Το ηλεκτρικό πεδίο

▷ Ένα φορτισμένο σωματίδιο Α "τροποποιεί" (λόγω του φορτίου του) τον περιβάλλοντα χώρο, έτσι ώστε: ένα φορτισμένο σωματίδιο Β (λόγω του φορτίου του) "αισθάνεται" πως έχει τροποποιηθεί ο χώρος στη θέση που βρίσκεται $\Rightarrow$ απόκριση: "αισθάνεται" τη δύναμη Coulomb.

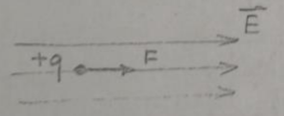
▷ Αν ένα "δοκιμαστικό" φορτίο τοποθετηθεί σε ένα σημείο και υποστεί ηλ. δύναμη $\Rightarrow$ $\exists$ ηλ. πεδίο στο σημείο αυτό.

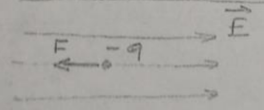
▷ Δύναμη: διάνυσμα $\Rightarrow$ ηλ. πεδίο: διάνυσμα.

▷ Ορισμός ηλ. πεδίου: $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}}$ (*) $\rightarrow$ $[E] = \dfrac{N}{C}$

▷ Αν ξέρουμε το $\vec{E}$ $\Rightarrow$ βρίσκουμε το $\vec{F}$ ⊕

(*) ▷ Από τον ορισμό: $\boxed{\text{ηλ. πεδίο} = \text{δύναμη} / \underline{\text{θετικό}}\ \text{φορτίου}}$:





Ηλ. δύναμη: ίδια κατ/ση με το ηλ. πεδίο

Ηλ. δύναμη: αντίθετη κατ/ση με το ηλ. πεδίο

⊕ $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$ θυμίζει την $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

↓

βαρυτική δύναμη / μονάδα μάζας

Ηλ. πεδίο φορτισμένου σωματιδίου

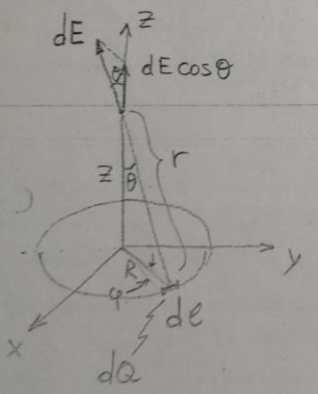
∴ Δύναμη από ηλ. φορτίο q στο ηλ. φορτίο q':

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\hat{r}$$

⇒ Ηλ. πεδίο που δημιουργείται από το q σε απόσταση r:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}} \rightarrow \boxed{\text{πεδίο σημειακού φορτίου}}$$

∴ Παράδειγμα [Ohanian, p.23]: Συνολική ποσότητα φορτίου Q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε λεπτό δακτύλιο ακτίνας R. Ποιό είναι το ηλ. πεδίο στον άξονα του δακτυλίου?



▷ Φορτίο/μονάδα μήκους $= \dfrac{Q}{2\pi R}$ = γρ. πυκνότητα

▷ Φορτίο στο στοιχειώδες τόξο dl: $\quad dQ = \dfrac{Q}{2\pi R}dl$

▷ $dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dQ}{r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q\,dl}{2\pi R}\dfrac{1}{z^2+R^2}$

Κατακόρυφη συνιστώσα του dE:

$$\left.\begin{array}{l} dE_z = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q\,dl}{2\pi R}\dfrac{\cos\theta}{z^2+R^2} \\ dl = R\,d\varphi\ ;\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi R}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\underbrace{\int_0^{2\pi} R\,d\varphi}_{2\pi R}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2\pi R}{dl} = \dfrac{Q}{dQ} \Rightarrow \\ \Rightarrow dQ = \dfrac{Q}{2\pi r}dl \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{(z^2+R^2)^{3/2}}}$$

Διανυσματικά: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$

▷ Στο όριο $z=0 \Rightarrow \vec{E}=0$

▷ Στο όριο $z \gg R \Rightarrow \underbrace{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2}\hat{z}}_{\boxed{\text{ηλ. πεδίο σημειακού φορτίου}}}$

