

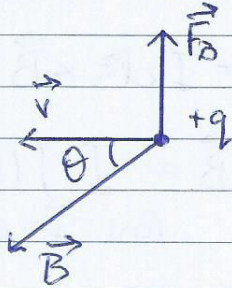
11/11/2015

ΔΙΑΔΕΙΗ #15

(Ν. Ζαωλίδου)

Μαγνητοστατική

Έστω φορτίο $+q$ μέσα σε εφωσπικό μαγνητικό πεδίο έντασης \vec{B} , το οποίο κινείται με ταχύτητα \vec{v} .



Στο φορτίο ασκείται δύναμη \vec{F}_B κάθετη στο επίπεδο των \vec{B} , \vec{v} , με:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (* \text{ (βλ. σελ. 52)})$$

Η φορά της δύναμης προδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Ορίζουμε, λοιπόν, την ένταση του μαγνητικού πεδίου \vec{B} ως:

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{F}_B|}{q|\vec{v}| \cdot \sin\theta} \quad (\text{το μέτρο του}).$$

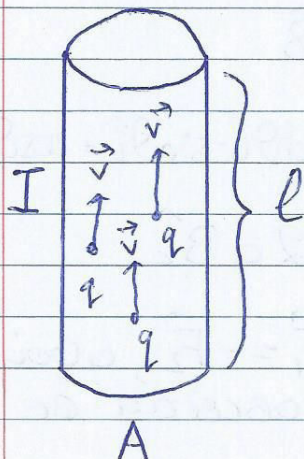
Στο S.I. το \vec{B} μετριέται με το **1T** (Tesla).

$$1T = \frac{1N}{1C \cdot \frac{1m}{s}} = \frac{N}{A \cdot m}$$

Μια άλλη μονάδα μέτρησης είναι το Gauss με:

$$1T = 10^4 \text{ Gauss.}$$

Έστω τώρα ότι έχουμε πολλά κινούμενα φορτία:



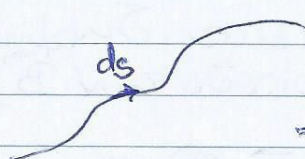
Τότε $\vec{F}_B = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$, έστω η φορτία q ανά μονάδα όγκου, τότε:

$$\vec{F}_B = nq \cdot A \cdot l \cdot \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

⊛ Η δύναμη \vec{F}_B είναι κάθετη στον ρεύμα, άρα το έργο τους είναι μηδέν. Κατά συνέπεια, η δύναμη \vec{F}_B δεν μεταβάλλει την ενέργεια του φορτίου, παρά μόνο τη διεύθυνση κινήσεώς του.

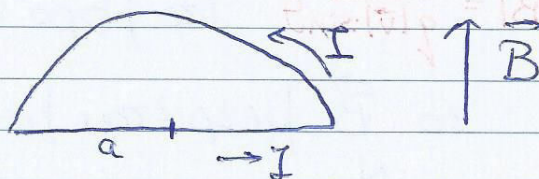
Έστω τμήμας αγωγός:



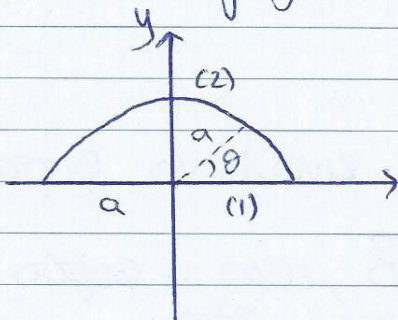
I Τότε, $d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int d\vec{F} = \int I d\vec{s} \times \vec{B} = I \cdot \int (d\vec{s} \times \vec{B}) \Rightarrow$
 (αν $I = \text{const.}$)
 $\Rightarrow \vec{F} = I \cdot (\int d\vec{s}) \times \vec{B}$

Αν ο αγωγός είναι κλειστός, τότε $\int d\vec{s} = 0$, οπότε η δύναμη θα είναι επίσης 0.

Εφαρμογή:



Τι δύναμη ασκείται σε κάθε τμήμα του αγωγού; Πόση είναι η συνολική δύναμη που ασκείται στον αγωγό;



(1): $\vec{F}_1 = I \cdot 2a \hat{i} \times B \hat{j} \Rightarrow$

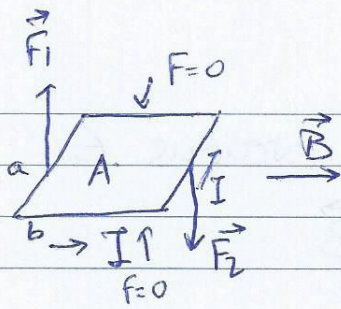
$\Rightarrow \vec{F}_1 = I 2a B \hat{k}$ ⊙ \Rightarrow Στερέωση

(2): $d\vec{F}_2 = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$

$d\vec{s} = ds \hat{\theta} = a d\theta (-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j})$ } \Rightarrow

$\Rightarrow d\vec{F}_2 = -I \cdot a \cdot \sin\theta d\theta B \hat{k} \Rightarrow \vec{F}_2 = -I \cdot 2a B \hat{k}$

Όπως ήταν αναμενόμενο, προκύπτει $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, αφού θέλωμε η συνολική δύναμη που ασκείται σε κλειστό αγωγό να είναι μηδέν.



$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = I \vec{\ell} \times \vec{B} = I \ell B \sin \theta \hat{k} = I a B \hat{k}$$

$$\vec{F}_2 = -I a B \hat{k}$$

Άρα $\vec{\tau} = I a B \hat{k} \times (-\frac{b}{2} \hat{i}) + (-I a B \hat{k}) \times (\frac{b}{2} \hat{i}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = I a B \cdot \frac{b}{2} \hat{j} + I a B \frac{b}{2} \hat{j} \Rightarrow \vec{\tau} = I B \cdot \underbrace{a \cdot b}_{\text{εμβαδόν}} \hat{j} \Rightarrow$$

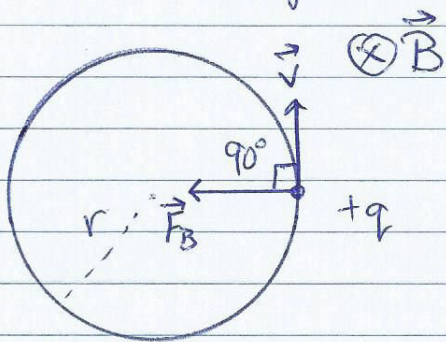
$$\Rightarrow \vec{\tau} = I \cdot B \cdot A \hat{j} = I \vec{A} \times \vec{B}$$

Τελικά, προκύπτει $\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B}$

Ορίζουμε $I \vec{A} = \vec{\mu}$, μαγνητική ροπή, άρα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{\mu} \times \vec{B} \\ dW = z d\theta &\Rightarrow U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \end{aligned} \right\} \text{ήμους αντιστοιχία με τις σχέσεις της ηλεκτροστατικής.}$$

- Έστω φορτίο +q που κινείται σε κυκλική τροχιά μέσα σε μαγνητικό πεδίο κάθετο στην τροχιά:



$$|\vec{F}_B| = |q \cdot \vec{v} \times \vec{B}| = q v B (1)$$

Η \vec{F}_B έχει πόλο κεντρομόλου δύναμης, άρα:

$$\frac{m v^2}{r} = q v B \Rightarrow r = \frac{m v^2}{q v B}$$

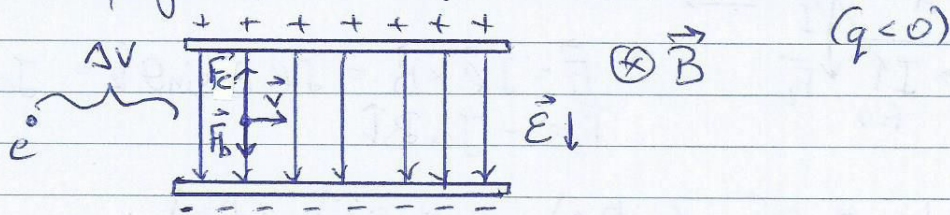
Για μια πλήρη περιφορά: $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi m}{q B}$$

Δεν χρειόμαστε λοιπόν, των ταχύτητα για να προσδιορίσω την περίοδο.

$\sim v \rightarrow$ έτσι διαγράφει ένας κυκλικός επιταχυντής ηλεκτρονίων (κύκλωτρο).

• Έστω δύο παράλληλες ηλεκτρικά πεδία έντασης E .



$$\vec{F}_e = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

⇒ Αν θέσουμε το φορτίο να κινηθεί ευθύγραμμο, τότε προκύπτει:

$$q/m = \frac{E^2}{2(\Delta V)B^2}$$

Με τον τρόπο αυτό μετρήθηκε με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια ο λόγος q/m του ηλεκτρονίου.

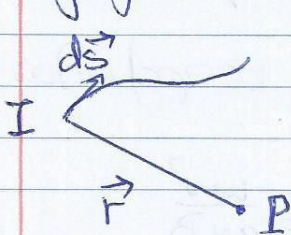
$$e/m_e = 1,758820174(71) \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

18/11/2015

ΔΙΑΛΕΞΗ #16

(N. Jaouidiou)

Έστω αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I . Λόγω της κίνησης των φορτίων στο εσωτερικό του αγωγού θα έχουμε ύπαρξη μαγνητικού πεδίου έντασης B .

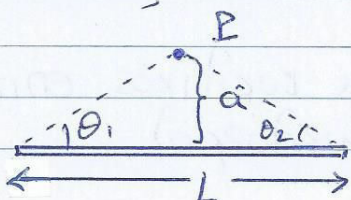


Τότε $d\vec{B} = (k) \cdot I \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$

Προκύπτει $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ με $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$

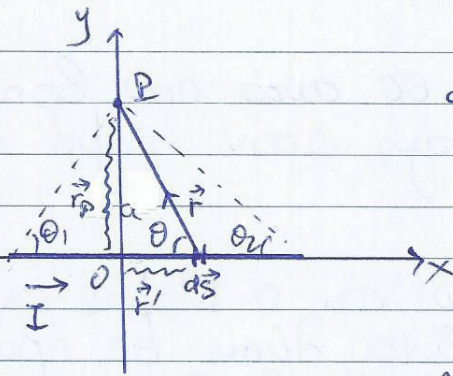
Υελικά: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$ (Νόμος Biot-Savart)

⇒ Έστω περιφερειακός αγωγός μήκους L που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I . Να βρεθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται λόγω του αγωγού σε σημείο P τέτοιο, ώστε:



Με $\alpha, \theta_1, \theta_2$ να δαρωούνται πρώτα.

