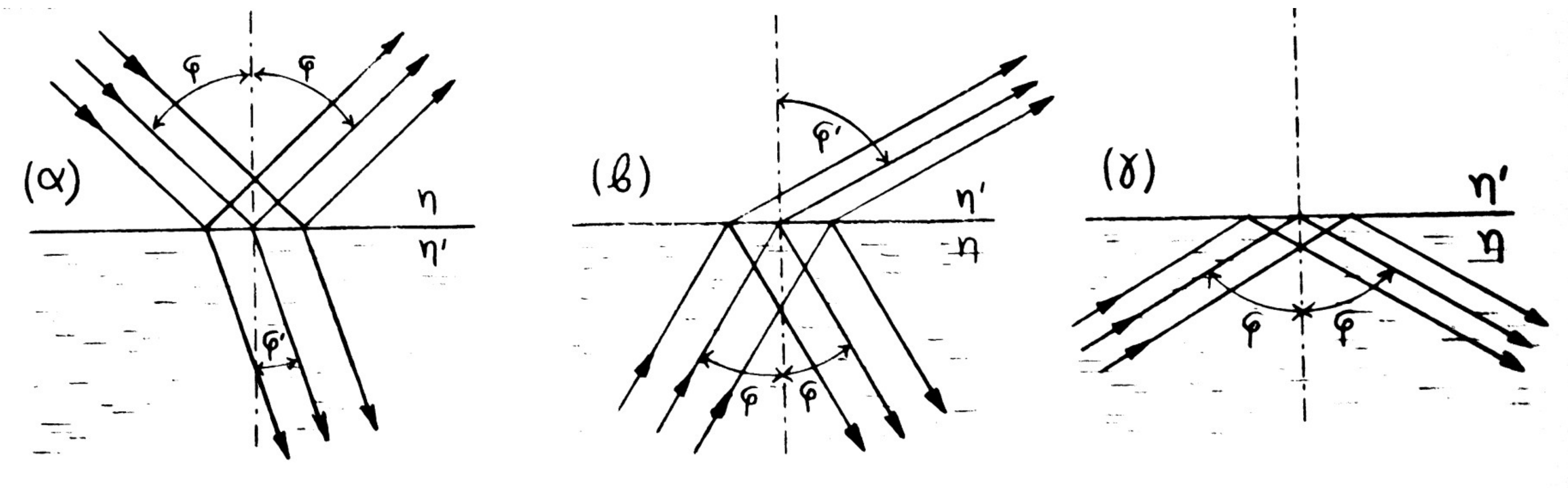
$s' = (n_2/n_1)s$

Ολική ανάκλαση $\theta_c = \sin^{-1}(n_2/n_1)$

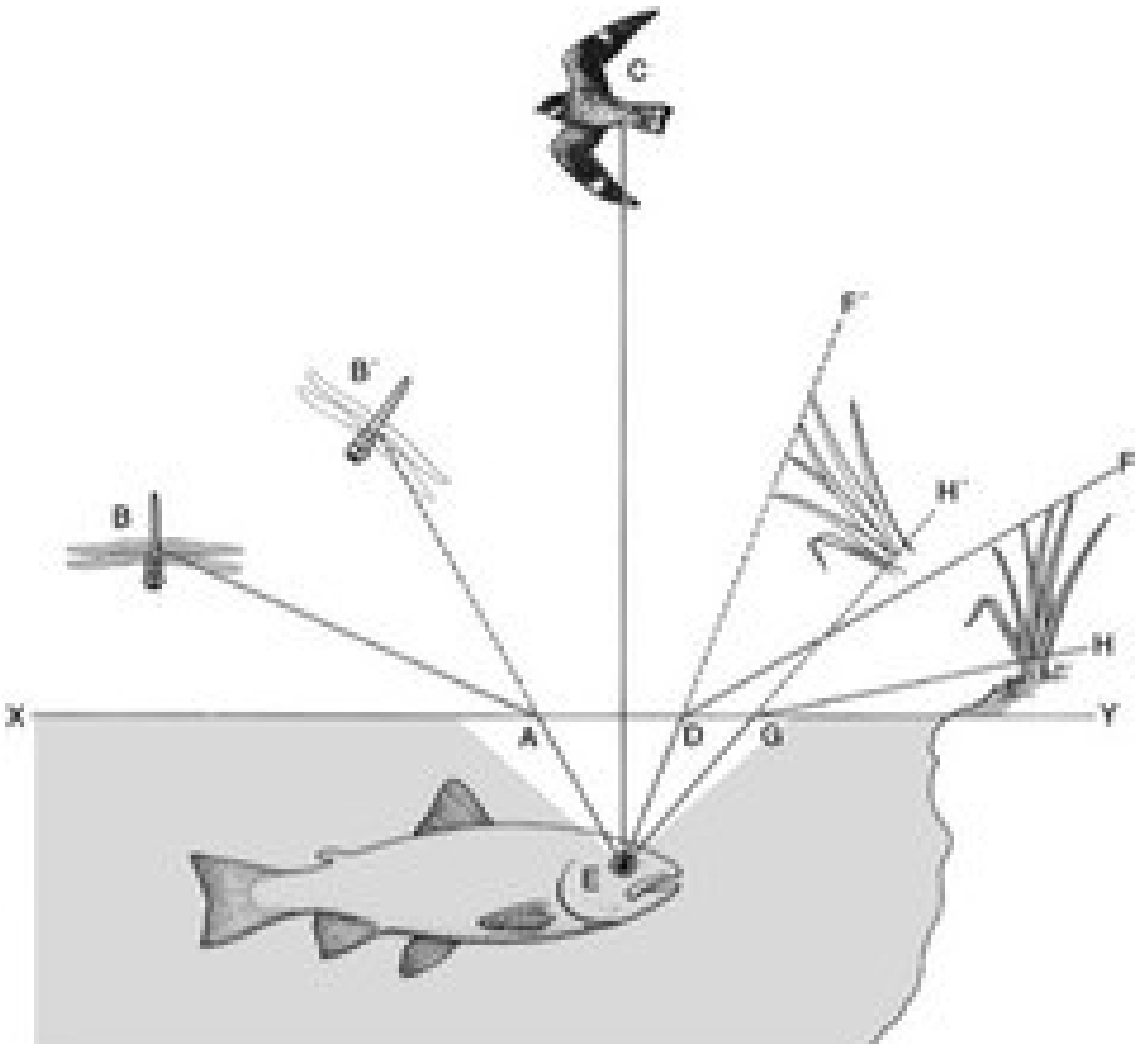


Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

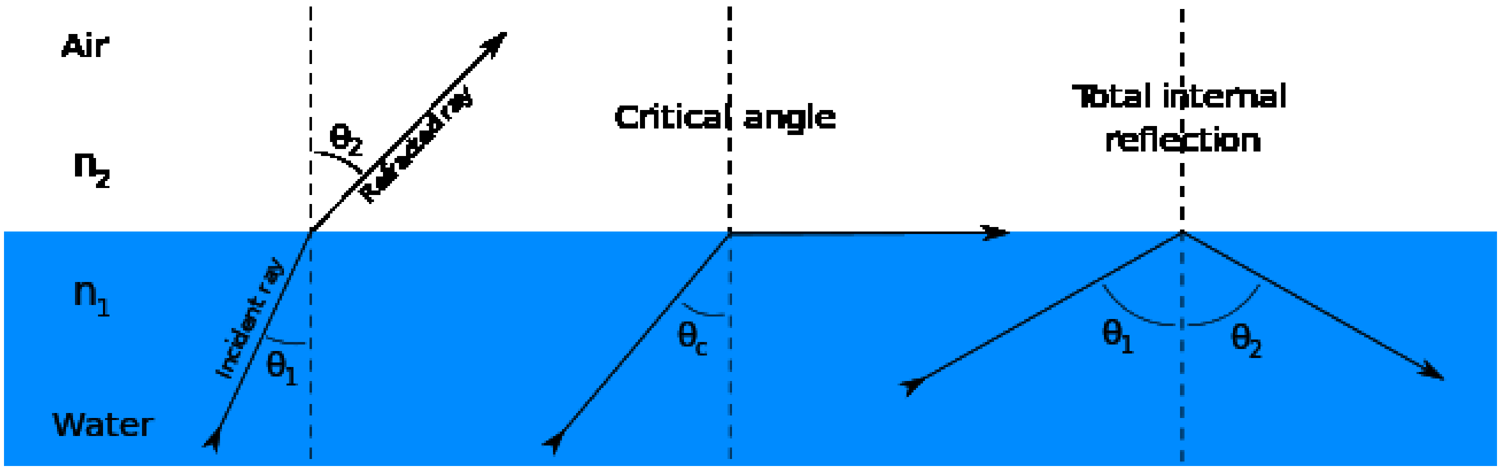
Διάθλαση με ανάκλαση (α,β) και ολική ανάκλαση (γ)

