ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ & ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

Κ. Βελλίδης & Θ. Μερτζιμέκης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, 2023

- Πρόσθεση Ισοσπίν: Σύνθεση Δύο Γεύσεων
- Υπερφορτίο: Σύνθεση Τριών Γεύσεων

Χειρισμός του ισοσπίν (και του σπιν): συμμετρία SU(2)

Συνιστώσες $\hat{T}^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2$

Μεταθετικές σχέσεις $\left[\hat{T}_1, \hat{T}_2\right] = i\hat{T}_3$ $\quad \left[\hat{T}_2, \hat{T}_3\right] = i\hat{T}_1$ $\quad \left[\hat{T}_3, \hat{T}_1\right] = i\hat{T}_2$

Ιδιοτιμές $\hat{T}^2 \psi(I, I_3) = I(I+1)\,\psi(I, I_3)$ $\quad \hat{T}_3 \psi(I, I_3) = I_3\, \psi(I, I_3)$

Ιδιοκαταστάσεις (παράδειγμα στη βάση των γεύσεων της πρώτης γενιάς) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ $\quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Τελεστές κλίμακας $\hat{T}_- \equiv \hat{T}_1 - i\hat{T}_2$ $\quad \hat{T}_+ \equiv \hat{T}_1 + i\hat{T}_2$

$$\hat{T}_+ \psi(I, I_3) = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3+1)}\, \psi(I, I_3+1)$$

$$\hat{T}_- \psi(I, I_3) = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3-1)}\, \psi(I, I_3-1)$$

Επομένως $\hat{T}_- \psi(I, -I) = 0$ $\quad \hat{T}_+ \psi(I, +I) = 0$

Σύνθεση βαρυονίων από κουάρκς

Αφετηρία η σύνθεση δύο κουάρκς γεύσεων a και b

- Πρόσθεση του ισοσπίν: $I_3 = I_3^a + I_3^b \qquad |I^a - I^b| \le I \le I^a + I^b$
- Εύκολο για τις ακραίες τιμές: $$uu = \psi\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)\psi\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \Psi(1, +1)$$ $$dd = \psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \Psi(1, -1)$$
- Για την κατάσταση $(I,I_3) = (1,0)$: $$\hat{T}_- \Psi(1,+1) = \sqrt{2}\Psi(1,0) = \hat{T}_-(uu) = u(\hat{T}_- u) + (\hat{T}_- u)u = ud + du \Rightarrow \Psi(1,0) = \frac{ud + du}{\sqrt{2}}$$
- Ο ορθογώνιος στη $(I,I_3) = (1,0)$ γραμμικός συνδυασμός είναι η κατάσταση $(I,I_3) = (0,0)$: $$\hat{T}_+(ud - du) = (\hat{T}_+ u)d + u(\hat{T}_+ d) - (\hat{T}_+ d)u - d(\hat{T}_+ u) = uu - uu = 0 \Rightarrow \Psi(0,0) = \frac{ud - du}{\sqrt{2}}$$
- Άρα, η σύνθεση δύο ισο-διπλών δίνει μια ισο-τριπλή και μια ισο-απλή: $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$
- Οι δύο καταστάσεις με ίδιο φορτίο, $I_3 = 0$, έχουν σαφώς διαφορετικό φυσικό περιεχόμενο: το ουδέτερο μέλος της ισοτριπλής είναι συμμετρικό κάτω από ανταλλαγή των δύο κουάρκς, ενώ η ισο-απλή είναι αντισυμμετρική

Σύνθεση βαρυονίων από κουάρκς

Επόμενο βήμα η προσθήκη ενός ακόμη κουάρκ u ή d:

$$I = 3/2 \qquad ddd \qquad d(du)_S = d(ud+du)/\sqrt{2} \qquad u(du)_S = u(ud+du)/\sqrt{2} \qquad uuu$$

$$I = 1/2 \qquad d(du)_A = d(ud-du)/\sqrt{2} \qquad u(du)_A = u(ud-du)/\sqrt{2}$$