-55-



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{r} = a\hat{j} - x\hat{i}, \text{ since } \text{look at}$$

$$\vec{r}' + \vec{r} = r\hat{p} \Rightarrow \vec{r} = a\hat{j} - x\hat{i}$$

$$\text{Also } |\vec{r}| = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\text{look at } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \Rightarrow \hat{r} = \frac{a\hat{j} - x\hat{i}}{\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow \hat{r} = \sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}$$

Also look at $d\vec{s} = dx\hat{i}$. So we have, then:

$$\frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\sin\theta dx \hat{k}}{a^2 + x^2} \quad \text{and} \quad \frac{\sin\theta dx \hat{k}}{r^2}$$

Also $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\sin\theta dx \hat{k}}{r^2}$, and especially since the angles are not fixed we have:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{1}{a} \sin\theta d\theta \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} \cdot (\cos\theta_2 + \cos\theta_1)$$

(We can take arbitrary limits as $d\theta$ from $\pi - \theta_1$ to θ_2 .)

$$\text{Therefore, } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot (\cos\theta_2 + \cos\theta_1) \hat{k}.$$

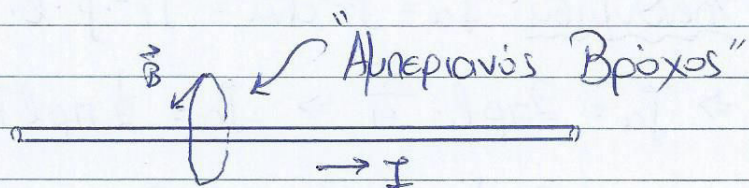
As the P is in the plane of the wire, then we have:

$$\theta_1 = \theta_2 \text{ and } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \frac{2}{\sqrt{L^2 + a^2}} \hat{k}$$

Notes of Ampere:

look at $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I_{enc}$ (circulation of the vector Gauss).

draw a loop:

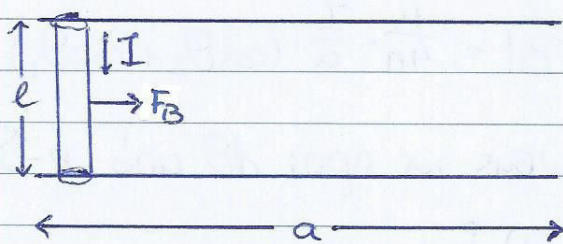


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I \Rightarrow B \cdot \int d\vec{s} = \mu_0 \cdot I \Rightarrow B \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Το αποτέλεσμα ανυψώνει σε αυτό που βρήκαμε στην προηγούμενη εφαρμογή όταν πήρε πολύ μικρά όρια αγωγού.

Ο Νόμος του Ampere όπως και ο Νόμος του Gauss είναι ιδιαιτερώσεως που δίνει λύση σε προβλήματα που παραβιάζουν συμπύκνωση. Η απόδειξη, όπως, δεν γίνεται σε επιφάνεια αλλά στον χώρο.

⇒ Εφαρμογή: Έστω κυλινδρικός αγωγός μήκους l και ακτίνας R και μήκους l , ο οποίος κινείται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε δύο παράλληλες ράβδους μήκους a . Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B . Αν γνωρίζετε πως ο αγωγός τείνει να κινείται από την ηρέα να βρείτε την ταχύτητα με την οποία έρχεται από τις ράβδους.



$\otimes B$

Λύση:
Η ράβδος εκτελεί και περιεκτική κίνηση χωρίς να γλιστράει με τις ράβδους.

Ισχύει $F_B = \text{const.} = I \cdot l \cdot B$

Για τη διαδρομή $0 \rightarrow a$ ισχύει: $W_{F_B} = I \cdot l \cdot B \cdot a$

($W_{F_g} = 0$), από Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας έχουμε:

$$K_{\text{κεν}} = W_{F_B} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_a^2 = I l B a \quad (1)$$

Υποθέτουμε: $I_a = \int r^2 dm = \int r^2 \cdot \rho \cdot l \cdot \pi \cdot d(r^2) = 2\pi \rho l \int_0^R r^3 dr \Rightarrow$

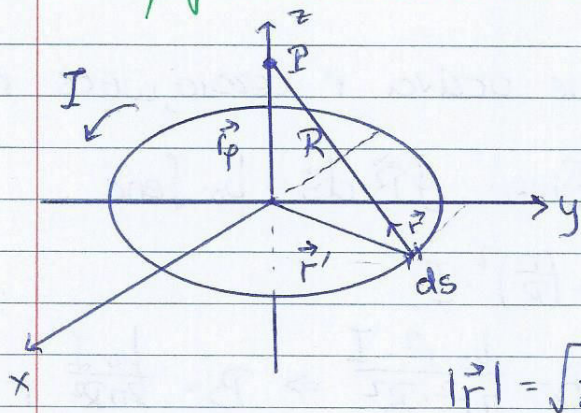
$$\Rightarrow I_a = 2\pi \rho l \cdot \frac{R^4}{4} \Rightarrow I_a = \frac{1}{2} \pi \rho l R^2 \cdot R^2 \Rightarrow I_a = \frac{1}{2} m R^2, \text{ άρα:}$$

$$(1) \Rightarrow m v^2 + \frac{1}{2} m (\omega R)^2 = 2 I l B a \Rightarrow v^2 = \frac{4 I l B a}{3 m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{4 I l B a}{3 m}}$$

-57-

⇒ Εφαρμογή: Έστω δακτύλιος ακτίνας R που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I . Να υπολογιστεί η ένταση B του μαγνητικού πεδίου σε σημείο P του άξονα z



$$\text{Ισχύει } \vec{r}' + \vec{r} = \vec{r}_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r} = z\hat{z} - R\hat{r} \text{ (ωληνδρικές)}$$

$$d\vec{S} = R \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{z^2 + R^2}$$

Κατά συνέπεια, θα ισχύει $d\vec{S} \times \vec{r} = R \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi} \times (z\hat{z} - R\hat{r}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d\vec{S} \times \vec{r} = R \cdot d\varphi \cdot z \cdot \hat{r} + R^2 d\varphi \hat{z} = R^2 d\varphi \hat{z} + R d\varphi z (\cos\varphi \hat{i} + \sin\varphi \hat{j})$$

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R^2 d\varphi \hat{z} + R d\varphi z \cos\varphi \hat{i} + R d\varphi z \sin\varphi \hat{j}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}, \text{ άρα:}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R \cdot z}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0$$

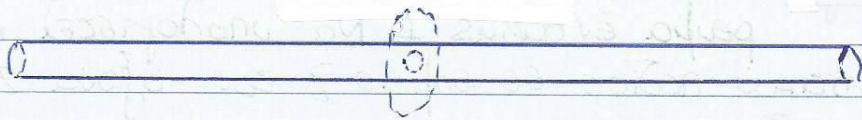
$$B_y = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R \cdot z}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0$$

Κατά συνέπεια, θα ισχύει $\vec{B} = B_z \cdot \hat{z}$, με:

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\text{Άρα, τελικά, έχουμε: } \vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \hat{z}$$

⇒ Εφαρμογή: Έστω αμυγίς ακτίνας R που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I , το οποίο είναι κατανοημένο ομοιόμορφα στον όγκο του. Να βρεθεί η ένταση B του μαγνητικού πεδίου παντού στο χώρο.



Παίρνουμε απεριόριστο θόλο με ακτίνα r < R, ώστε r < R.

Ο νόμος του Ampere μας δίνει: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{enc}$

Όπως $I_{enc} = \left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2}\right) \cdot I \Rightarrow I_{enc} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot I$

Άρα $B \cdot \int ds = \mu_0 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot r^2 \cdot I}{2\pi r \cdot R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \cdot r$

Αν πάρουμε απεριόριστο θόλο με ακτίνα r, με r > R, προκύπτει:

$I_{enc} = I$, όρα ο νόμος του Ampere μας δίνει:

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R}$

Για r = R και οι δύο εκφράσεις δίνουν $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R}$, όρα:

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \cdot r, & r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, & r > R \end{cases}$$

20/11/2015

ΔΙΑΝΕΣΗ #17

(Γ. Αιολάντζος)

ΣΥΝΟΨΗ: Νόμος Coulomb & Αρχή της Επικάλυψης

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\Omega} \frac{dq(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

Για $\Omega = G$: $dq(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}') dl$, $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_G \frac{\lambda(\vec{r}') \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dl$, $\vec{r} \in G$

Για $\Omega = S$: $dq(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}') \cdot ds$, $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} ds$, $\vec{r} \in S$

Για $\Omega = V$: $dq(\vec{r}') = \kappa(\vec{r}') \cdot dv$, $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\kappa(\vec{r}') \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv$, $\vec{r} \in V$

Νόμος του Gauss: $\oint \vec{E} \cdot \hat{n} d\ell = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$

Αναλογία με μαγνητοστατική:

Νόμος Biot-Savart & Αρχή της Επικάλυψης

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{d\vec{I}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$d\vec{I}(\vec{r}') = \begin{cases} G: I(\vec{r}') \cdot \hat{n} d\ell \\ S: \vec{J}_e(\vec{r}') \cdot d\vec{s} \\ V: \vec{J}(\vec{r}') d\vec{v} \end{cases}$$

Φυσικά, στο περίπτωση είναι δυνατά η ύπαρξη σπηρακούς κατανομής όπως είναι περίπτωση του φορτίου.

Διαστάσεις: $\vec{J}_e: A/m, \vec{J}: A/m^2$

Έστω επιφανειακή κατανομή ρεύματος. Για να βρω την ένταση σε μια γραμμή της επιφάνειας ορθογώνια κατά μήκος μιας γραμμής των πυκνότητας παρατηρούμε πως για επιφάνεια (2 διαστάσεις) ορθογώνια σε γραμμή (1 διαστάσεις), όπως για όγκο (3 διαστάσεις) θα ορθογώνια σε επιφάνεια (2 διαστάσεις).