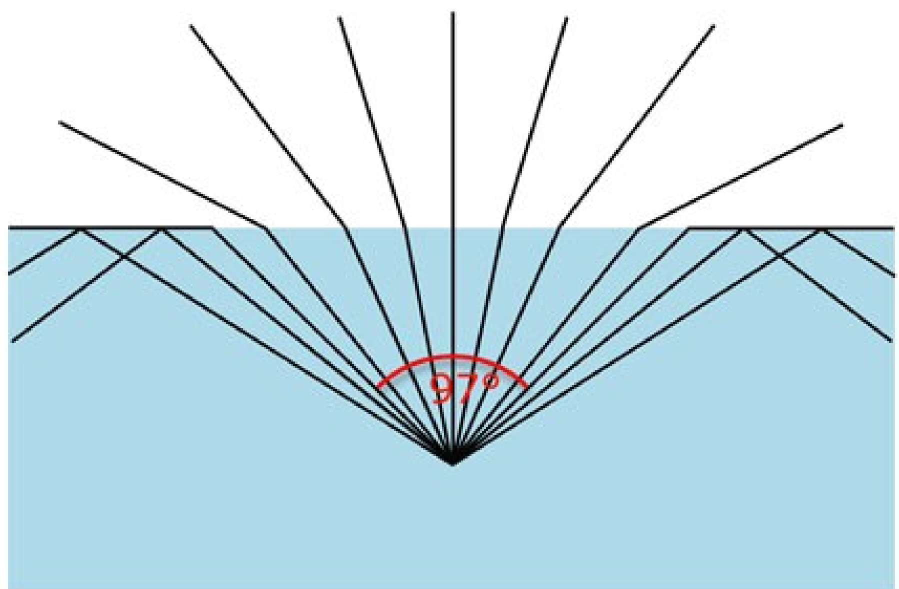


Οριακή Γωνία

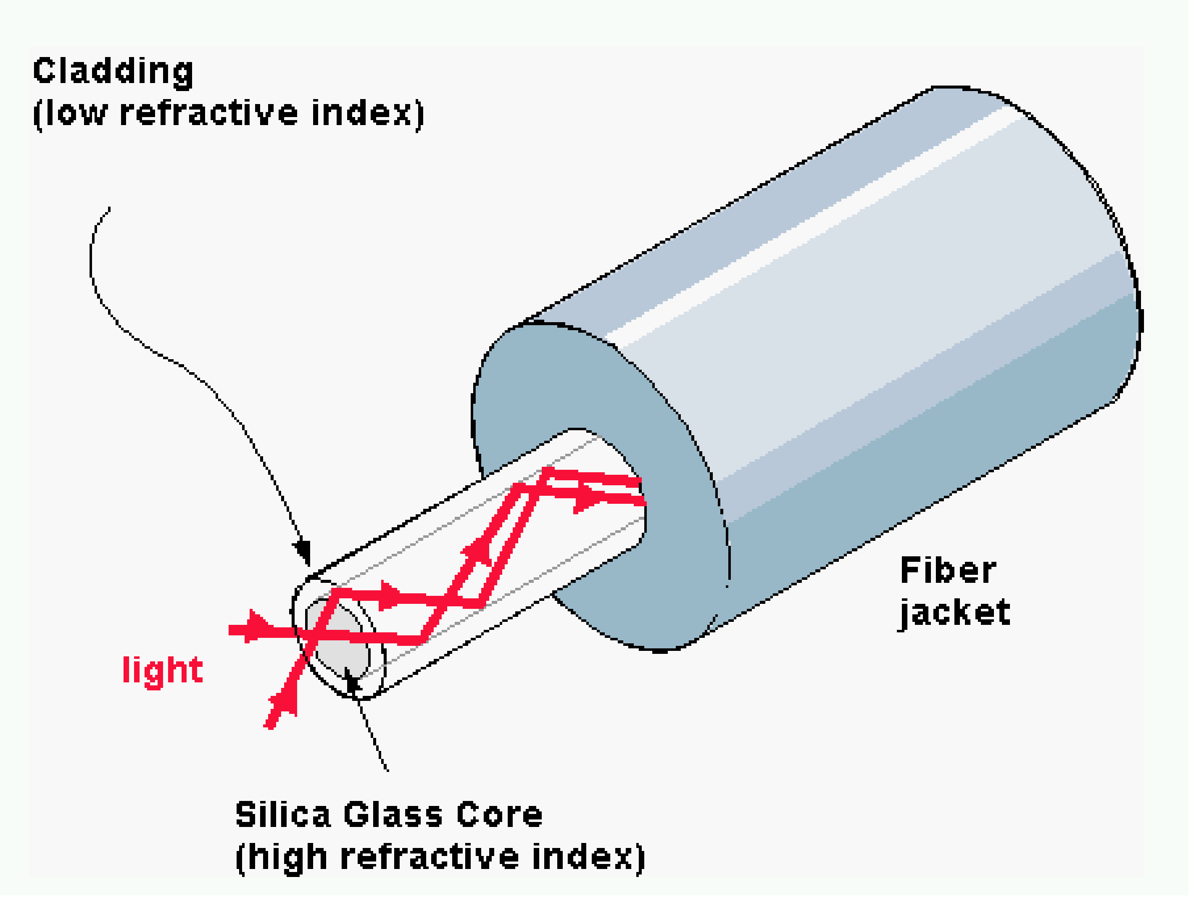


Οριακή Γωνία





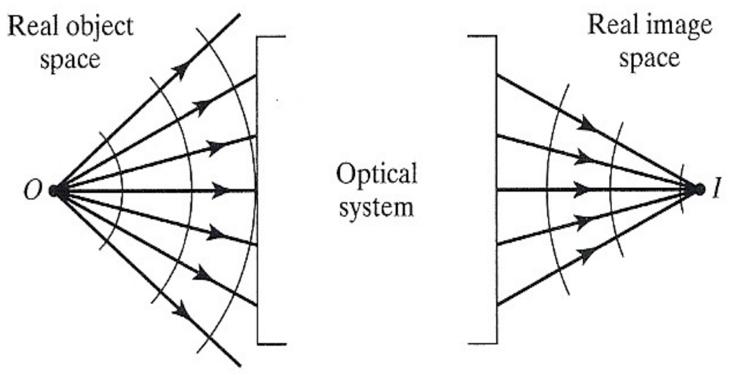
Οριακή Γωνία



Εφαρμοσμένη Οπτική

Οπτική Απεικόνιση

Απεικόνιση από οπτικό σύστημα



1. Υποθέτουμε ότι τα διάφορα υλικά του οπτικού συστήματος είναι ισότροπα και ομοιογενή και ότι επομένως χαρακτηρίζονται από ένα συγκεκριμένο δείκτη διάθλασης το καθένα.

2. Υποθέσουμε ότι το οπτικό σύστημα επανακατευθύνει τις ακτίνες έτσι ώστε, εξερχόμενες αυτές από το οπτικό σύστημα να εισέλθουν στην «*περιοχή πραγματικών ειδώλων*» συγκλίνοντας προς ένα σημείο, το είδωλο *I*

Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Σύμφωνα με την αρχή του Fermat: εφόσον η κάθε μια από τις ακτίνες αυτές ξεκινά από το ίδιο σημείο *O* και καταλήγει στο ίδιο σημείο *I* , θα πρέπει να αντιστοιχούν σε ίσους χρόνους διέλευσης, γι' αυτό και λέγονται ***ισόχρονες***.

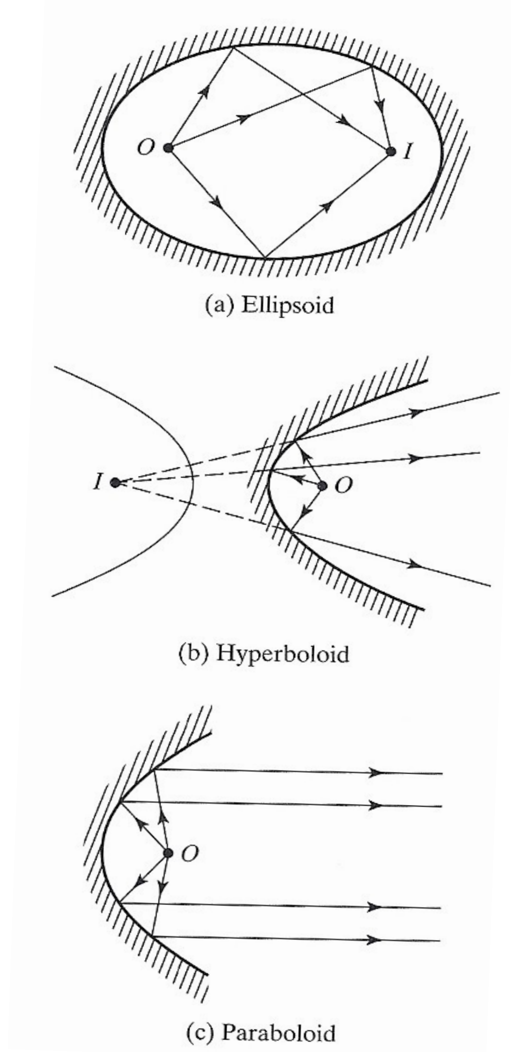
Σύμφωνα με την αρχή της αντιστρεψιμότητας, εάν το *I* είναι το αντικείμενο, τότε κάθε μια από τις ακτίνες θα ακολουθήσει ακριβώς την αντίστροφη πορεία και θα σχηματιστεί είδωλο στο σημείο *O*.

Τα σημεία *O* και *I* ονομάζονται ***συζυγή*** *σημεία* για το οπτικό σύστημα. Σε ένα ιδανικό οπτικό σύστημα, όλες οι ακτίνες που προέρχονται από το *O* και περνούν μέσα από το οπτικό σύστημα, και μόνο αυτές, θα εστιαστούν στο *I*.

Καρτεσιανές επιφάνειες

Ανακλαστικές ή διαθλαστικές επιφάνειες που σχηματίζουν τέλεια είδωλα, ονομάζονται *καρτεσιανές επιφάνειες*.