- Πάλι εύκολο για τις ακραίες τιμές, π.χ. $(I,I_3) = (3/2,-3/2)$ = ddd, και για $(I,I_3) = (3/2,-1/2)$:

$$\hat{T}_+ \phi\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = \sqrt{3}\phi\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right) = \hat{T}_+\,(ddd)$$

$$= (\hat{T}_+ d)dd + d(\hat{T}_+ d)d + dd(\hat{T}_+ d) = udd + dud + ddu$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(udd+dud+ddu)$$

- Επαναλαμβάνοντας τη δράση του τελεστή κλίμακας βρίσκουμε τις καταστάσεις με I = 3/2:

$$\phi\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = ddd \qquad \phi\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(udd+dud+ddu)$$

$$\phi\left(\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud+udu+duu) \qquad \phi\left(\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\right) = uuu$$

Σύνθεση βαρυονίων από κουάρκς

- Οι καταστάσεις με I = 1/2 από την ισο-τριπλή των δύο πρώτων κουάρκς προκύπτουν ως ορθογώνιοι γραμμικοί συνδυασμοί στις καταστάσεις $(I,I_3) = (3/2,\pm1/2)$, με πρόσημα που να συμφωνούν με τα αποτελέσματα της δράσης των τελεστών κλίμακας:

$$\phi_S\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(2ddu - udd - dud) \qquad \phi_S\left(\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu)$$

- Οι καταστάσεις με I = 1/2 από την ισο-απλή των δύο πρώτων κουάρκς προκύπτουν αμέσως:

$$\phi_A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(udd - dud) \qquad \phi_A\left(\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu)$$

- Συνεπώς, η σύνθεση των τριών ισο-διπλών, δηλ. τριών κουάρκς, δίνει μια ισο-τετραπλή με I = 3/2 και δύο ισο-διπλές με I = 1/2:

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 2 \otimes (3 \oplus 1) = (2 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 1) = 4 \oplus 2 \oplus 2$$

- Συμμετρίες ανταλλαγής: I = 3/2 → συμμετρικές καταστάσεις κάτω από ανταλλαγή δύο οποιωνδήποτε κουάρκς, I = 1/2 → μικτή συμμετρία, ορισμένη μόνο κάτω από ανταλλαγή των δύο πρώτων κουάρκς 1⟷2: ϕ_S συμμετρικές, ϕ_A αντισυμμετρικές

Το σπιν των βαρυονίων

Η SU(2) άλγεβρα του σπιν είναι ακριβώς η ίδια με του ισοσπίν, δίνοντας ανάλογες καταστάσεις

$$\chi\left(\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\right)=\uparrow\uparrow\uparrow \qquad \chi\left(\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\uparrow)$$

$$\chi\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow\downarrow) \qquad \chi\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)=\downarrow\downarrow\downarrow$$

$$\chi_S\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{6}}(2\downarrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\downarrow)$$

$$\chi_S\left(\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}(2\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)$$

$$\chi_A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow-\downarrow\uparrow\downarrow)$$

$$\chi_A\left(\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)$$

Κυματοσυναρτήσεις των βαρυονίων στη θεμελιώδη κατάσταση

Δεν είναι όλες οι (4+2+2) × (4+2+2) = 64 καταστάσεις σπιν-ισοσπίν δύο γεύσεων ανεξάρτητες: δεσμεύονται από τη συνολική συμμετρία της κυματοσυνάρτησης του βαρυονίου στη θεμελιώδη κατάσταση (L = 0).