Επιφάνεια: $I_{\gamma} = \int_{\gamma} \vec{J}_e \cdot \hat{n}_{\perp} d\ell \rightarrow$ κάθετη στη γραμμή

Χώρος: $I_s = \int_s \vec{J} \cdot \hat{n}_{\perp} d\vec{s}$

Σχέση έντασης ρεύματος-φορτίου:

Για γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda: I \cdot \hat{n} = \lambda \cdot \hat{n} \rightarrow$ ταχίσματα

Για επιφανειακή -"- $\sigma: \vec{J}_e = \sigma \cdot \vec{u}$

Για χωρική -"- $\kappa: \vec{J} = \kappa \cdot \vec{u}$

\Rightarrow Εφαρμογή με Σαχινάϊ, (βλ. βελ. 5f)

Παρατηρούμε πως για $z \gg a$ η ένταση πάλι ως $1/z^3$, σε αντίθεση με το $1/z^2$ που προέκυψε όταν λύναμε το ίδιο πρόβλημα στην ηλεκτροστατική. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως δεν υπάρχουν μαγικά μονόπολα:

$$\text{Ιχίει } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' \quad (\vec{\nabla} \times (\vec{A}f) = (\vec{\nabla} \times \vec{A})f = \vec{A} \times \vec{\nabla} f)$$

$$\text{Συνεχίζοντας, έχουμε: } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \vec{\nabla} \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}), \text{ με } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Προκύπτει $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, άρα προκύπτει πως δεν υπάρχουν μαγικά (φορτια)μαγικά μονόπολα.

$$\text{Θα ισχύει: } A_x(\vec{r})\hat{i} + A_y(\vec{r})\hat{j} + A_z(\vec{r})\hat{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{i} \int_V \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{j} \int_V \frac{J_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{k} \int_V \frac{J_z(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \text{ δηλαδή:}$$

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \quad A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv',$$

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_z(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

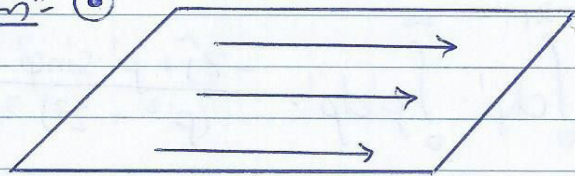
Επισημαστέ πως στην ηλεκτροστατική ισχύει

$$V_x(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \text{ δηλαδή για έναν αριστοκρατη ως παραπάνω.}$$

$$\left(\begin{aligned} [\vec{\nabla} \times (\vec{A}f)]_x &= \frac{\partial}{\partial y} (A_z f) - \frac{\partial}{\partial z} (A_y f) = \frac{\partial A_z}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial y} A_z - \frac{\partial A_y}{\partial z} f - \frac{\partial f}{\partial z} A_y = \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) f - \left(A_y \frac{\partial f}{\partial z} - A_z \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x \cdot f - (\vec{A} \times \vec{\nabla} f)_x \end{aligned} \right)$$

↳ απόδειξη ως έχουμε που χρησιμοποιήσαμε

⇒ Εφαρμογή: ⊙



$$\vec{J}_e = J_0 \hat{i} = (J_0, 0, 0)$$

Λίγότερα ηλεκτροστατικά το πρόβλημα προκινεί για το δυναμικό $V_x = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot z$.

Αλλάζοντας το $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ με $\mu_0 J_0$ προκινεί:

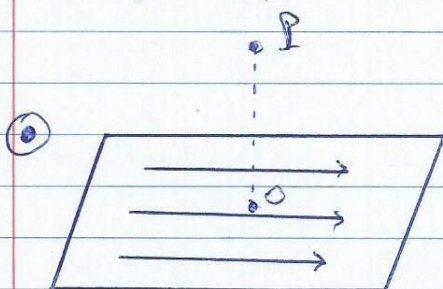
$$\phi_x = -\frac{1}{2} \mu_0 J_0 \cdot z, \quad \phi_y = 0, \quad \phi_z = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\phi} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{2} \mu_0 J_0 z & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \mu_0 J_0 \hat{j}$$

Όμοιος δουλειά και για κάτω από την επιφάνεια, όπου το μόνο που αλλάζει είναι ένα πρόσημο. Προκινεί, λοιπόν:

$$\vec{B} = \begin{cases} -\mu_0 \frac{J_0}{2} \hat{j}, & z > 0 \\ \mu_0 \frac{J_0}{2} \hat{j}, & z < 0 \end{cases}$$

Η εφρανομενική συνιστώσα έχει αξιόμετρο $\mu_0 J_0$.



$$\vec{r}' = x' \hat{i} + y' \hat{j}$$

$$\vec{r} = z \hat{k}$$

$$\vec{B}(z \hat{k}) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \int \frac{\hat{i} \times (z \hat{k} - x' \hat{i} - y' \hat{j})}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} dx' dy'$$

$$\vec{J}_0 \hat{i} \Rightarrow \vec{B}(z \hat{k}) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \int \frac{-z \hat{j} - y' \hat{k}}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} dx' dy'$$

Σε πολικές συντεταγμένες μπορεί να γραφεί:

$$dx' dy' = \rho' d\rho' d\phi', \quad y' = \rho' \sin\phi', \quad x'^2 + y'^2 = \rho'^2$$

Προκιντεί:

$$\vec{B}(z\hat{k}) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\infty} \rho' d\rho' \cdot \frac{-z\hat{j} + \rho' \sin\varphi' \hat{i}}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}(z\hat{k}) = -\frac{\mu_0 J_0}{2} z \int_0^{\infty} \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \hat{j} \cdot \frac{z}{|z|}$$

Άρα προκιντεί το ίδιο αποτέλεσμα με πριν, αφού

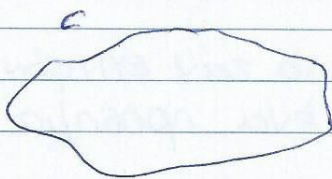
$$\frac{z}{|z|} = 1, \text{ για } z > 0 \text{ και } \frac{z}{|z|} = -1, \text{ για } z < 0.$$

23/11/2019

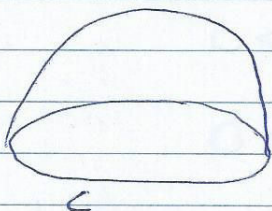
ΔΙΑΛΕΞΗ #18

(Γ. Διολιάντας)

Τρίτου μέλους αίρετος κυρτοποιημένο πεδίο - Νόμος Ampere:



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc}$$



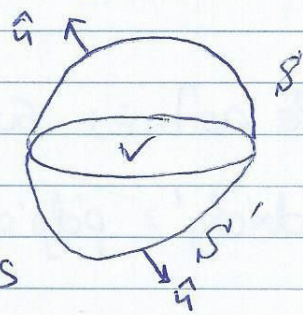
$$\rightarrow I_{enc} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds$$

Ο Νόμος του Ampere γίνεται: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S(C)} \vec{J} \cdot \hat{n} ds$

$$\text{όπως } \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} ds$$

Προκιντεί, έτσι, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. Εάν ισχύει αυτή η εξίσωση

προκιντεί $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, δηλαδή το ρεύμα είναι στατικό (τα στατικά ρεύματα είναι αωδυναμικά).



$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv = 0 \Rightarrow \int_A \vec{J} \cdot \hat{n} ds = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds + \int_{S'} \vec{J} \cdot \hat{n} ds = 0 \Rightarrow \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds = - \int_{S'} \vec{J} \cdot \hat{n} ds$$

Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως για οποιαδήποτε επιφάνεια με εύρος των καμινών G η ένταση του ρεύματος είναι η ίδια.

Ο Νόμος του Ampere εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπου έχουμε επικονειακή και κυλινδρική αλληλεξάρτηση. Δεν υπάρχει εφαιρική αλληλεξάρτηση.

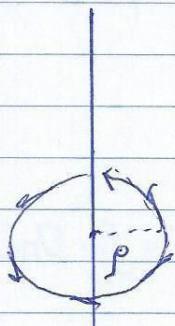
Κυλινδρική Συμμετρία

$$\vec{j}(\vec{r}) = j(\rho) \begin{cases} \hat{k} \text{ (i)} \\ \hat{\phi} \text{ (ii)} \end{cases} \text{ (Η ραδιόδωση } \hat{r} \text{ δεν επηρεάζεται).}$$

$$\text{θα ισχύει } \vec{B}(\vec{r}) = B(\rho) \begin{cases} \hat{\phi} \text{ (i)} \\ \hat{k} \text{ (ii)} \end{cases} \text{ κατ' αντιστοιχία με πριν.}$$

Αρα το μέτρο εξαρτάται από το ρ , ενώ η ραδιόδωση μπορεί να είναι μόνο των \hat{k} ή του $\hat{\phi}$ διεύθυνση.

(i):

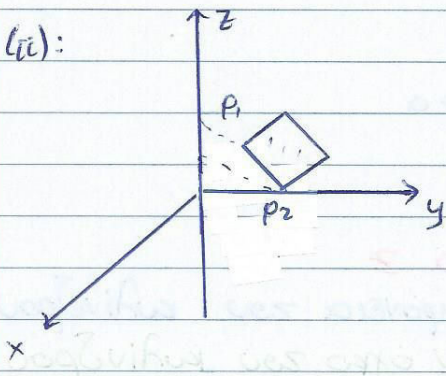


Νόμος Ampere: $\oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{enc}$

$$\oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int B(\rho) \cdot \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \cdot dl = \int B(\rho) dl = 2\pi\rho B(\rho)$$

$$\text{Αρα } B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_{enc}}{\rho}$$

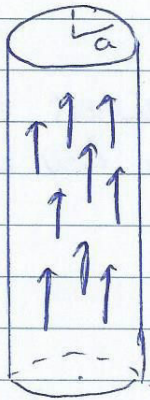
(ii):



$$B(\rho_2)L - B(\rho_1)L = \mu_0 \cdot I_{enc}$$

Ενώ δεν μπορώ να υποβιβάσω το μαθητικό πεδίο, αλλά διαφορά των εντάσεων. Χρειάζεται κάποια συνοριακή συνθήκη για να το κόσω αυτό, π.χ. που το B κενδρίζεται.