Οι ανακλαστικές καρτεσιανές επιφάνειες είναι κωνικές τομές



(a) Ellipsoid

Φανταστικό είδωλο

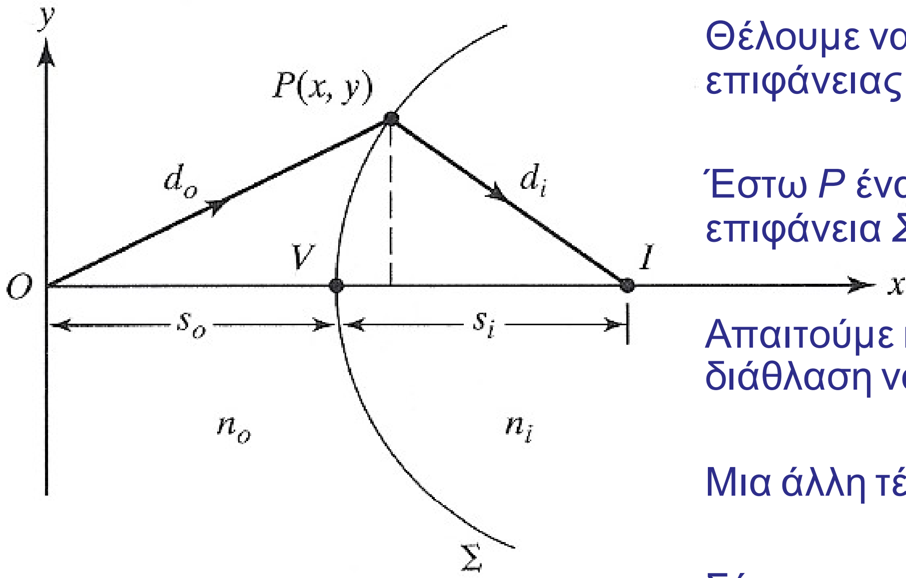
(b) Hyperboloid

Είδωλο στο άπειρο

(c) Paraboloid

Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Διαθλαστικές καρτεσιανές επιφάνειες



Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της κατάλληλης διαθλώσας επιφάνειας έτσι ώστε το σημείο *O* να απεικονίζεται στο σημείο *I*.

Έστω *P* ένα οποιοδήποτε σημείο πάνω στη ζητούμενη επιφάνεια *Σ*.

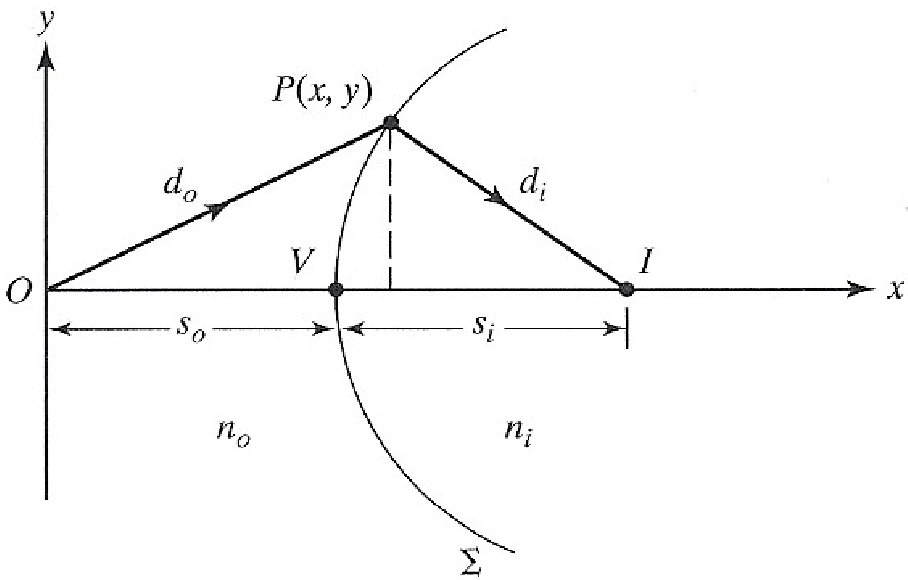
Απαιτούμε κάθε ακτίνα από το O, όπως η *OPI* αφού υποστεί διάθλαση να περνά από το *I*.

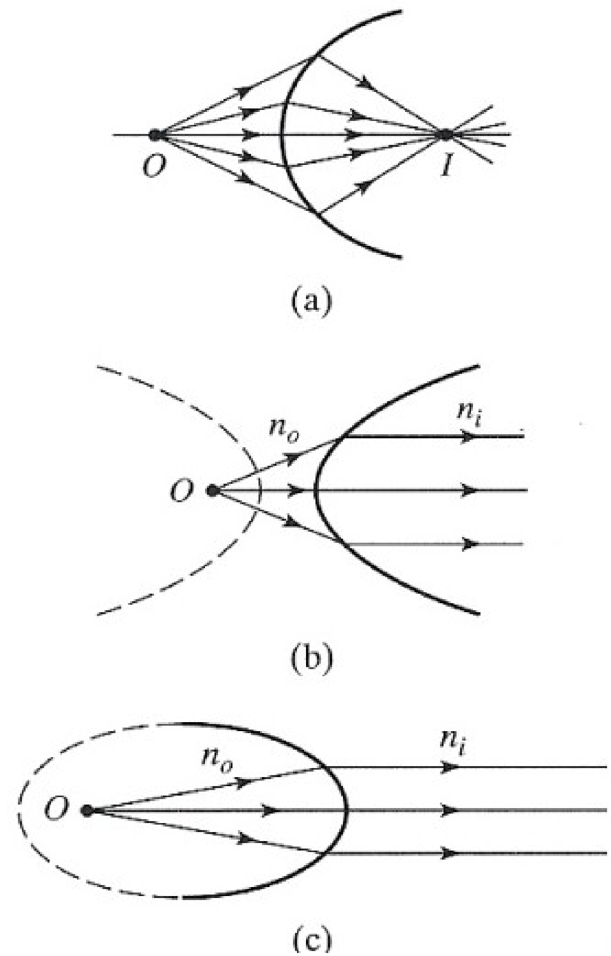
Μια άλλη τέτοια ακτίνα είναι προφανώς η *OVI*.

Σύμφωνα με την αρχή του Fermat, θα πρέπει οι δυο αυτές ακτίνες να είναι ισόχρονες.

Ο χρόνος διάδοσης μιας ακτίνας μέσα σε ένα διαφανές μέσο πάχους *x* και με δείκτη διάθλασης *n* είναι t=x/υ=xn/c

Διαθλαστικές καρτεσιανές επιφάνειες





$$n_o d_o + n_I d_I = n_o s_o + n_I s_I = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow$$

$$n_o (x^2 + y^2)^{1/2} + n_i \left[\left(s_o + s_I - x \right)^2 + y^2 \right]^{1/2} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Η σταθερά στην εξίσωση αυτή προκύπτει από το άθροισμα $n_o s_o + n_I s_I$

Η εξίσωση περιγράφει ένα καρτεσιανό ωοειδές εκ περιστροφής

Μη ιδανική απεικόνιση

Μη ιδανική απεικόνιση μπορεί να συμβεί στη πράξη εξαιτίας:

- **σκέδασης του φωτός (light scattering)**
- **οπτικών σφαλμάτων (optical aberration)**
- **περίθλασης (diffraction)**

- Κάποιες ακτίνες από το Ο δεν φτάνουν στο Ι λόγω απωλειών από ανάκλαση πάνω σε διαθλώσες επιφάνειες, λόγω διάχυτης ανάκλασης από ανακλαστικές επιφάνειες, και λόγω σκέδασης από ανομοιογένειες στα διαφανή μέσα. Η απώλεια ακτίνων από αυτές τις αιτίες συνεπάγεται απλά την ελάττωση της φωτεινότητας του ειδώλου.

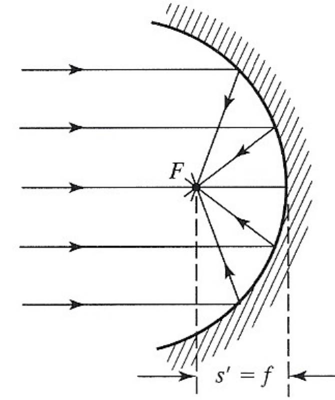
- Υπάρχουν και ακτίνες που λόγω σκέδασης καταλήγουν στο σημείο Ι, έχοντας ξεκινήσει από μη συζυγή σημεία (του αντικειμένου), κι έτσι προκαλούν υποβάθμιση της ποιότητας του ειδώλου.

- Όταν το ίδιο το οπτικό σύστημα δεν μπορεί να επιτύχει αντιστοιχία 1-1 μεταξύ ακτίνων του αντικειμένου και του ειδώλου, τότε μιλάμε για «σφάλματα» του οπτικού συστήματος.

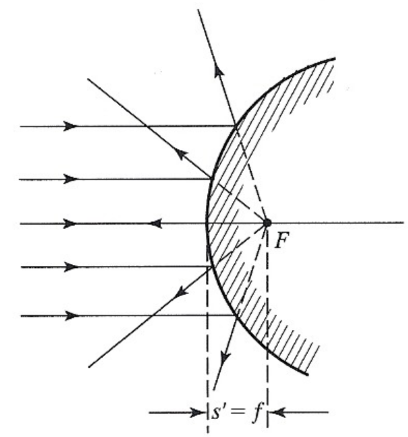
- Ολα τα οπτικά συστήματα δέχονται μόνο ένα μέρος του κυματικού μετώπου που αναδύεται από το αντικείμενο. Έτσι το είδωλο δεν μπορεί να είναι απόλυτα σαφές, ακόμα και αν δεν υπάρχει κανένα άλλο σφάλμα απεικόνισης. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η απεικόνιση είναι στο *περιθλαστικό όριο* (“diffraction limited”), και το οπτικό σύστημα λέγεται σύστημα *περιθλαστικού ορίου (diffraction limited optics)*. Προφανώς πρόκειται για φαινόμενο που σχετίζεται με την κυματική φύση του φωτός, και δεν λαμβάνεται υπόψη στην προσέγγιση της γεωμετρικής οπτικής.

Ανάκλαση από κυρτή σφαιρική επιφάνεια

Τα σφαιρικά κάτοπτρα μπορεί να είναι είτε κοίλα είτε κυρτά ως προς το αντικείμενο *O*, ανάλογα με το αν το κέντρο καμπυλότητας, *C*, είναι στην ίδια πλευρά με το αντικείμενο ή όχι.