Συμμετρική

Αντισυμμετρική

$$\Phi = \phi_{\text{isospin}} \times \chi_{\text{spin}} \times \xi_{\text{color}} \times \eta_{\text{space}}$$

Αντισυμμετρική από τη φερμιονική φύση των κουάρκς

Αντισυμμετρική για άχρωμο βαρυόνιο

Συμμετρική για L = 0:
$P(qqq) = P(q)P(q)P(q)(-1)^L$
$= (+1)\,(+1)\,(+1)(-1)^0 = +1$

$\phi_{\text{isospin}}\chi_{\text{spin}} = \phi_{\text{flavor}}\chi_{\text{spin}} \rightarrow$ συμμετρική $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \phi_{\text{isospin}}\left(I=\dfrac{3}{2}\right)\chi_{\text{spin}}\left(J=\dfrac{3}{2}\right) \longrightarrow \Delta(1232) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_S\left(I=\dfrac{1}{2}\right)\chi_S\left(J=\dfrac{1}{2}\right)+\phi_A\left(I=\dfrac{1}{2}\right)\chi_A\left(J=\dfrac{1}{2}\right)\right] \longrightarrow N(939) \end{cases}$$

Κυματοσυναρτήσεις των βαρυονίων στη θεμελιώδη κατάσταση

$$|\Delta^{+}(3/2,-1/2)\rangle = \left[(uud+udu+duu)/\sqrt{3}\right]\left[(\downarrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow\downarrow)/\sqrt{3}\right]$$

$$\begin{aligned}= (&u\downarrow u\downarrow d\uparrow + u\downarrow u\uparrow d\downarrow + u\uparrow u\downarrow d\downarrow \\ &+ u\downarrow d\downarrow u\uparrow + u\downarrow d\uparrow u\downarrow + u\uparrow d\downarrow u\downarrow \\ &+ d\downarrow u\downarrow u\uparrow + d\downarrow u\uparrow u\downarrow + d\uparrow u\downarrow u\downarrow)/3\end{aligned}$$

$$|p\uparrow\rangle = \frac{1}{6\sqrt{2}}(2uud-udu-duu)(2\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)+\frac{1}{2\sqrt{2}}(udu-duu)(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)$$

$$\begin{aligned}= (&2u\uparrow u\uparrow d\downarrow - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow \\ &+ 2u\uparrow d\downarrow u\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow \\ &+ 2d\downarrow u\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow)/\sqrt{18}\end{aligned}$$

Σύνθεση τριών γεύσεων: συμμετρία SU(3)

Δράση τελεστών στην τριπλή γεύσης:

$$\hat{T}_3 u = +\frac{1}{2}u \qquad \hat{Y} u = +\frac{1}{3}u$$

$$\hat{T}_3 d = -\frac{1}{2}d \qquad \hat{Y} d = +\frac{1}{3}d$$

$$\hat{T}_3 s = 0 \qquad \hat{Y} s = -\frac{2}{3}s$$

Περιεχόμενο γεύσης:

$$I_3 = \frac{1}{2}(n_u - n_d) \qquad Y = \frac{1}{3}(n_u + n_d - 2n_s)$$

$$I_3 = \frac{1}{2}(n_{\bar{d}} - n_{\bar{u}}) \qquad Y = \frac{1}{3}(2n_{\bar{s}} - n_{\bar{u}} - n_{\bar{d}})$$

Τελεστές κλίμακας με μη μηδενική δράση:

$$3: \quad \hat{V}_+ s = +u \quad \hat{V}_- u = +s \quad \hat{U}_+ s = +d \quad \hat{U}_- d = +s \quad \hat{T}_+ d = +u \quad \hat{T}_- u = +d$$

$$\bar{3}: \quad \hat{V}_+ \bar{u} = -\bar{s} \quad \hat{V}_- \bar{s} = -\bar{u} \quad \hat{U}_+ \bar{d} = -\bar{s} \quad \hat{U}_- \bar{s} = -\bar{d} \quad \hat{T}_+ \bar{u} = -\bar{d} \quad \hat{T}_- \bar{d} = -\bar{u}$$

Σύνθεση τριών γεύσεων: $3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (6 \oplus \bar{3}) = 10 \oplus \boxed{8 \oplus 8 \oplus 1}$

Βαρυονική δεκάδα   Βαρυονική οκτάδα

Σύνθεση μεσονίων από κουάρκς

Χειρισμός των αντικουάρκς στην άλγεβρα SU(2):