⇒ Εφαρμογή: $\vec{J} = J_0 \hat{k}$ (περίπτωση (i)).



i) Για $\rho < a$: $B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \cdot J_0 \cdot \pi \rho^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0}{2} J_0 \cdot \rho$

ii) Για $\rho > a$: $B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \cdot J_0 \cdot \pi a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0}{2} J_0 \cdot \frac{a^2}{\rho}$

Άρα $\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} J_0 \cdot \rho \cdot \hat{\phi} & , \rho < a \\ \frac{\mu_0 J_0}{2} \cdot \frac{a^2}{\rho} \cdot \hat{\phi} & , \rho > a \end{cases}$

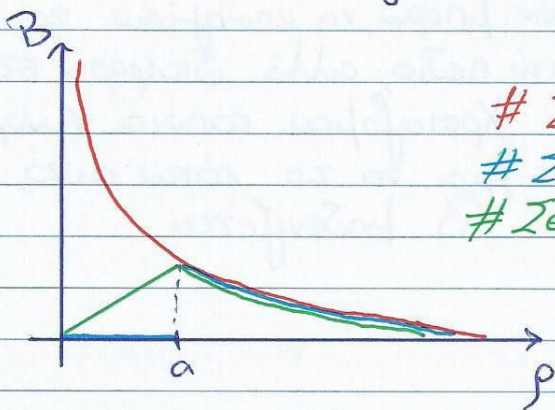
• $I(\rho) = \begin{cases} J_0 \cdot \pi \rho^2 & , \rho < a \\ J_0 \pi a^2 & , \rho > a \end{cases}$

Τι συμβαίνει όταν το ρεύμα βρίσκεται μόνο στην επιφάνεια του κυλίνδρου;

i) Για $\rho < a$: $B(\rho) = 0$ ($I = 0$)

ii) Για $\rho > a$: $B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \cdot J_0 \cdot 2\pi a$ ($I = J_0 \cdot 2\pi a$)

Άρα $\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & , \rho < a \\ \frac{\mu_0}{\rho} J_0 \cdot a \cdot \hat{\phi} & , \rho > a \end{cases}$



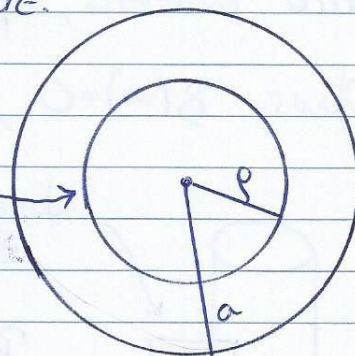
- # Στον άξονα z
- # Στην επιφάνεια του κυλίνδρου
- # Σε όλο τον όγκο του κυλίνδρου

Έστω ραβία με σταθερό ρεύμα με:

$$\vec{j} = \begin{cases} k_0 \cdot \rho \cdot \hat{k} & , \rho < a \\ 0 & , \rho > a \end{cases}$$

$$\int \vec{j}(\vec{r}) \hat{n} ds = \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} j(\rho') \hat{k} \hat{k} \cdot d\vec{s} =$$

αμπεριανός
βρόχος



$$= \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} j(\rho') \cdot \rho' d\rho' d\phi = 2\pi \cdot k_0 \cdot \frac{1}{3} \rho^3$$

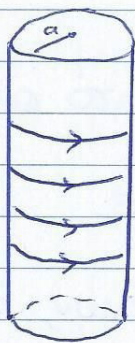
Άρα $\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 k_0}{3} \rho^2 \hat{\phi} & , \rho < a \\ \frac{\mu_0 k_0}{3} \frac{1}{\rho} a^3 \hat{\phi} & , \rho > a \end{cases}$

Το συνολικό ρεύμα είναι $I = \frac{k_0 \cdot 2 \cdot \pi a^2}{3}$

⇒ Εξομοίωση: $\vec{j} = j_e \cdot \hat{\phi}$ (περιττωμένη τιμή)

(Η διατάξη αυτή μπορεί να επιτευχθεί με ημίο).

$j_e = \frac{1}{2} I \rightarrow$ σείρες / μονάδα μήκους



(Η διατάξη μπορεί να επιτευχθεί και με περιττωμένο κώνυνο κώλυνο κόνισμα (σπείρας))

$j_e = \sigma \cdot \omega \cdot a \rightarrow$ γωνιακή ταχύτητα

Εδώ, περιμένουμε $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho) \cdot \hat{k}$.

αμπεριανός
βρόχος



Νόμος Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{enc}$, αλλά

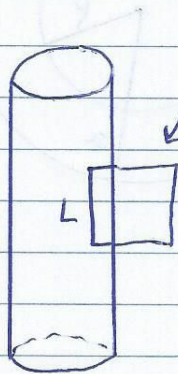
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l} =$$

$$= 0 + B(\rho_2)L + 0 - B(\rho_1) \cdot L$$

Επίσης, $I_{enc} = 0$ στον βρόχο.

Κατά συνέπεια, προκύπτει $B(\rho) L - B(\rho_2) L = 0 \Rightarrow B(\rho) = B(\rho_2)$

Όπως $B(\infty) = 0$, άρα $B(\rho) = 0, \rho > a$.



αμπεριανός
βρόχος

$$B(\rho) \cdot L = \mu_0 \cdot I_{enc} \cdot L$$

$$\text{Άρα τελικά } \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 \cdot I_{enc} \cdot \hat{k}, & \rho < a \\ \vec{0}, & \rho > a \end{cases}$$

Και σε αυτήν όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, έχουμε συνέπεια.

25/11/2015

ΔΙΑΜΕΣΗ #19

(N. Ζααρίδου)

Επίλυση προβλήματος μέσω του Νόμου Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

- i) $\vec{r} = \vec{e}' - \vec{e}$
- ii) Υπολογίσαμε το $|\vec{r}|$ και κατά συνέπεια το \vec{r} .
- iii) Υπολογίσαμε το $d\vec{s} \times \vec{r}$
- iv) ολοκληρώσαμε

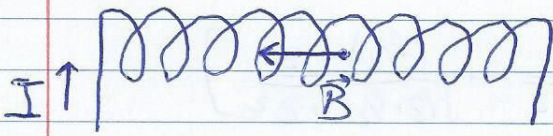
Όλα αυτά, σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, αναλόγως με το πρόβλημα.

Επίλυση προβλήματος μέσω του Νόμου Ampere:

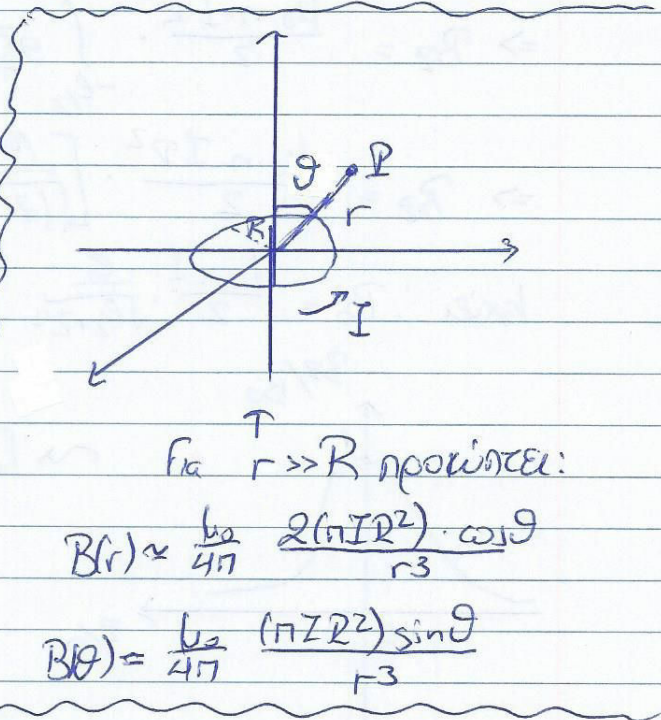
$$\oint_e \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{enc}$$

- i) Προσδιορίσω τα σύμμετρα του προβλήματος
- ii) Προσδιορίσω τα όρια του μαθηματικού πεδίου
- iii) Ανεκαθίστω και υπολογίσω το ολοκλήρωμα.

Πηνία



Χρησιμοποιούμε αυτό →
 το πρόβλημα με κυκλικές
 προεξοχές. Προκύπτει
 πως στο εσωτερικό
 του πηνίου δημιουργείται
 μαγνητικό πεδίο έντασης
 \vec{B} .

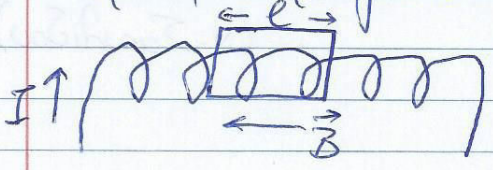


Για $r \gg R$ προκύπτει:

$$B(r) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(nIR^2) \cdot \cos\theta}{r^3}$$

$$B(\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(nIR^2) \sin\theta}{r^3}$$

Πείρασμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που κόβει το πηνίο:



Νόμος Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot l$

όπου $n = \frac{\text{σπείρες}}{\text{μπαράλληλος}}$.

Αρα $B \cdot l = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot l \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 \cdot n \cdot I}$

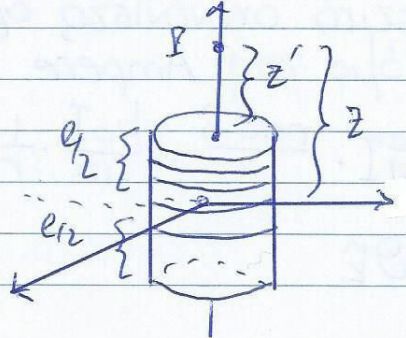
Το αποτέλεσμα αυτό έχει σαν συνέπεια να είναι
 όμοιο, διαφορετικά δεν έχει.

Για τον άξονα με το δαχτυλίδι εάν το σημείο P ήταν στην
 άκρη άξονα z, τότε προκύπτει:

$$B_z = \frac{\mu_0}{z} \cdot \frac{I R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Τι συμβαίνει αν χρησιμοποιήσουμε πολλά

τέτοια δαχτυλίδια να τα φτιάξουμε ένα αλληλοειδές
 ημικραδίου μήκους l ;



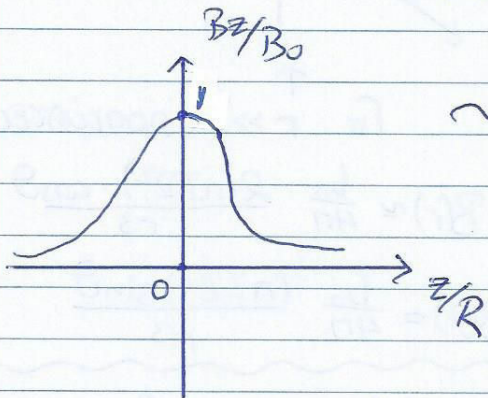
$$dB_z = \frac{\mu_0 R^2 \cdot dI}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_z = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu_0 R^2 \cdot n \cdot I \cdot dz'}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I R^2}{z} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{2[(z-z')^2 + R^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I R^2}{z} \left. \frac{z-z'}{R^2 \sqrt{(z-z')^2 + R^2}} \right|_{-l/2}^{l/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{z} \cdot \left[\frac{(l/2) - z}{\sqrt{(z-l/2)^2 + R^2}} + \frac{(l/2) + z}{\sqrt{(z+l/2)^2 + R^2}} \right]$$

για $B_0 = \frac{\mu_0 n I}{z} \cdot \frac{e}{\sqrt{l/2+z}}$ και $B_0 = \mu_0 n I$ (όπως πριν)



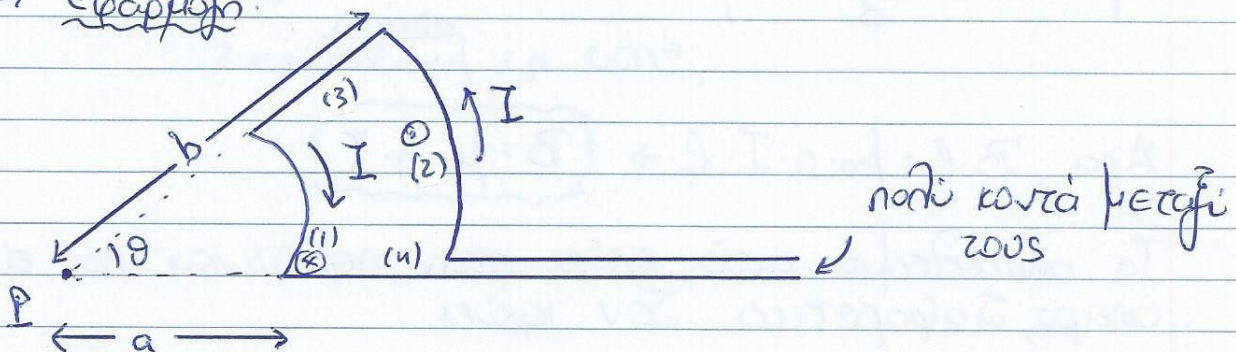
για $z \ll R$ ισχύει $B_z \approx B_0$.