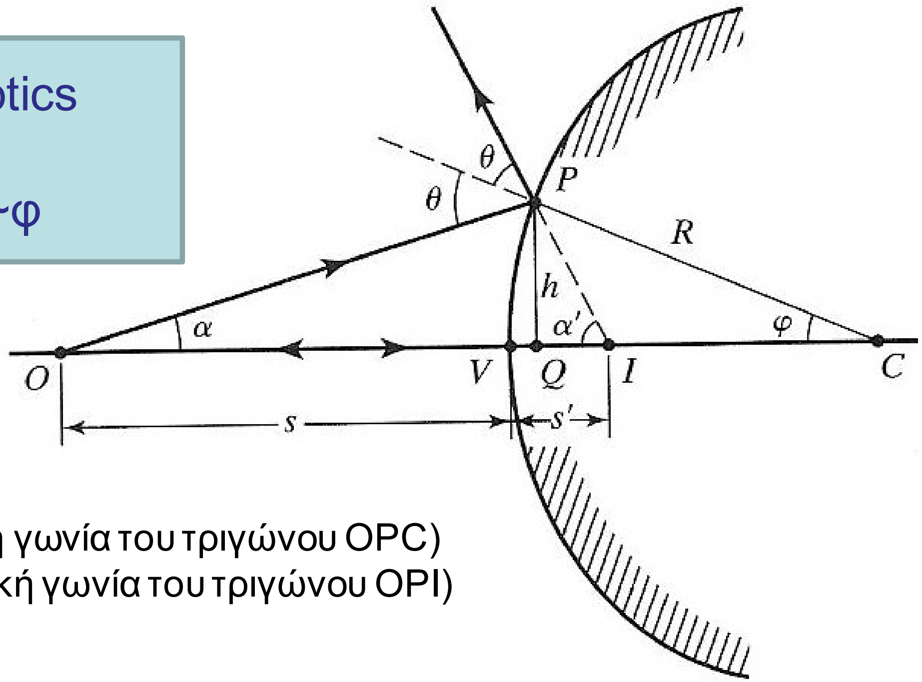


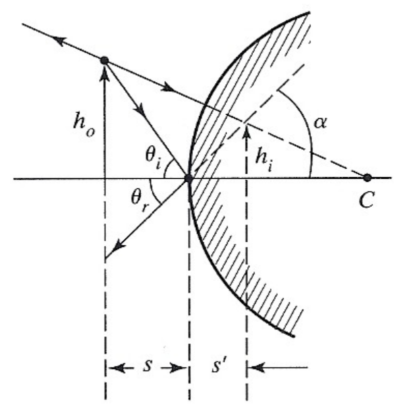
(a)



(b)

Gaussian Optics
cosφ~1
sinφ~tanφ~φ





(c)

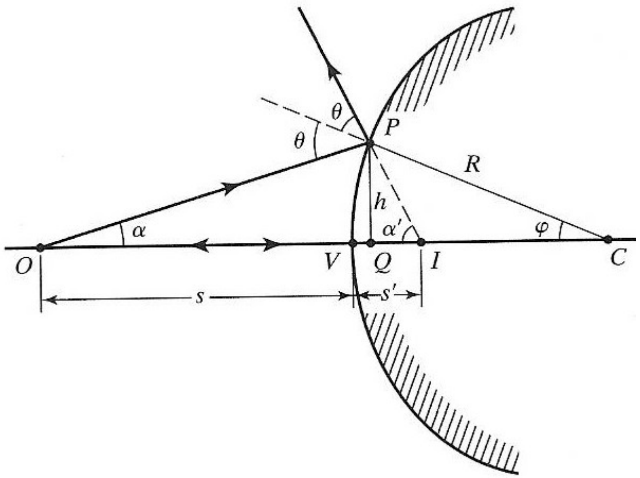
θ = α+φ (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου OPC)
2θ = α+α΄ (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου OPI)

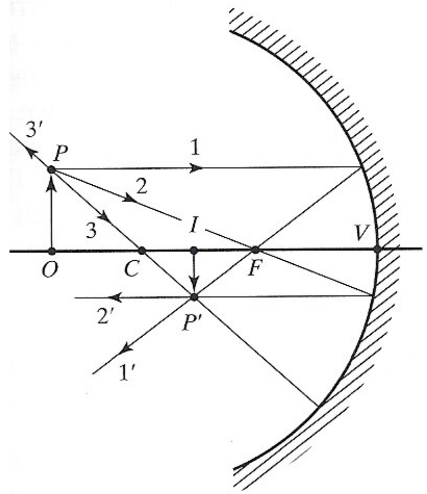
Επομένως: α-α΄ = -2φ

Αν αντικαταστήσουμε τις γωνίες με τις εφαπτόμενές τους:

$$\frac{h}{s} - \frac{h}{s'} = -2\frac{h}{R} \Rightarrow \frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R}$$

Ανάκλαση από κυρτή και κοίλη σφαιρική επιφάνεια





$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R}$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{2}{R} \Rightarrow f = -\frac{R}{2}$$

Οι συνθήκες προσήμων

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=-\frac{2}{R}$$

- Η απόσταση του αντικειμένου *O* από την κορυφή *V*, *s*, είναι θετική όταν το *O* είναι στα αριστερά του *V*. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε πραγματικό αντικείμενο. Αν το *O* είναι στα δεξιά του *V*, τότε το *s* είναι αρνητικό, και το αντικείμενο φανταστικό.

- Η απόσταση του ειδώλου *I* από την κορυφή *V*, *s΄*, είναι θετική όταν το *I* είναι στα αριστερά του *V*. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε πραγματικό είδωλο. Αν το *I* είναι στα δεξιά του *V*, τότε το *s΄* είναι αρνητικό, και το είδωλο φανταστικό.

- Η ακτίνα καμπυλότητας *R* είναι θετική όταν το *C* είναι στα δεξιά του *V*, που αντιστοιχεί σε κυρτό κάτοπτρο, και αρνητική όταν το *C* είναι στα αριστερά του *V*, που αντιστοιχεί σε κοίλο κάτοπτρο.

Διάθλαση από σφαιρική επιφάνεια

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

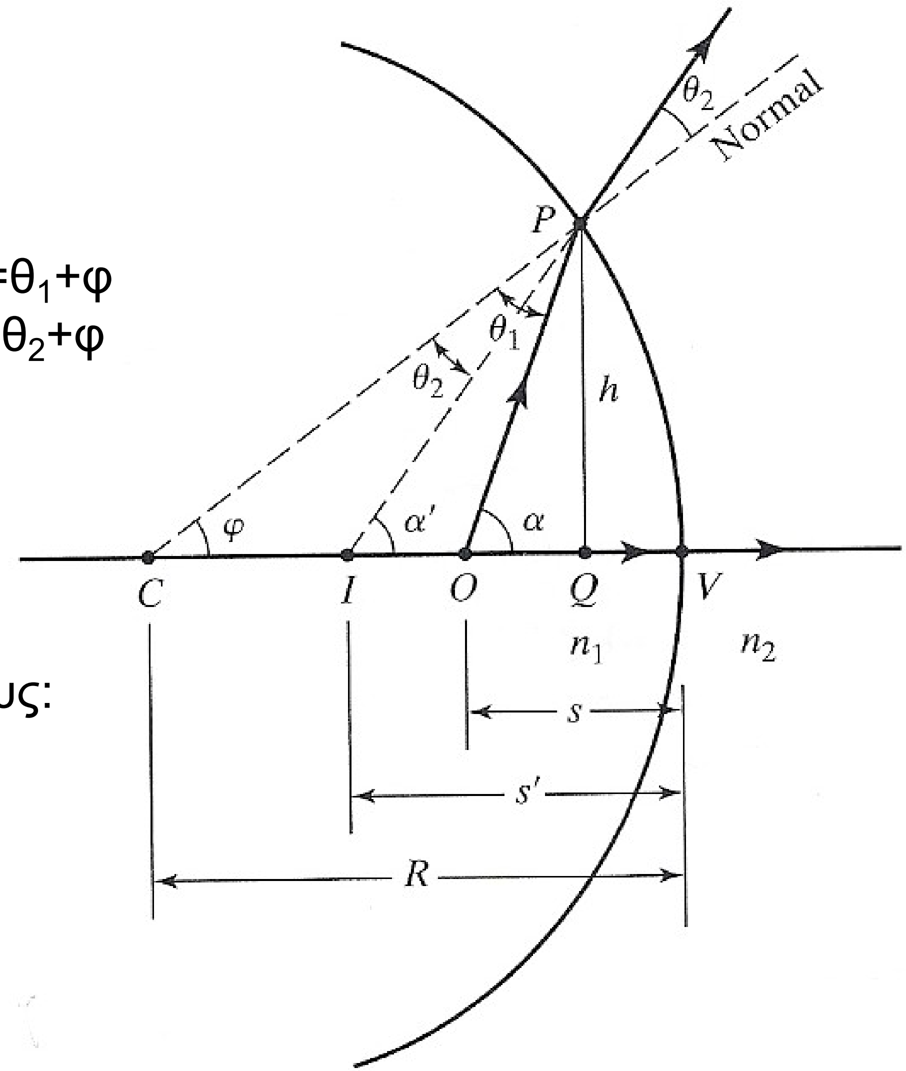
Στο τρίγωνο CPO η εξωτερική γωνία: $\alpha=\theta_1+\varphi$
Στο τρίγωνο CPI η εξωτερική γωνία: $\alpha'=\theta_2+\varphi$
Για παραξονικές ακτίνες:

$$n_1(\alpha-\varphi)=n_2(\alpha'-\varphi)$$

Οι γωνίες α, α΄και φ μπορούν να αντικατασταθούν με τις εφαπτόμενές τους:

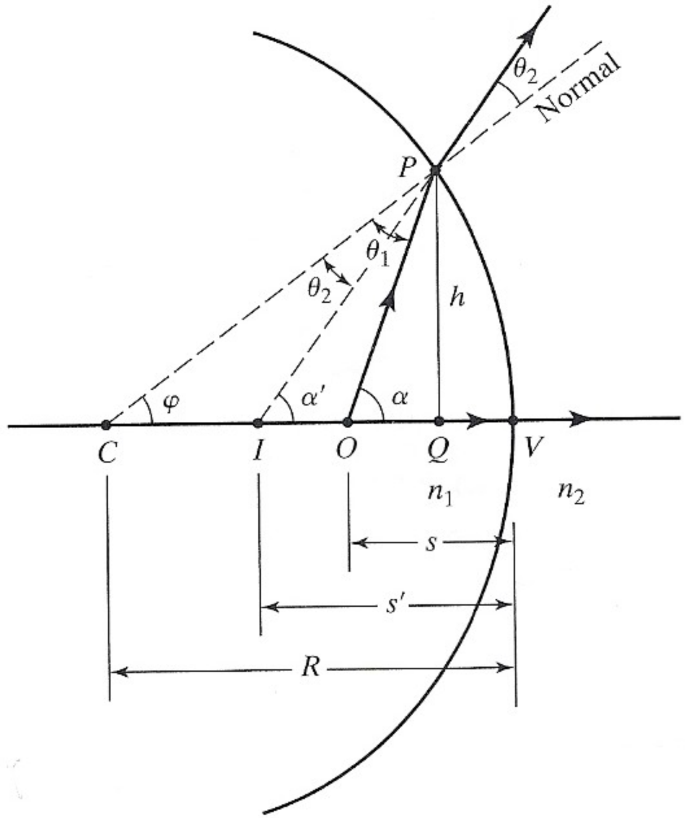
$$n_1\left(\frac{h}{s}-\frac{h}{R}\right)=n_2\left(\frac{h}{s'}-\frac{h}{R}\right)$$

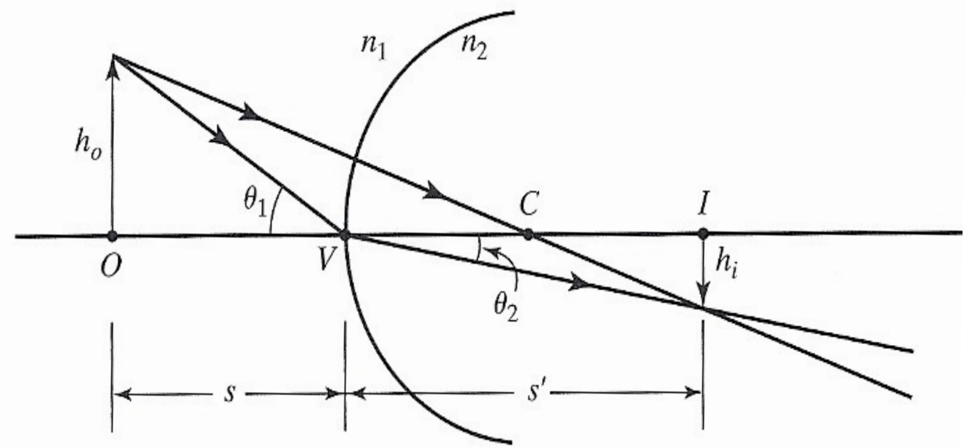
$$\frac{n_1}{s}-\frac{n_2}{s'}=\frac{n_1-n_2}{R}$$



Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Συνθήκες προσήμων για διαθλώσες επιφάνειες





$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Συνθήκες προσήμων για διαθλώσες επιφάνειες

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

s είναι + εάν το αντικείμενο βρίσκεται μπροστά από την επιφάνεια (πραγματικό αντικείμενο)

s είναι - εάν το αντικείμενο βρίσκεται πίσω από την επιφάνεια (φανταστικό αντικείμενο)

s΄ είναι + εάν το είδωλο βρίσκεται πίσω από την επιφάνεια (πραγματικό είδωλο)

s΄ είναι - εάν το είδωλο βρίσκεται μπροστά από την επιφάνεια (φανταστικό είδωλο)

R είναι + εάν το κέντρο καμπυλότητας βρίσκεται πίσω από την επιφάνεια

R είναι - εάν το κέντρο καμπυλότητας βρίσκεται μπροστά από την επιφάνεια

Διαθλαστική ισχύς

Η διαθλαστική ισχύς μιας διοπτρικής επιφάνειας είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας καμπυλότητάς της.

$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

$$P = \frac{n' - n}{R}$$

Επειδή συνήθως οι φακοί μετρούνται στον ατμοσφαιρικό αέρα, όπου n≈1, ο τύπος γίνεται:

$$P = \frac{n' - 1}{R} = \frac{1}{f}$$

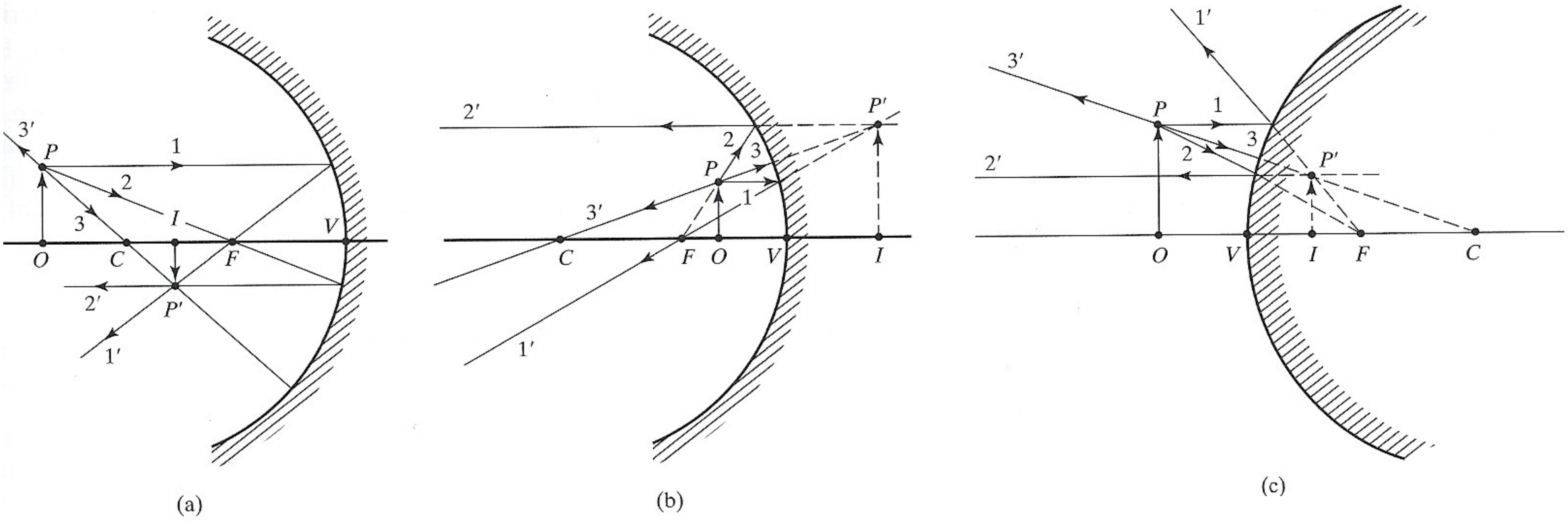
Επειδή συνήθως οι φακοί μετρούνται στον ατμοσφαιρικό αέρα, στους αποκλίνοντες φακούς η εστιακή απόσταση λαμβάνεται αρνητική και επομένως η ισχύς τους είναι και αυτή αρνητική.

Οι μονάδες μέτρησης της ισχύος ενός φακού έχουν διαστάσεις αντιστρόφου μήκους, δηλαδή m^{-1}

Η μονάδα αυτή ονομάζεται διοπτρία (διεθνώς συμβολίζεται ως dpt), δηλαδή:

$$\boxed{1 \text{ διοπτρία} = 1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}}$$