Go to p. 8α

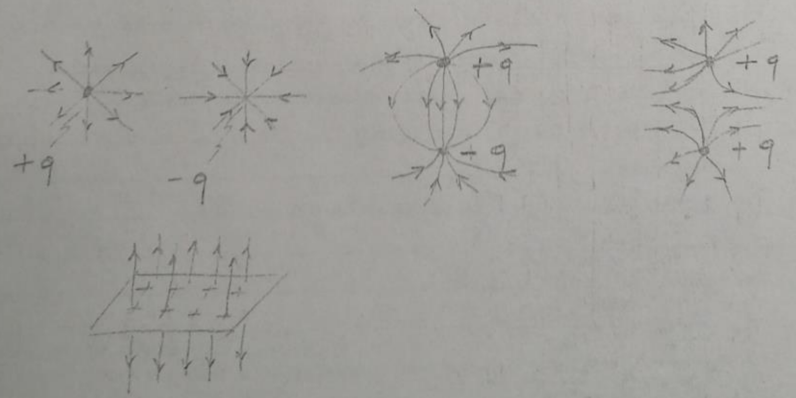
Γραμμές ηλ. πεδίου (δυναμικές γραμμές)

▷ Το ηλ. πεδίο αναπαρίσταται ως διάνυσμα →

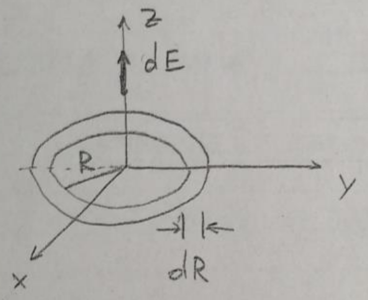
δυναμική γραμμή: σε οποιοδήποτε σημείο της, η εφαπτομένη στη γραμμή δείχνει τη δ/νση του ηλ. πεδίου

Επίσης: η πυκνότητα των γραμμών ~ μέτρο του πεδίου

▷ Οι δυν. γραμμές ξεκινούν από θετικό φορτίο και καταλήγουν σε αρνητικό, ή συνεχίζουν ως το ∞.
[όπως η δύναμη που θα ασκούνταν σε θετικά φορτισμένο σωμάτιο]



Ηλ. πεδίο επίπεδου φύλλου που φέρει ομοιόμορφο φορτίο πυκνότητας ρ $[C/m^2]$.



- Το φύλλο θεωρείται ότι έχει διαστάσεις άπειρου μήκους
- Το φύλλο αποτελείται από ένα μεγάλο πλήθος <u>διαδοχικών ομόκεντρων δακτυλίων</u>.
- Θεωρούμε ένα τέτοιο δακτύλιο ακτίνας R και πλάτους dR.

Ο δακτύλιος έχει <u>εμβαδόν = $2\pi R dR$</u>

——— " ——— φορτίο : $dQ = (2\pi R dr) \cdot \rho$

Άρα το κατακόρυφο ηλ. πεδίο που δημιουργεί είναι:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi R \rho z \, dR}{(z^2+R^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{2\pi\rho z}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{R\,dR}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

($R=\infty$ ο μεγαλύτερος δακτύλιος)

($R=0$ ο μικρότερος δακτύλιος)

Για το ολοκλήρωμα:

$R^2 = u$, οπότε $\int_0^{\infty} \frac{R\,dR}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2}du}{(z^2+u^2)^{3/2}}$

$\Downarrow$

$\cancel{2}RdR = \frac{1}{2}du$

$$= \frac{-1}{(z^2+u^2)^{1/2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{z}$$

Άρα $E = \frac{2\pi\rho \cancel{z}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\cancel{z}} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}}$

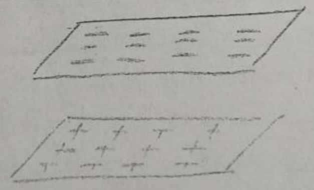
και σε <u>διανυσματική μορφή</u>: $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\hat{z}}$

<u>Συνεπώς</u>: Το ηλ. πεδίο ~ ρ (πυκνότητας φορτίου)

και είναι <u>σταθερό</u> ⇒ ανεξάρτητο από την απόσταση από το φύλλο!

▷▷ Ισχύει προσεγγιστικά όχι μόνο για άπειρο φύλλο αλλά και για φύλλο πεπερασμένης διάστασης {σε αποστάσεις ≪ από τις πλευρές και μακριά από τα άκρα}

▷ Στην πράξη: <u>2 φύλλα.</u>



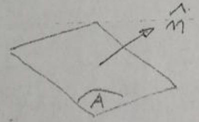
} <u>πυκνωτής</u>!

▷ Πεδίο μεταξύ των φύλλων (το ένα +, το άλλο −)

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

▷ Πεδίο "εκτός" των φύλλων = 0.