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow \bar{q} = \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε:

$$\hat{T}_+ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \hat{T}_+ \bar{u} = -\bar{d} \qquad \hat{T}_+ \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \hat{T}_+ \bar{d} = 0$$

$$\hat{T}_- \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \hat{T}_- \bar{u} = 0 \qquad \hat{T}_- \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \hat{T}_- \bar{d} = -\bar{u}$$

Άρα, ξεκινώντας από την κατάσταση (1,−1) και δρώντας με τον τελεστή κλίμακας $\hat{T}_+$:

$$\psi(1,-1) = d\bar{u}$$

$$\psi(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

$$\psi(1,+1) = -u\bar{d}$$

Η ισο-απλή πρέπει να είναι ορθογώνια στην κατάσταση $\psi(1,0)$ της ισο-τριπλής:

$$\psi(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$

Η σύνθεση δύο ισο-διπλών δίνει πάλι μια ισο-τριπλή και μια ισο-απλή: $2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$

Το σπιν των μεσονίων

Το σπιν προκύπτει απευθείας από τη σύνθεση δύο διπλών: $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$

$$\chi(1,-1) = \downarrow\downarrow$$

$$\chi(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$$

$$\chi(1,+1) = \uparrow\uparrow$$

$$\chi(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

Η ομοτιμία των μεσονίων προκύπτει από την ομοτιμία του ζεύγους κουάρκ-αντικουάρκ και τη σχετική τροχιακή στροφορμή τους:

$$P(q\bar{q}) = P(q)P(\bar{q})(-1)^L = (+1)(-1)(-1)^L = (-1)^{L+1}$$

Ο παράγοντας $(-1)^{S+1}$, που προέρχεται από την αντισυμμετρία των φερμιονίων, δεν συνεισφέρει στην ομοτιμία των μεσονίων, επειδή το κουάρκ και το αντικουάρκ είναι διακριτά σωμάτια

Κυματοσυναρτήσεις των μεσονίων στη θεμελιώδη κατάσταση

- Επειδή το κουάρκ και το αντικουάρκ είναι διακριτά σωμάτια, δεν υπάρχει περιορισμός στη συμμετρία ανταλλαγής των δύο σωματίων της κυματοσυνάρτησης του μεσονίου
- Οι θεμελιώδεις καταστάσεις των μεσονίων, με L = 0, έχουν σπιν J = L+S που προσδιορίζεται από το συνολικό σπιν S του ζεύγους κουάρκ-αντικουάρκ, δηλ. J = 0 ή 1

$$\Phi = \phi_{\text{isospin}} \times \chi_{\text{spin}} \times \boxed{\xi_{\text{color}} \times \eta_{\text{space}}}$$

Αντισυμμετρική

Συμμετρική για άχρωμο μεσόνιο

Αντισυμμετρική για L = 0: $P(q\bar{q}') = -1$

Παραδείγματα:

$(I, I_3) = (1,0)$

$$J^P = 0^- : \quad |\pi^0\rangle = \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(u\uparrow\bar{u}\downarrow - u\downarrow\bar{u}\uparrow - d\uparrow\bar{d}\downarrow + d\downarrow\bar{d}\uparrow)$$

$$(I, I_3) = (1,0), \quad J^P = 1^- : \quad |\rho^0(1,+1)\rangle = \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\uparrow\bar{u}\uparrow - d\uparrow\bar{d}\uparrow)$$

$$(I, I_3) = (0,0), \quad J^P = 1^- : \quad |\omega(1,-1)\rangle = \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}}(\downarrow\downarrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\downarrow\bar{u}\downarrow + d\downarrow\bar{d}\downarrow)$$

Προσθήκη της τρίτης γεύσης s

Όπως και στα βαρυόνια, η σύνθεση γίνεται με δύο τριπλές αντίθετης συμμετρίας:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

Οι δύο καταστάσεις συνολικού σπιν $J = 0$ και 1 δίνουν αντίστοιχα δύο εννιάδες ψευδοβαθμωτών ($J = 0^-$) και διανυσματικών ($J = 1^-$) μεσονίων