Σχηματισμός ειδώλου από σφαιρικά κάτοπτρα



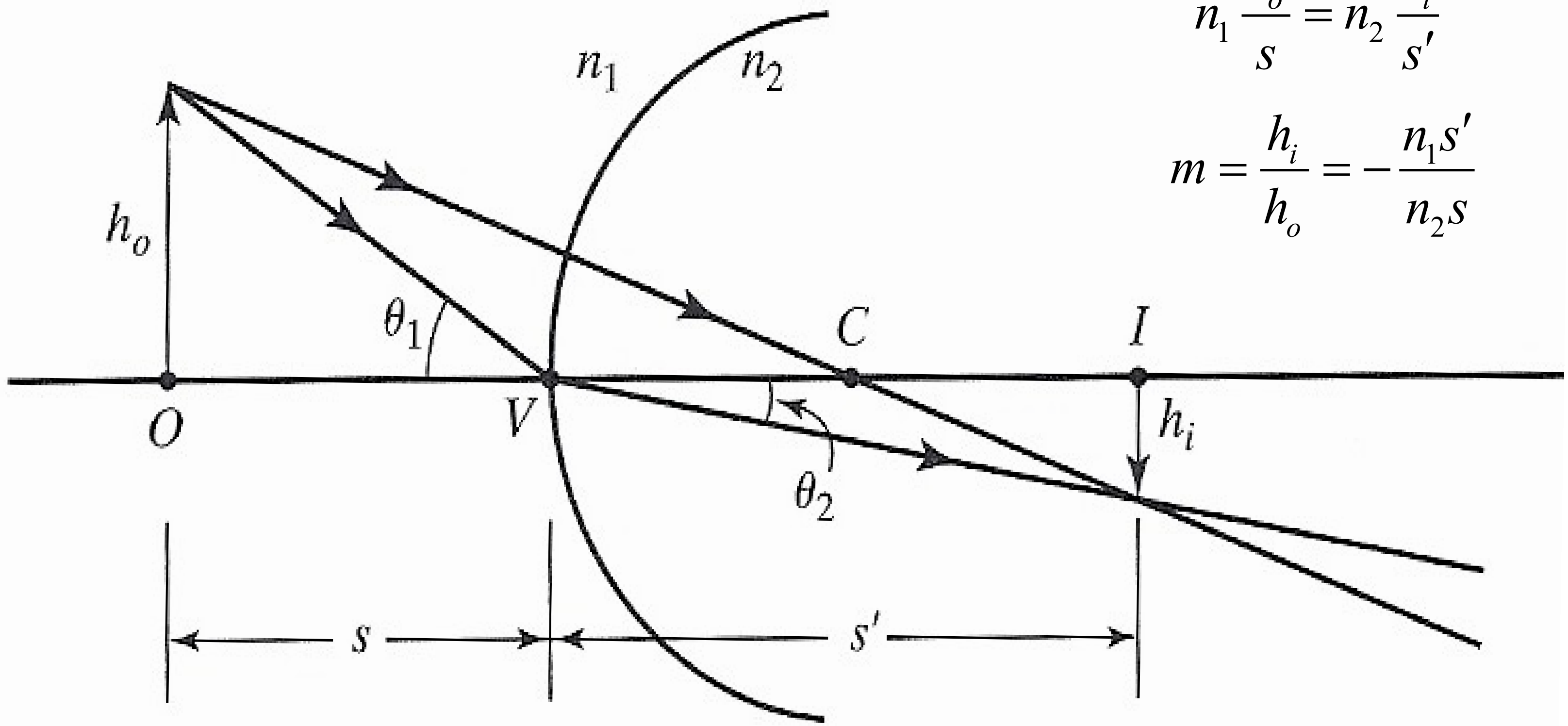
Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

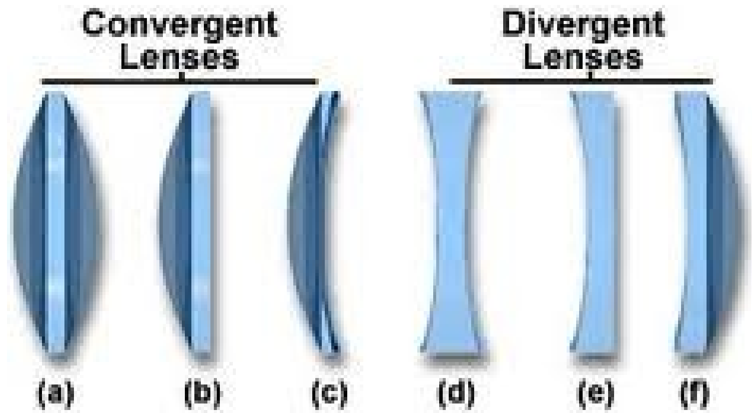
Κατακόρυφη μεγέθυνση ειδώλου από σφαιρική επιφάνεια

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$n_1 \frac{h_o}{s} = n_2 \frac{h_i}{s'}$$

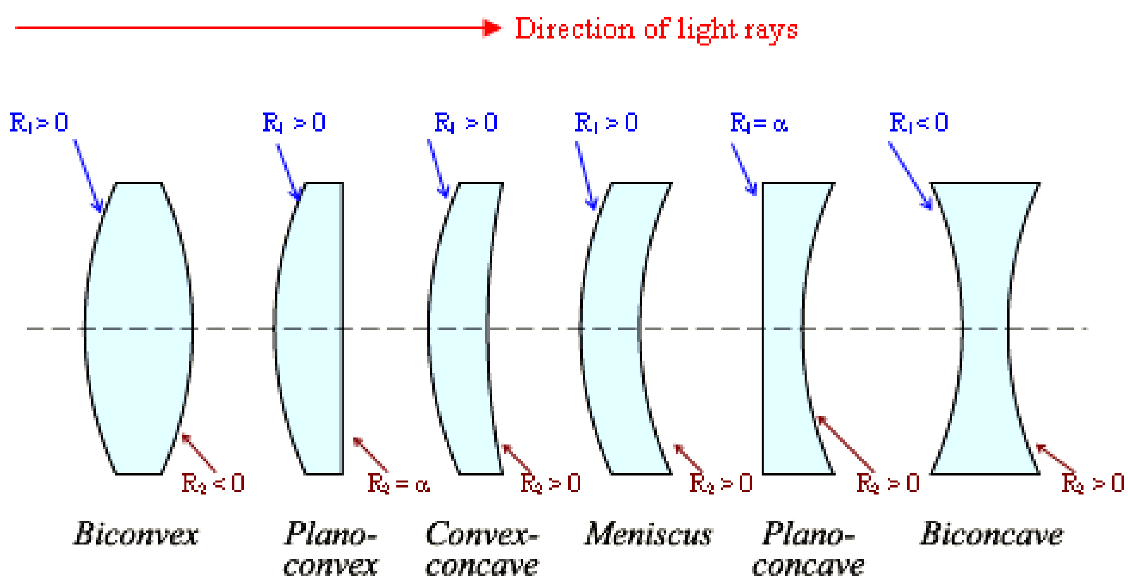
$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s}$$





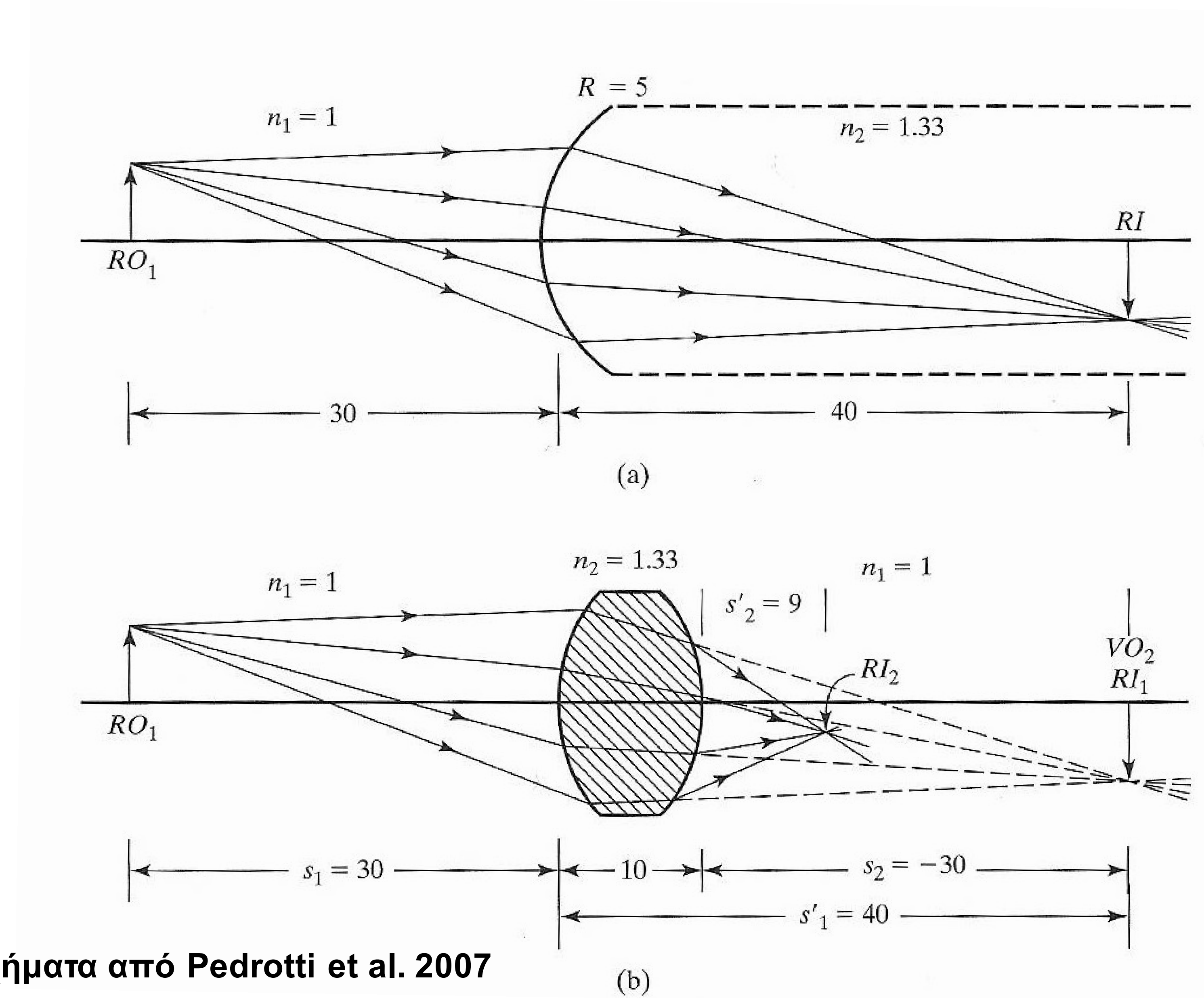
Convergent Lenses
Divergent Lenses
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)

Figure 2



Direction of light rays
$R_1 > 0$
$R_1 > 0$
$R_1 > 0$
$R_1 > 0$
$R_1 = \alpha$
$R_1 < 0$
$R_2 < 0$
$R_2 = \alpha$
$R_2 > 0$
$R_2 > 0$
$R_2 > 0$
$R_2 > 0$
Biconvex
Plano-convex
Convex-concave
Meniscus
Plano-concave
Biconcave