27/11/2015

ΔΙΑΓΕΗ #20

(N. Σααλιδού)

⇒ Εφαρμογή:



Γενικά δουλεύω με:

1) $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$ (Biot-Savart)

2) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$ (Νόμος Ampere)

Το έχω και ως άσκηση είναι σχετικά απλό να δείξω ότι δεν μπορώ να δουλέψω με τον Νόμο του Ampere.

(1): $d\vec{s} \times \hat{r} = r \cdot d\theta \hat{k}$, άρα $d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{r d\theta \hat{k}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} d\theta \hat{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{a} \int d\theta \hat{k} \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \theta \hat{k}$

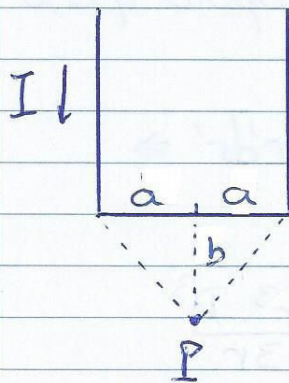
(2): Όποια προκύπτει: $\vec{B}_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cdot \theta \hat{k}$

(3), (4): $d\vec{s} \times \hat{r} = 0$, άρα $B_3 = B_4 = 0$

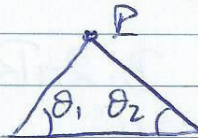
Τελικά, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \theta \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \hat{k}$

⇒ Εφαρμογή: Έστω άπειρος αγωγός σε σχήμα "Π"

που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I . Να βρεθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου σε σημείο P που φαίνεται στο σχήμα:



Χρησιμοποιούμε 3 φορές την εφαρμογή



το αποτέλεσμα της οποίας ήταν

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

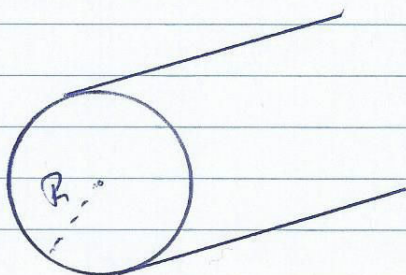
Προκύπτει αποτέλεσμα:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi ab \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \left(b \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - b^2 - a^2 \right) \cdot \hat{k}$$

Όταν $a \rightarrow 0$ ισχύει $B \rightarrow 0$.

⇒ Εφαρμογή: Έστω αγωγός ακτίνας R , ο οποίος διαρρέεται

από ρεύμα χωρικής πυκνότητας $\vec{j} = a \cdot r \hat{k}$



θα ισχύει $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$

Για $r < R$ ο νόμος του Ampere δίνει:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_{\text{enc}} \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot \int \vec{j} \cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot \int_0^r a \cdot r' \cdot 2\pi r' dr' \Rightarrow B \cdot r = \mu_0 \cdot \int_0^r a \cdot r'^2 dr' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \cdot r = a \cdot \mu_0 \cdot \frac{r^3}{3} \Rightarrow B = a \cdot \mu_0 \cdot \frac{r^2}{3}.$$

Από η ένταση του πεδίου είναι ομών κατεύθυνση \hat{e} ,
θα ισχύει $\vec{B} = a \cdot \mu_0 \cdot \frac{r^2}{3} \hat{\phi}$.

Για $r > R$ ο νόμος του Ampere με όμοιο τρόπο δίνει:

$$\oint \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_{\text{enc}} \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot \int_0^R a \cdot r' \cdot 2\pi r' dr' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \cdot r = \mu_0 \cdot a \cdot \frac{r'^3}{3} \Big|_0^R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \cdot r = \mu_0 \cdot a \cdot \frac{R^3}{3} \Rightarrow B = \mu_0 \cdot a \cdot \frac{R^3}{3r}.$$

Όμοια με πριν, $\vec{B} = \mu_0 \cdot a \cdot \frac{R^3}{3r} \hat{\phi}$. Τελικά:

$$\vec{B} = \begin{cases} a \cdot \mu_0 \cdot \frac{r^2}{3} \hat{\phi}, & r < R \\ a \cdot \mu_0 \cdot \frac{R^3}{3r} \hat{\phi}, & r > R \end{cases}$$

30/11/2015

ΔΙΑΛΕΞΗ #21

(Γ. Διαφάνους)

Ηλεκτροστατικό Μέδιο :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\omega$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\omega$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Μαγνητοστατικό Μέδιο :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\omega$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\omega$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Η ροή πεδίων που γεννών μαγνητοστατικά μέσα είναι μηδέν σε μια επιφάνεια (ανό νόμο Gauss).

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \int \rho(\vec{r}') d\omega + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\omega$$

Για ανεπαρκή κατανομή πεδίων:

$$r' > R, \quad \vec{j}(\vec{r}') = 0$$

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \int \vec{j}(\vec{r}') d\omega + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot \int \vec{j}(\vec{r}') d\omega + \dots$$

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0 \Rightarrow \int \vec{\nabla}' (\psi(\vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}')) d\omega' = 0 \quad (1) =$$

= $\oint \psi(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \cdot \hat{n} ds$, με ψ οποιαδήποτε συνάρτηση

$$\vec{\nabla}(\psi \vec{a}) = (\vec{\nabla}\psi)\vec{a} + \psi \cdot \vec{\nabla}\vec{a} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}\psi(\vec{r}')) \vec{j}(\vec{r}') d\omega' = 0$$

$$I = \int \vec{j}(\vec{r}') d\omega \quad , \quad II = \int \vec{r} \cdot \vec{r}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') d\omega$$

(I): $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ $\begin{cases} u_x = \int j_x(\vec{r}') d\omega' \\ u_y = \int j_y(\vec{r}') d\omega' \\ u_z = \int j_z(\vec{r}') d\omega' \end{cases}$ \rightarrow οι 3 συνιστώσες του πεδίου

$$\psi(\vec{r}') = x' \quad , \quad \vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') = (1, 0, 0)$$

$$\vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') = \vec{j}(\vec{r}') - \vec{j}_z(\vec{r}')$$

Συμπέρασμα: Για πεπερασμένες κατανομές στατικά πεδία αν οριοθετώσουμε τις 3 συνιστώσες του πεδίου στο χώρο, το οριοθέτημα μηδενίζεται.

$$(II): \vec{A}_x = \int \frac{1}{z} (xx' + yy' + zz') \vec{j}_x(\vec{r}') d\omega'$$

Θεωρώ $\psi(r'^2) = x'^2 \Rightarrow \vec{\nabla}' x(\vec{r}') = (2x', 0, 0)$, άρα

$$\vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') = \vec{j} = 2x' \cdot \vec{j}_x(\vec{r}')$$

$$\psi(\vec{r}') = x'y' \quad , \quad \vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') = (y', x', 0)$$

$$\vec{j}(\vec{r}') = (j_x, j_y, j_z) = y' \cdot \vec{j}_x + x' \cdot \vec{j}_y$$

$$\int (x_i j_i + x_j j_j) d\omega' = 0$$

$$A_x = y \int y' j_x d\omega' + z \int z' j_x d\omega' = \frac{1}{2} \int y \int (y' j_x - x' j_y) d\omega' +$$

$$+ z \int z' (j_x - x' j_z) d\omega' \Big\} = \frac{1}{2} [\vec{r} \times \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d\omega']_x$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} (-) \frac{\vec{r} \times \vec{m}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad , \quad \mu_e$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \int (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) d\omega'$$

→ ορισμός μαγνητικής διπολικής ροής

Αν, δηλαδή, ανακρινόμαστε από το μαγνητοστατικό δυναμικό, βλέπουμε το διονομαρτικό δυναμικό σαν διπολό

$$\text{Για } \Omega = G: \text{ ενινεδη } \rightarrow \vec{m} = I \cdot S \cdot \hat{n}$$

$$\frac{1}{2} \oint \vec{z} \times d\vec{\ell} = \frac{1}{2} \hat{z} (x dy - y dx) = \hat{z} \int_D dx dy \quad , \quad \vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$$

- f3 -

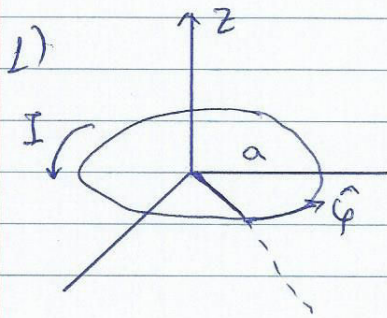
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{m_y z - m_z y}{r^3}, \frac{m_z x - m_x z}{r^3}, \frac{m_x y - m_y x}{r^3} \right)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{m_x}{r^3} - \frac{3(m_x y - m_y x) y}{r^5} - \left[\frac{m_x}{r^3} - \frac{3(m_z x - m_x z) z}{r^5} \right] \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^5} \left\{ 3x(\vec{m} \cdot \vec{r}) - m_x r^2 \right\}, \text{ ομοίως και για τις συνιστώσες } y, z.$$

$$\vec{B}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{r}'(\vec{m} \cdot \vec{r}') - \vec{m} r'^2}{r^5}$$

Θέτουμε να υπολογίσουμε τα μαγνητικά διανύσματα πομπής:

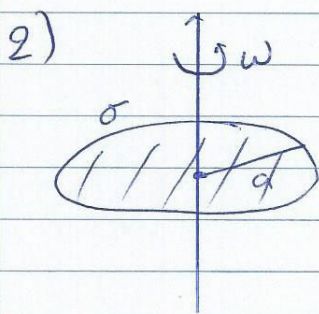


$$\vec{m} = \frac{1}{2} a I \cdot \int (\cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j}) \times (-\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}) a d\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} I a^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{m} = I \pi a^2 \hat{k}$$

$$\vec{r} = a \cdot \cos\phi \hat{i} + a \cdot \sin\phi \hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}$$



$$\vec{J}_e = \sigma \cdot \omega \cdot \rho \cdot \hat{\phi} \text{ (όχι ομογενής)}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\text{πλάτ}} \rho \cdot \hat{\phi} \times \sigma \omega \rho \hat{\phi} \cdot ds \text{ " } \rho d\phi d\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} \hat{k} \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho^3 d\rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{\sigma \cdot \omega \cdot \pi}{4} \cdot a^4 \hat{k}$$

2/12/2015

ΔΙΑΛΕΞΗ #22

(N. Σαουδιδου)

Επαγωγή

Στοιχειώδης Ροή: $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}$

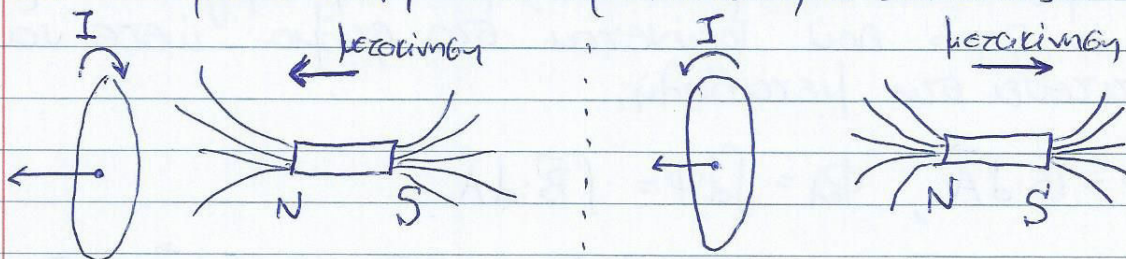
Ροή: $\Phi_{ολ} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$, αν $\Phi = σταθ.$ τότε δεν έχουμε ρεύμα.

πρέπει η ροή να μεταβάλλεται για να υπάρχει ροή.

Ισχύει: $\frac{d\Phi}{dt} = -\dot{\epsilon}$ → ηλεκτρογεννητική δύναμη

$\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \left[\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \right]$. Το ηλεκροστατικό πεδίο που δημιουργείται από κινούμενες μαγνήτες δεν είναι διατηρητικό.

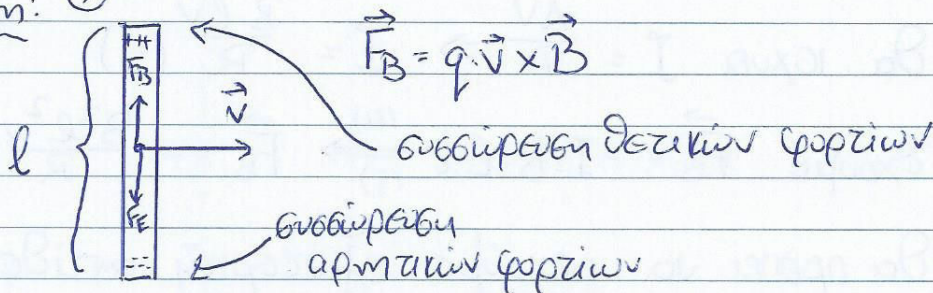
Το πείρα δείχνει να κινείται έτσι ώστε να εξουδετερώνει τη μεταβολή που προκαλέσαμε (κανόνας Lenz).



Ισχύει $\epsilon = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$ για ημείο, όπου N ο αριθμός σπείρων.

Η ροή μετριέται σε Weber ($1W = 1T \cdot 1m^2$)

⇒ Εφαρμογή: $\otimes B$



Για να υπάρξει ισορροπία στο εσωτερικό της ράβδου θα πρέπει να ισχύει $\vec{F}_E = \vec{F}_B \Rightarrow$

- 75 -

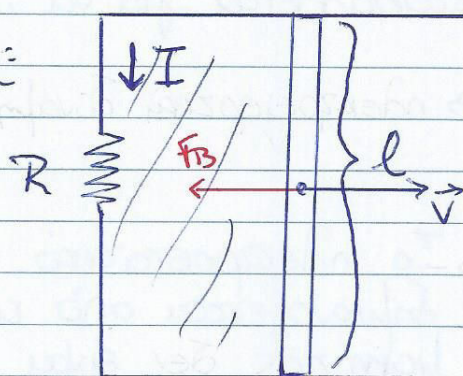
$$\Rightarrow q\vec{E} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

$$\Delta V = \int_e \vec{E} d\vec{\ell} = v \cdot B \cdot l \quad (2)$$

$$\Delta V = \int_e (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad (3)$$

Αρα στα άκρα του ραβδίου δημιουργείται ηλεκτρομαγνητική δύναμη λόγω κίνησης.

Εφαρμογή:



$\otimes \vec{B}$

Αγώγιμο
Ραβδος κινείται χωρίς τριβές στις ράγες του οχήματος με σταθερή ταχύτητα \vec{v} προς τα δεξιά.

Μετακινώντας το ραβδί αυξάνεται η ροή (αυξάνεται το εμβαδόν της επιφάνειας), άρα δημιουργείται ρεύμα με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα ώστε να αντισταθεί στην μεταβολή.

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \Phi_{tot} = \int d\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int \vec{B} \cdot d\vec{A} \right] = \frac{d}{dt} \left[\vec{B} \cdot \int d\vec{A} \right] = \vec{B} \cdot \frac{d}{dt} \left[\int d\vec{A} \right] =$$

$$= B \cdot l \cdot v, \quad \text{αρα} \quad \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot l \cdot v = -\mathcal{E} \quad (4)$$

$$\text{Οα ισχύει} \quad I = \frac{\Delta V}{R} \Rightarrow I = \frac{B \cdot l \cdot v}{R} \quad (5)$$

$$\text{Έχουμε} \quad \vec{F}_B = -I \cdot B \cdot l \cdot \hat{i} \xrightarrow{(4)} \vec{F}_B = -\frac{B^2 l^2 v}{R} \hat{i}$$

Οα πρέπει να αποκτήσει εξωτερική αντίθετη δύναμη

$$\vec{F}_{ext} = \frac{B^2 l^2 v}{R} \hat{i} \quad \text{έτσι, ώστε να ισχύει η συνθήκη } v = \text{const.}$$

$$W = \int_S \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{s} \Rightarrow P = \frac{d}{dt} \left[\int_S \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{s} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{B^2 l^2 v}{R} ds \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{B^2 l^2 v}{R} \cdot \frac{ds}{dt} \Rightarrow P = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

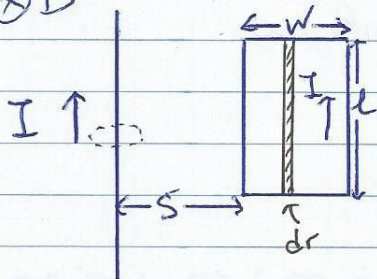
Η ισχύς λόγω αντίστασης είναι:

$$P' = I^2 R = \frac{B^2 l^2 v^2}{R^2} \cdot R \Rightarrow P' = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

Προφανώς, προκύπτει $P' = P$, αφού πρέπει στο σύστημα να προσεφέρεται ενέργεια τόσο όσο ακριβώς "χάνεται" λόγω της αντίστασης (διαφορετικά δεν θα μπορούσε να έχει $v = \text{const}$).

\Rightarrow Εφαρμογή: Έστω ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I .

$\otimes B$



Θεωρούμε ότι $I(t) = a + bt$, με a, b θετικές σταθερές

← παραγωγικό πεδίο

Το πρόβλημα επιφανείως κτηνόδοξο σύμπερασμα, ότι ο

Νόμος του Ampere δίνει: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \cdot \frac{1}{r} \cdot \hat{\phi}$$

Η ροή στο πδαίοιο θα είναι:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int \frac{\mu_0}{2\pi} I \cdot \frac{1}{r} \cdot \hat{\phi} \cdot d\vec{A} =$$

$$= \int_s^{s+w} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot l \cdot dr \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{s+w}{s}\right)$$

$$\text{Όμως } \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 (a+bt)}{2\pi} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{s+w}{s}\right) \right] \Rightarrow$$

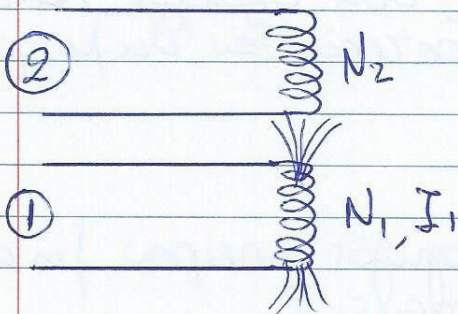
$$\Rightarrow \mathcal{E} = - \frac{\mu_0 b \ell}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{5\pi w}{s} \right)$$

Το πείμα αυξάνεται με το χρόνο, άρα αυξάνεται και το B. Γι'αυτό δημιουργείται πείμα με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα έτσι ώστε να "αντιπαρατίθεται" τη μεταβολή που προκαλείται.

4/12/2015

ΔΙΑΛΕΞΗ #23

(N. Ζαωλίδου)



Αν μεταβληθεί ένταση I_1 , τότε για το σωληνοειδές (2) θα ισχύει:

$$\mathcal{E}_{21} = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

↘ συντελεστής αλληλεπίδρασης

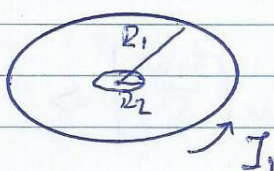
Ο συντελεστής M ονομάζεται αμοιβαίος επαγωγής και ορίζεται ως εξής:

$$M_{21} = N_2 \cdot \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

(το (-) παραδεινεται αφού το νόημα του βρόχου είναι καθαρά φυσικό και σχετίζεται με τον κανόνα του Lenz).

Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής σχετίζεται και με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των σωληνοειδών, και όχι πάντοτε από την ένταση του πείματος. Φυσικά, όμοια ορίζεται και ο M_{12} στο συμμετρικό πρόβλημα.

⇒ Εφαρμογή: Έστω δακτύλιος εξωτερικής ακτίνας R_1 και εσωτερικής ακτίνας R_2 , με $R_1 \gg R_2$, ο οποίος διαρρέεται από ηλεκτρικό πείμα έντασης I_1 .



Έχουμε ήδη βρει πως $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}$

Από $R_1 \gg R_2$, θεωρούμε πως το B_1 στην επιφάνεια των δακτυλίων δε μεταβάλλεται.

