

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ (2<sup>ο</sup> Φυλλάδιο)

- 1.** Σωματίο μάζας  $m$  κινείται σε δυναμικό  $V(x)$ . Ναδειχθεί ότι το διακριτό μέρος του φάσματος της Χαμιλτωνιανής (δέσμιες καταστάσεις) έχει τις κάτωθι ιδιότητες:
- α.** Οι ιδιοτιμές της ενέργειας είναι μη εκφυλισμένες.
  - β.** Οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να ληφθούν πραγματικές.
  - γ.** Εάν το δυναμικό είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή  $V(-x) = V(x)$ , οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας είναι είτε άρτιες είτε περιπτές συναρτήσεις.

- 2.** Ο τελεστής της ομοτιμίας  $\hat{\mathcal{P}}$  ορίζεται ως

$$\hat{\mathcal{P}}\psi(x) = \psi'(-x) = \psi(x)$$

- α.** Ναδειχθεί ότι ο  $\hat{\mathcal{P}}$  είναι ερμιτιανός και μοναδιαίος.
- β.** Ναευρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του.
- γ.** Ναδείχθεί ότι

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}\hat{x}\hat{\mathcal{P}} &= -\hat{x}, & [\hat{\mathcal{P}}, \hat{x}^2] &= 0, \\ \hat{\mathcal{P}}\hat{p}\hat{\mathcal{P}} &= -\hat{p}, & [\hat{\mathcal{P}}, \hat{p}^2] &= 0.\end{aligned}$$

- δ.** Ναγραφούν οι ιδιοσυναρτήσεις του ελεύθερου σωματίου ως ταυτόχρονες ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτωνιανής και του τελεστή  $\mathcal{P}$ .

- 3. α.** Η μέση τιμή της ενέργειας σε κατάσταση πεπερασμένου μέτρου είναι

$$\langle E \rangle = \frac{(\psi, \hat{H}\psi)}{(\psi, \psi)}$$

Ναδειχθεί ότι η μέση τιμή της ενέργειας σε οποιαδήποτε κατάσταση είναι μεγαλύτερη η ίση από την ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης.

- β.** Με δεδομένο ότι η κυματική συνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο ναδείξετε ότι αυτή δεν μπορεί να είναι εκφυλισμένη. Επίσης ναδείξετε ότι οι κυματικές συναρτήσεις όλων των άλλων ενεργειακών σταθμών έχουν μηδενισμούς.
- γ.** Ναδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών μίας ενεργειακής στάθμης η κυματική συνάρτηση της επόμενης στάθμης θα μηδενίζεται τουλάχιστον σε ένα σημείο.
- δ.** Ναδειχθεί ότι η θεμελιώδης στάθμη δεν μπορεί να μηδενίζεται σε κανένα σημείο στο εσωτερικό του χώρου του προβλήματος.