Ηλεκτρική ροή:



μέτρο +

▷ Επιφάνεια: κατεύθυνση (δηλ. πάνω/κάτω)

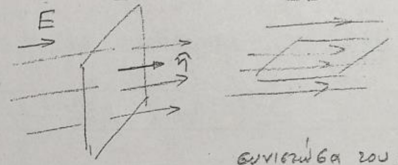
▷ Η κατ/ση ορίζεται μέσω του $\hat{n}$

μοναδιαίο διάνυσμα ⊥ επιφάνεια

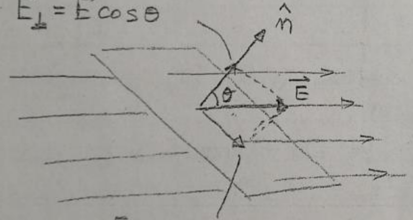
$|\hat{n}| = 1$.

∴ Άρα: $\boxed{\vec{A} = A\cdot\hat{n}}$

Ηλεκτρική ροή: $\Phi_E = \begin{cases} E\cdot A, & \hat{n}\parallel\vec{E} \\ 0, & \hat{n}\perp\vec{E} \end{cases}$



$E_\perp = E\cos\theta$



$E_\parallel = E\sin\theta$

Γενικά:

συνιστώσα του E που είναι $\parallel \hat{n}$ δηλ. ⊥ επιφάνεια

$\Phi_E = E\cdot A\cos\theta$, δηλ.

$\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A}$

και για οποιαδήποτε επιφάνεια

$$\boxed{\Phi_E = \int E\cos\theta\, dA = \int E_\perp\, dA = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}}$$

* { Ηλ. ροή σε μια επιφάνεια = αριθμό των γραμμών του πεδίου που τέμνονται από την επιφάνεια } *

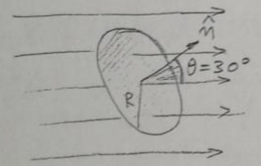
ή

* { Το ηλ. πεδίο = αριθμός δυν. γραμμών / μονάδα επιφανείας } *

Παραδείγματα

① Ηλ. ροή διαμέσου ενός δίσκου (ανοιχτή επιφάνεια)

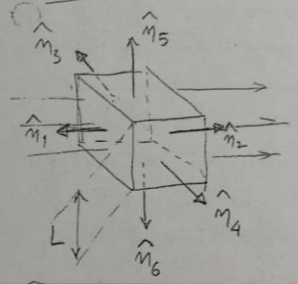
Δίσκος ακτίνας 0.1 m ; πεδίο $E = 2\times10^3 \frac{N}{C}$; Ροή = ?



$$\left.\begin{array}{l} \Phi_E = E\cdot A \cos\theta \\ A = \pi R^2 = \pi\,(0.1\,m)^2 = 0.0314\,m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_E = 2\times10^3 \frac{N}{C} \times 0.0314\,m^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 54 \frac{N\cdot m^2}{C}.$$

② Ηλ. ροή διαμέσου ενός κύβου (κλειστή επιφάνεια χωρίς ηλ. φορτίο)



$$\Phi_E = \Phi_{E_1} + \Phi_{E_2} + \underbrace{\Phi_{E_3} + \Phi_{E_4} + \Phi_{E_5} + \Phi_{E_6}}_{0}$$

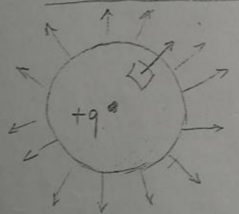
$$\Phi_{E_1} = \underbrace{-E\cdot L^2}_{\cos\theta = \cos180^\circ = -1} \qquad \Phi_{E_2} = \underbrace{+EL^2}_{\cos\theta = \cos 0 = +1}$$

για $\hat{n} \perp \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{A} = E\,L^2 \cos 90^\circ = 0.$$

[Για κάθε έδρα: $\vec{A} = L^2\hat{n}$] Άρα: $\boxed{\Phi_E = 0.}$

③ Ηλ. ροή διαμέσου σφαίρας στο κέντρο της οποίας υπάρχει +q. (κλειστή επιφάνεια με ηλ. φορτίο)



Ηλ. πεδίο του σημειακού φορτίου:

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$ ⊥ στη σφαίρα και έχει την ίδια τιμή παντού πάνω στη σφαίρα.

Άρα: $$\Phi_E = \oint E\,dA = \underbrace{E}_{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}} \underbrace{\oint dA}_{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\,4\pi R^2 \Rightarrow \boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$