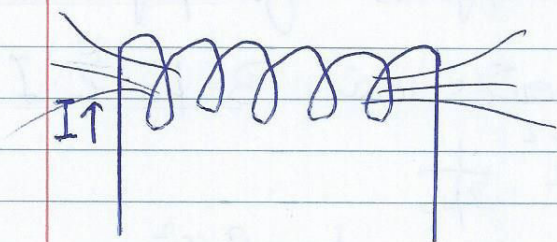
$$\text{Ισχύει } \Phi_{21} = \vec{B}_1 \cdot \vec{A}_2 = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2R_1} \cdot \pi R_2^2 \quad (1)$$

Από τα σχέδια $M_{21} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{21}}{I_1}$ παίρνουμε:

$$M_{21} = \frac{I_1 \cdot \mu_0}{2R_1} \cdot \pi R_2^2, \text{ άρα η εξάρτηση είναι καθαρά από}$$

τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δακτυλίων και όχι των εντάξων του ρεύματος.

Αυτεπαγωγή (L)



$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$$

αυτεπαγωγή
αυτεπαγωγής

Όπως $\mathcal{E}_L = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$, άρα προκύπτει:

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (\text{μονάδα στο S.I.: 1 Henry})$$

Για απείρου πλάτους σωληνοειδές είχαμε υπολογίσει στο εσωτερικό του:

$$B = \mu_0 \cdot I \cdot n, \quad n = \frac{N}{l}$$

Άρα για σωληνοειδές ισχύει:

$$L = \frac{N(\mu_0 \cdot I \cdot n) \cdot \pi \cdot R^2}{I} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \cdot \pi R^2 \cdot N^2}{l}$$

Για των ισχύ ισχύει:

$$P = \mathcal{E}_L \cdot I = \frac{dW}{dt}. \text{ Όπως είπαμε } \mathcal{E}_L = -L \cdot \frac{dI}{dt}, \text{ άρα:}$$

$$\frac{dW}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt} \cdot I \Rightarrow \boxed{W = U_L = \frac{1}{2} LI^2}$$

ενέργεια αποθηκευμένη σε βωλιννοειδές που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και έχει βωλιννοειδή αυτεπαγωγής L .

Κατ' αναλογία:

$$U_B = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \rightarrow \text{πυκνότητα ενέργειας λόγω μαγνητικού πεδίου}$$

$$\text{Έχουμε δει πως για βωλιννοειδές ισχύει } B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I$$

$$\text{Άρα προκύπτει: } U_B = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{e^2} \cdot \frac{1}{2\mu_0}$$

$$U_L = \int U_B = \int \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{N^2 \cdot I^2}{e^2} \cdot dv \Rightarrow U_L = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{N^2 \cdot I^2}{e^2} \cdot (\pi R^2) \cdot l \Rightarrow$$

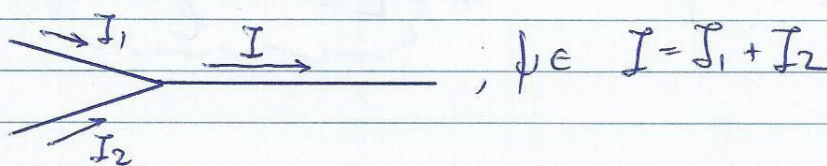
$$\Rightarrow U_L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot I^2 \cdot \pi R^2}{2l} \Rightarrow U_L = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \frac{N^2 \pi R^2}{l} \cdot I^2 \Rightarrow$$

= L

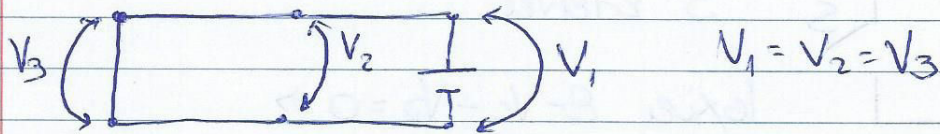
$\Rightarrow U_L = \frac{1}{2} LI^2$, άρα προκύπτει όπως ήταν αναμενόμενο το ίδιο αποτέλεσμα.

Κανόνες του Kirchhoff

#Αρχή Διατήρησης του ρεύματος:



Άρχη Διατήρησης της Ενέργειας



7/12/2015

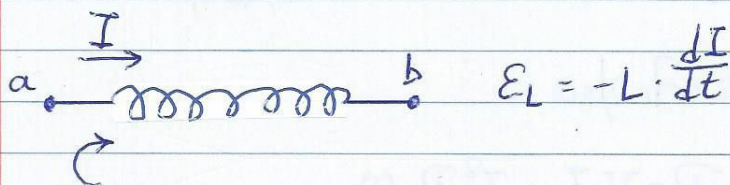
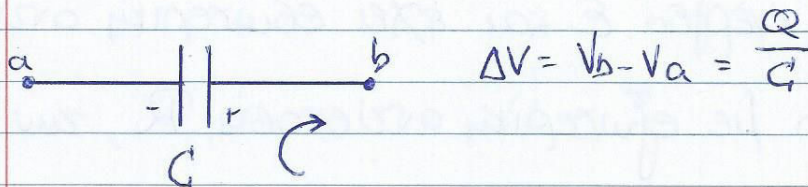
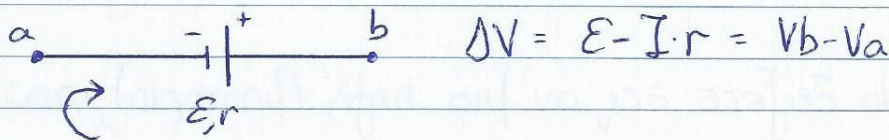
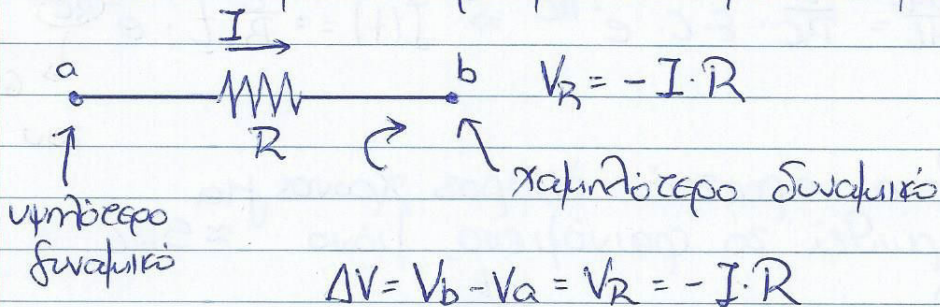
ΔΙΑΛΕΞΗ #24

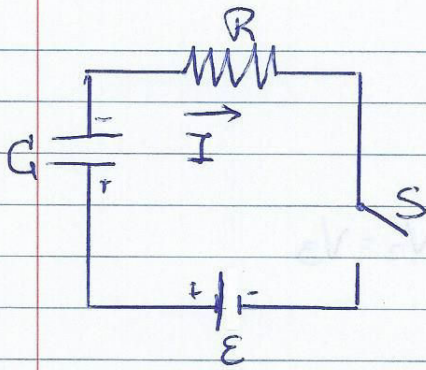
(N. Ζαχαριάδου)

Κυκλώματα

Υπάρχουν δύο ειδών κυκλώματα:

- απεχούς παθητικός και
- εναρτησόμενου παθητικός (μετάξι με phasors)





Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο πυκνωτής είναι αφορτισμένος και ο διακόπτης S κλείνει.

Ισχύει $E - V_C - V_R = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow E - \frac{q(t)}{C} - IR = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E - \frac{q(t)}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \Rightarrow \frac{E \cdot C - q(t)}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot C - q(t) - R \cdot C \cdot \frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow dq = \frac{(E \cdot C - q(t))}{RC} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{RC} = \frac{dq}{EC - q} \Rightarrow q(t) = E \cdot C \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Άρα $I = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot E \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow I(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

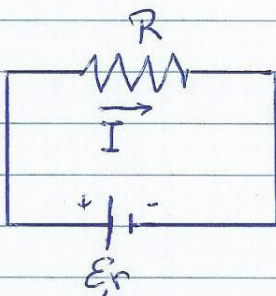
↓ σταθερά του συστήματος

Δεν χρειάζεται να πιαστεί κανένας χρόνος για να ομοιωθεί το φαινόμενο, μόνο $\approx 5RC$.

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow V_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

⇒ Εφαρμογή: Να βρείτε για μια ηχηρή (ηχοαπόδοση), που

μπορεί να πάρει ενέργεια E και έχει εσωτερική αντίσταση r , και είναι συνδεδεμένη με εξωτερική αντίσταση R , των οποίων τις εξωτερικές αντιστάσεις ώστε να έχουμε τη μέγιστη δυνατή ισχύ στο κύκλωμα.

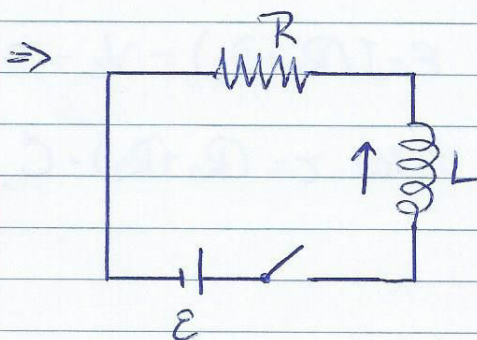


$$P = V \cdot I = I^2 \cdot R \quad (1)$$

$$E - Ir - IR = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{r+R} \quad (2)$$

$$(1)(2): P = \frac{E^2}{(r+R)^2} \cdot R$$

Θέτουμε $\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow R=r$ (το $R=0$ δεν είναι λύση διότι, διότι οριζοτιχτεί στον ελάχιστο λόγο)



Την $t=0$ κλείνουμε τον διακόπτη.