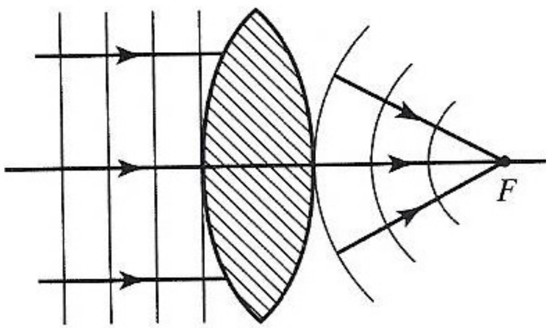
Παράδειγμα σχηματισμού ειδώλου από μια σφαιρική επιφάνεια και από <u>παχύ φακό</u> (δυο σφαιρικές διαχωριστικές επιφάνειες)



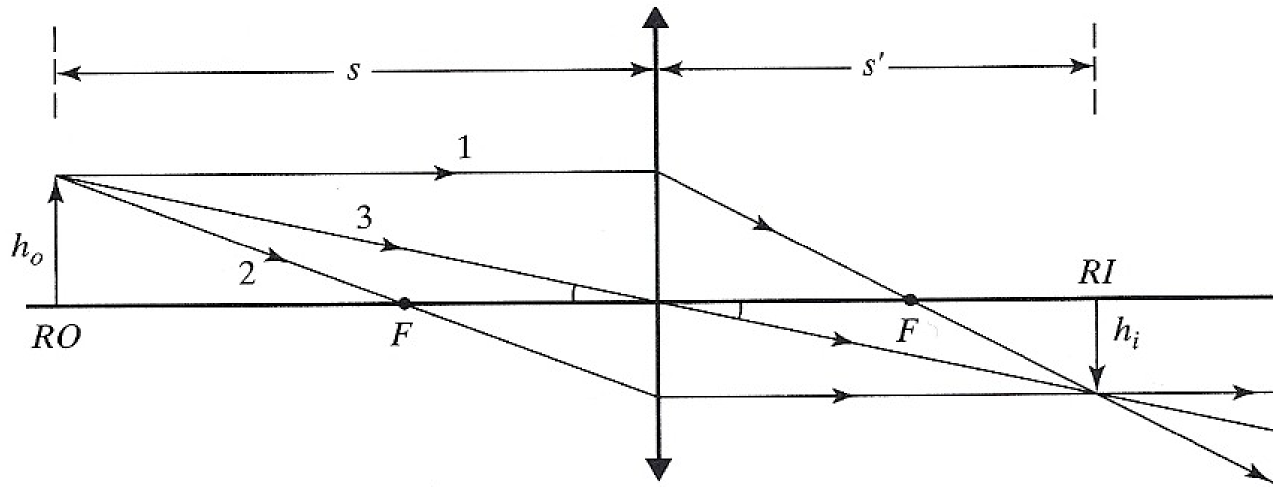
Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Λεπτοί φακοί

συγκλίνων

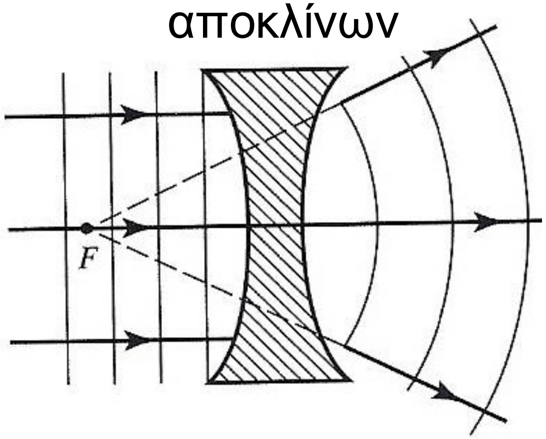


(a)

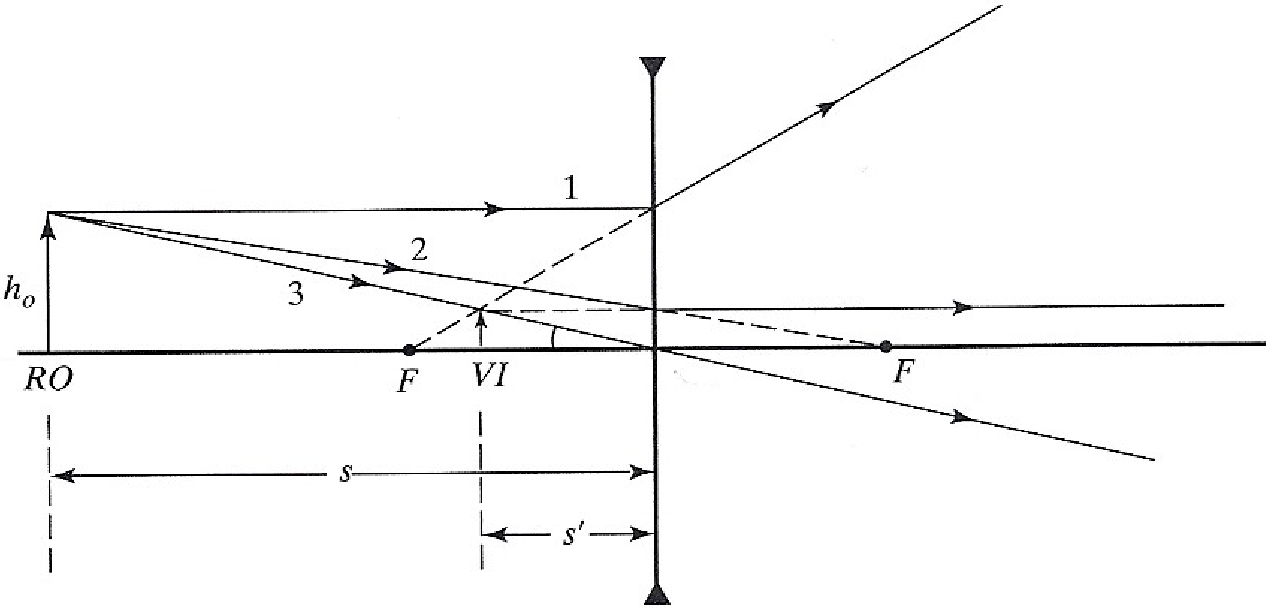


(a)

αποκλίνων



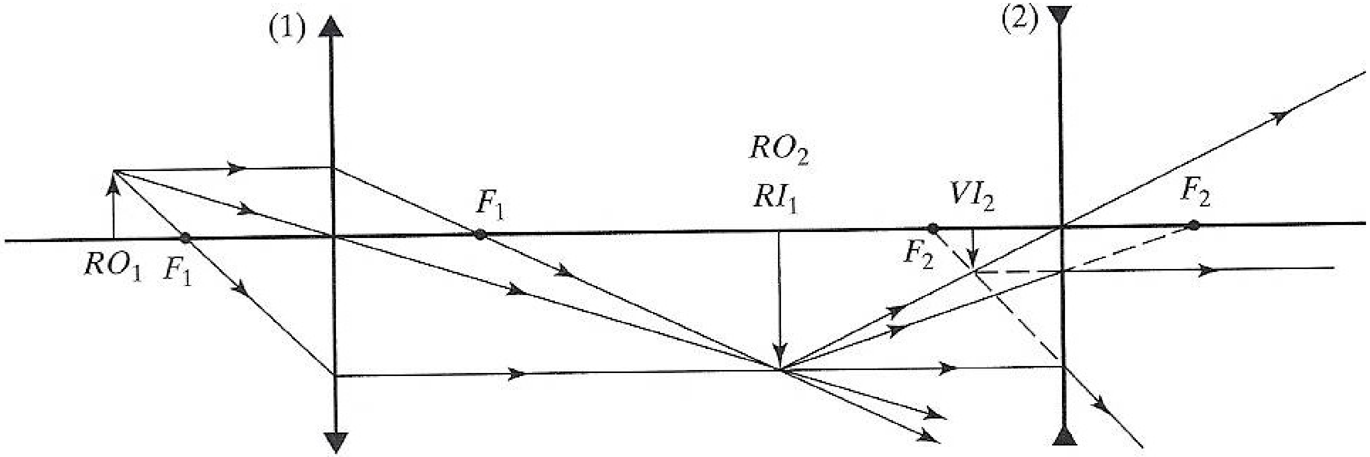
(b)



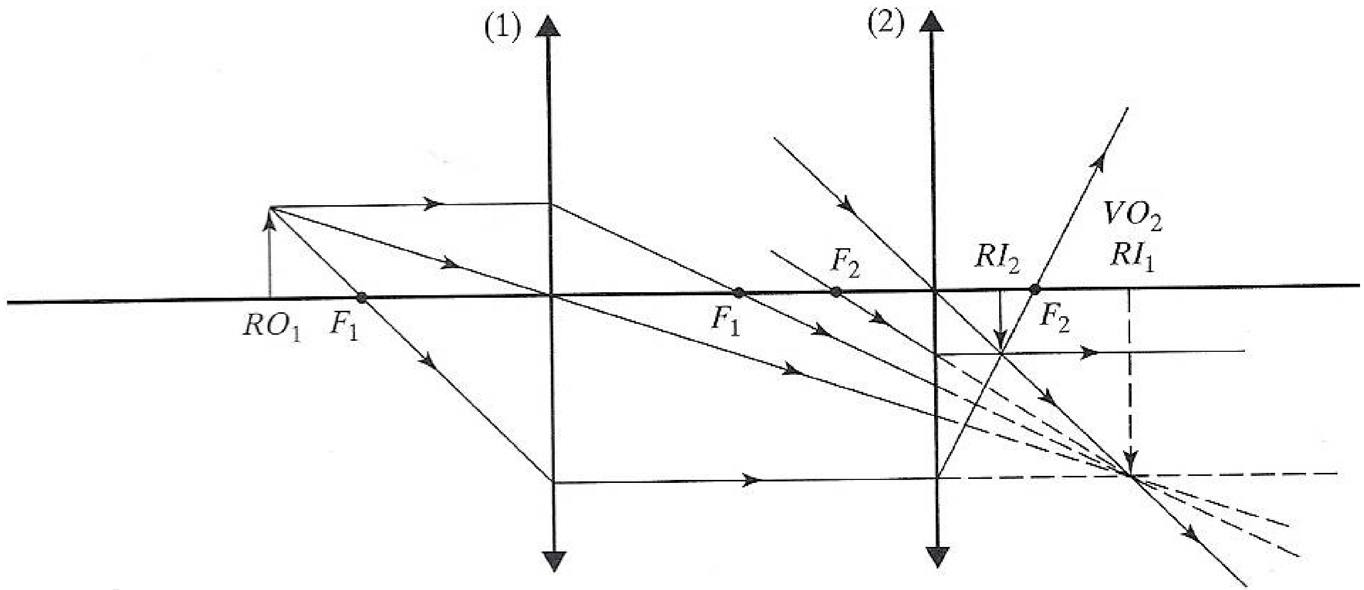
(b)

Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Σύστημα Λεπτών Φακών



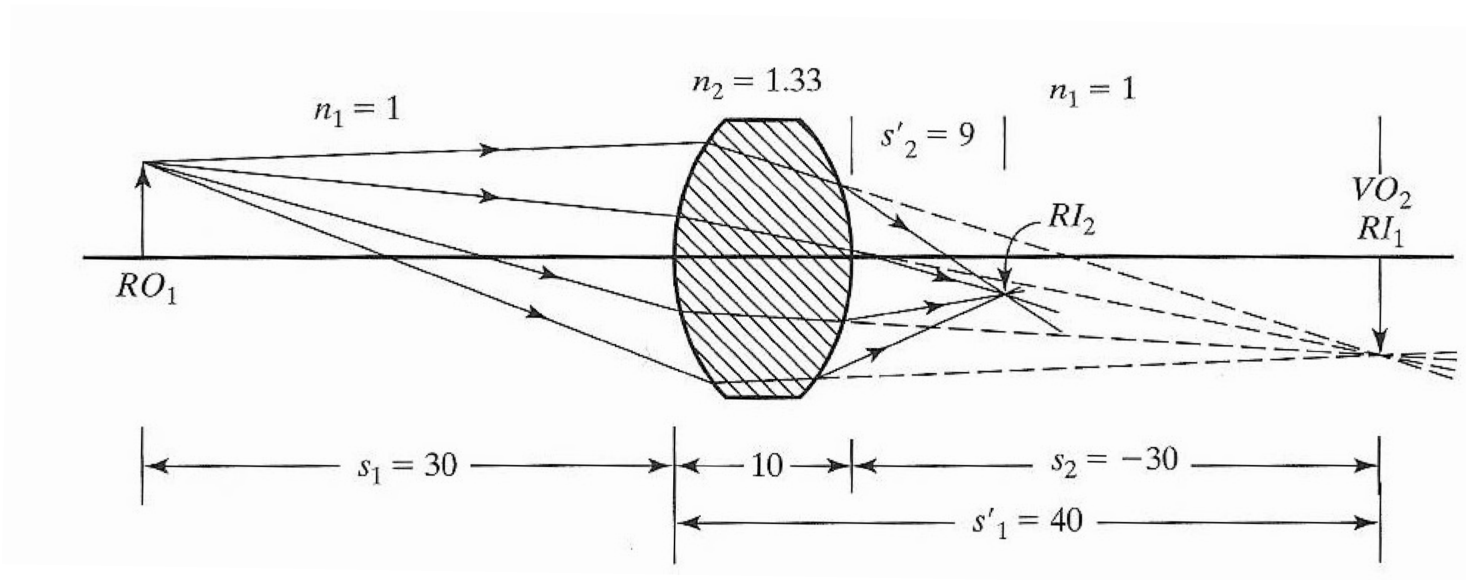
(a)



Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

(b)

Λεπτοί Φακοί



$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_1'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \qquad \frac{n_2}{s_2} + \frac{n_1}{s_2'} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}$$

$$s_2 = t - s_1'$$

Αν το πάχος του φακού είναι πολύ μικρό (t=0):

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_1}{s_2'} = (n_2 - n_1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

Λεπτοί Φακοί

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_1}{s'_2} = (n_2 - n_1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

Όταν ο φακός (με δείκτη διάθλασης n) βρίσκεται στον αέρα:

$$\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

Εξίσωση κατασκευαστών φακών

Η σχέση που δίνει την εστιακή απόσταση f ενός φακού με πάχος t_c είναι η:

$$\frac{1}{f} = (n-1)[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{t_c(n-1)}{nR_1R_2}]$$

t_c το πάχος του κέντρου του φακού
R_i οι ακτίνες καμπυλότητας του φακού
n ο δείκτης διάθλασης του φακού

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται <u>σχέση των κατασκευαστών των φακών</u> και είναι από τις σημαντικότερες σχέσεις στην Οπτική.

Στην περίπτωση των λεπτών φακών, η παραπάνω σχέση απλοποιείται στην:

$$\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \qquad \text{ή} \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

Εξίσωση κατασκευαστών φακών

Επειδή συνήθως οι φακοί μετρούνται στον ατμοσφαιρικό αέρα, όπου n≈1, ο τύπος γίνεται:

$$P = \frac{n'-1}{R} = \frac{1}{f}$$

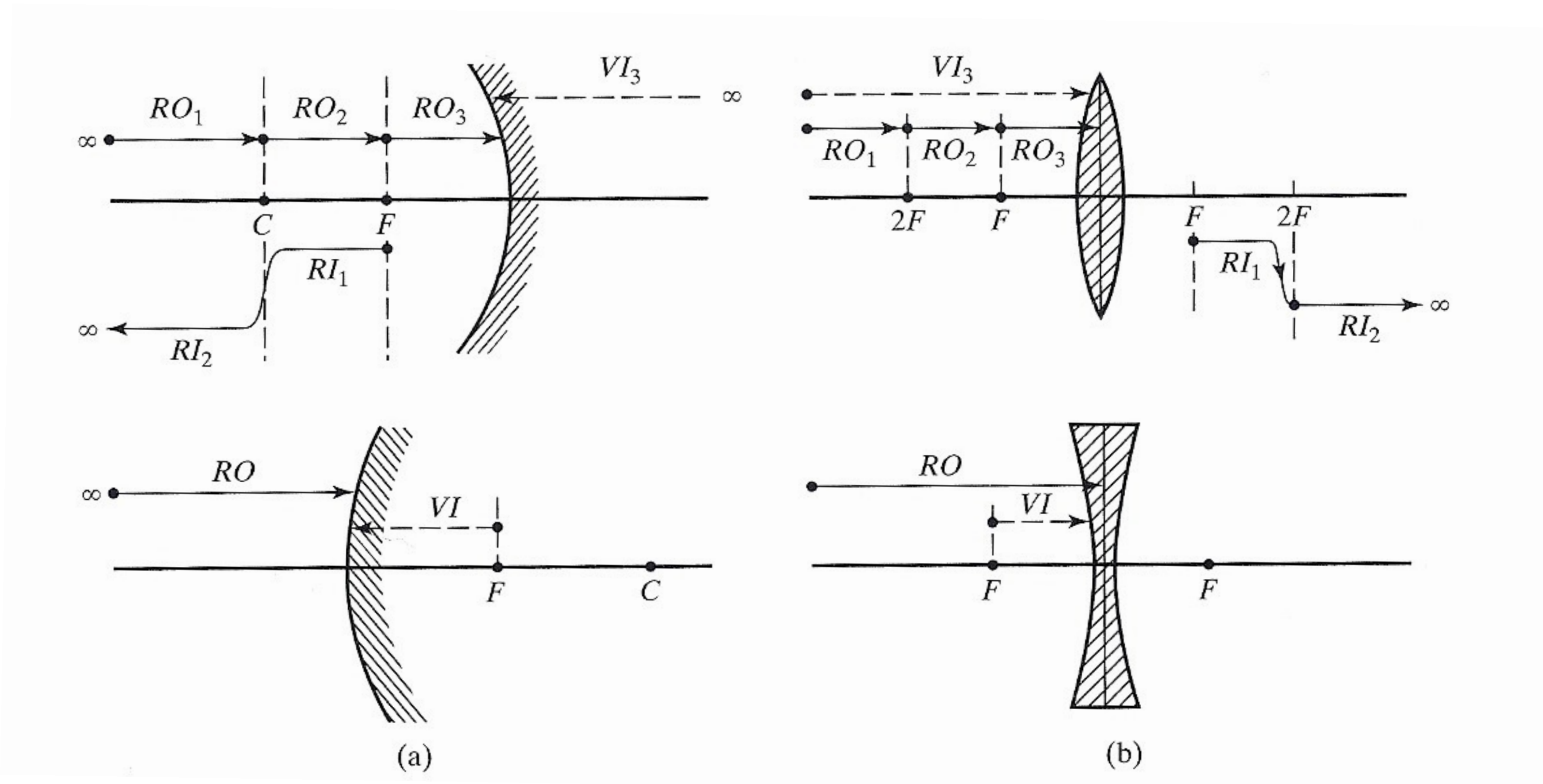
$$\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) = \frac{(n-1)}{R_1} - \frac{(n-1)}{R_2}$$

$$P = P_1 + P_2$$

Για συστήματα φακών σε μεταξύ τους απόσταση d, ισχύει:

$$P = P_1 + P_2 - dP_1P_2$$

Δημιουργία ειδώλων



Κάτοπτρα

Φακοί