λογίαι: $\epsilon - L \frac{dI}{dt} - IR = 0 \Rightarrow \left(\frac{\epsilon - IR}{L} \right) dt = dI \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dt}{L} = \frac{dI}{\epsilon - IR} \Rightarrow -\frac{Rt}{L} = \ln\left(\frac{\epsilon - IR}{\epsilon}\right) \Rightarrow$

$\frac{\epsilon - IR}{\epsilon} = e^{-\frac{Rt}{L}} \Rightarrow \epsilon - IR = \epsilon e^{-\frac{Rt}{L}} \Rightarrow$

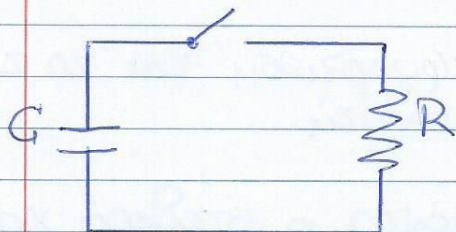
$IR = \epsilon(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) \Rightarrow I = \frac{\epsilon}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$

9/12/2015

ΔΙΑΓΝΩΣΗ #25

(N. Ζαχαριάδου)

Έστω πυκνωτής που αποφορτίζεται:



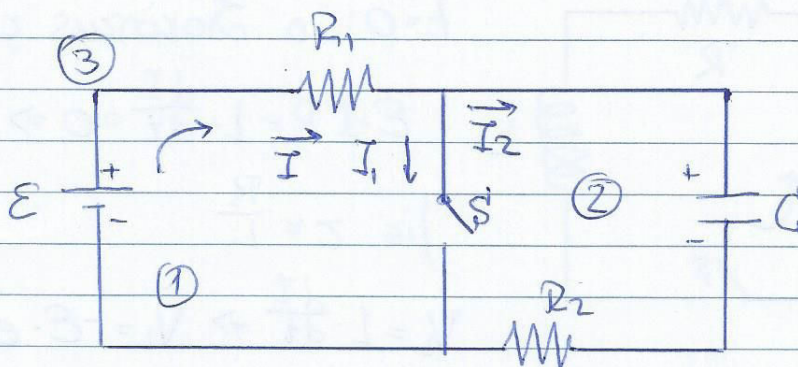
Την $t=0$ ο διακόπτης κλείνει.

$q(t) = Q \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, όπου $\tau = R \cdot C$

$i(t) = \left[\frac{Q}{RC} \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

$V_c = \left[\frac{Q}{C} \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Εφαρμογή:



Από το διακόπτη έχει μείνει για ώρα ανοικτός, τον $t=0$ τον κλείνουμε.

$$\text{Ισχύει } \mathcal{E} - IR_1 - V_C - IR_2 = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - I(R_1 + R_2) - V_C = 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow Η σταθερά του εκθετικού είναι $\tau = (R_1 + R_2) \cdot C$,

πριν κλείσω το διακόπτη.

Από κλείσει ο διακόπτης, ο πυκνωτής έχει φοριστεί με φορτίο Q για το οποίο ισχύει $Q = C \cdot \mathcal{E}$.

Τώρα ισχύει $\tau' = R_2 \cdot C$, επειδή μόνο η R_2 επιμέρεται στην αποφόρτιση του πυκνωτή.

$$(i): \mathcal{E} - IR_1 = 0 \quad (i) \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$$

$$(3): \mathcal{E} - IR_1 - \frac{q(t)}{C} - I_2 R_2 = 0 \quad (ii)$$

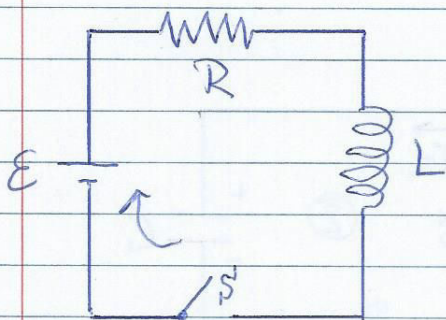
$$(i), (ii) \Rightarrow I_2 = - \frac{\frac{q(t)}{C}}{R_2} = - \frac{C \cdot \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}}}{C \cdot R_2} = - \frac{\mathcal{E}}{R_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}}$$

^{1ος} κανόνας Kirchhoff: $I_1 + I_2 = I \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}}$

Σημείωση: Το τ' αφορά την αποφόρτιση και το τ τη φόρτιση του πυκνωτή.

⊕ Η ποσότητα αυτή θα είναι πάντα η σταθερά χρόνου

Έστω, τώρα, κύκλωμα R-L.



$t=0$: ο διακόπτης κλείνει

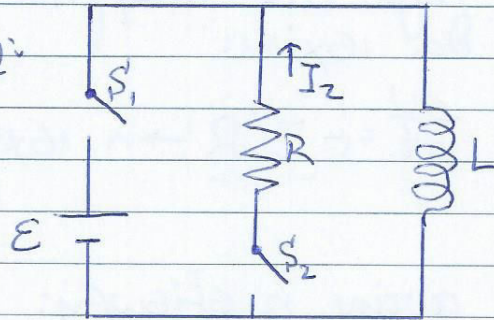
$$\mathcal{E} - IR - L \cdot \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\text{με } \tau = \frac{L}{R}$$

$$V_L = L \cdot \frac{dI}{dt} \Rightarrow V_L = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Την $t=0$ το I είναι μηδέν, λόγω αντανάκλασης του ρεύματος, το οποίο δηλώνουμε περί τα αρχιθετικές φορές. Μετά από S_2 η ένταση θα σταθεροποιηθεί και το ρεύμα θα συμπεριφέρεται σαν κοινό ρεύμα μηδενικής αντίστασης.

⇒ Εξομολογή:

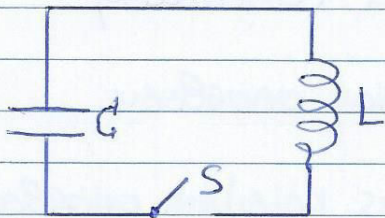


Ο S_1 είναι αρχικά κλειστός και ο S_2 ανοικτός. Την $t=0$ ανοίγουμε τον S_1 και κλείνουμε τον S_2 .

$$\text{Ισχύει } -I_2 R - L \cdot \frac{dI_2}{dt} = 0 \Rightarrow I_2(t) = \left[\frac{\varepsilon}{R} \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{με } \tau = \frac{L}{R}, \quad V_L = L \cdot \frac{dI_2}{dt} \Rightarrow V_L = \varepsilon \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Έστω τώρα το παρακάτω κύκλωμα LC:



Την $t=0$ ο πυκνωτής έχει φορτίο Q_0 (και το ρεύμα έχει αναμειχθεί ενεργειακά U). Την $t=0$ κλείνουμε το διακόστη S .

Ισχύει $U_{\text{ολ}} = U_C + U_L$ και αφού δεν έχουμε ενεργειακές απώλειες θα ισχύει:

$$\frac{dU}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \frac{Q^2(t)}{C} + \frac{1}{2} L \cdot I^2(t) \right] = 0 \Rightarrow$$

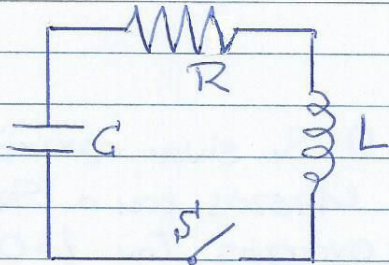
$$\Rightarrow \frac{Q}{C} + L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0 \quad (\text{Εξίσωση αρμονικών ταλαντώσεων})$$

$$\text{Αρα } Q = Q_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \varphi = 0$$

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Η ραδιόσυγχρονη αυτή διαρρέει για πάντα εάν δεν έχουμε ανώλετες ενεργειες.

Έστω, γενικά, ένα κύκλωμα RLC.



Εδώ έχουμε ενεργειακές ανώλετες λόγω της ύπαρξης αντιστάτη. Εδώ, θα ισχύει:

$$\frac{dU}{dt} = (-I^2 R) \rightarrow \text{η ισχύς που αποδίδεται στον αντιστάτη}$$

Προκρίνεται με βάση αυτήν, η εξίσωση:

$$Q/C + L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Προκρίνεται $Q = Q_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot e^{-\gamma t}$, με $\gamma = \frac{R}{2L}$,

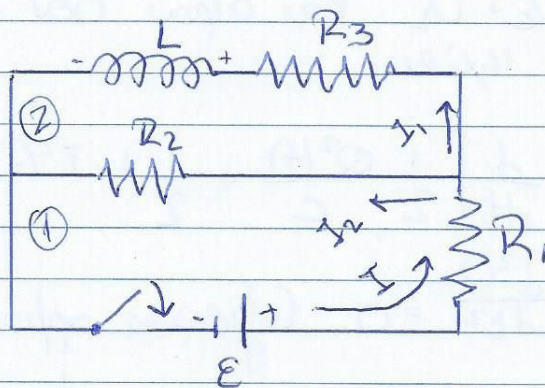
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Εάν $\omega_0^2 > \gamma^2$, τότε έχουμε φθίνουσα ραδιόσυγχρονη

Εάν $\omega_0^2 < \gamma^2$, τότε έχουμε απειρίας αποσβέσης.

Για $\omega_0 = \gamma$ προκρίνεται η περίπτωση της κριτικής αποσβέσης.

⇒ Εφαρμογή:



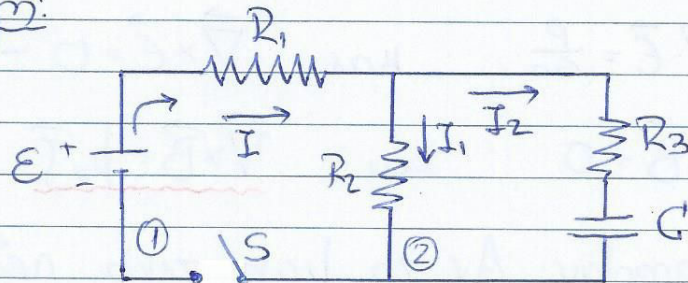
Να υποδείξετε τα πείματα που διαρρέουν κάθε αντιστάτη:

- i) κλίνης κλείνει ο διακόπτης ii) αμέσως χρόνο μετά το κλείσιμο του
- Μετά από αμέσως χρόνο ανοίγουμε ξανά τον διακόπτη.

Να υπολογιστούν για τα πεδία:

i) με το άνοιγμα του διακόπτη ii) αμέσως χροιά μετά

⇒ Εφαρμογή:



Για βρόχο (1) ισχύει: $\varepsilon - IR_1 - I_1 R_2 = 0 \Rightarrow \varepsilon - IR_1 = I_1 R_2$ (1)

Για τον άλλο βρόχο έχουμε: $\varepsilon - IR_1 - I_2 R_3 - V_C = 0$ (2)

$$\left. \begin{aligned} (1) \Rightarrow 40 &= 8I + 6I_1 \Rightarrow 3I_1 + 4I = 20 \\ \text{1ος κανόνας Kirchhoff} \Rightarrow I_1 + I_2 &= I \end{aligned} \right\} \Rightarrow 20 = 7I_1 + 4I_2 \quad (3)$$

(2) $\Rightarrow 6I_1 - 4I_2 - \frac{q}{C} = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} 6 \cdot \frac{20 - 4I_2}{7} - 4I_2 - \frac{q}{4 \cdot 10^6} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{120}{7} - \frac{24}{7}I_2 - 4I_2 - \frac{q}{4 \cdot 10^6} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 480 - 96I_2 - 4I_2 - 7 \cdot 10^6 q = 0 \Rightarrow 100 \frac{dq}{dt} + 7 \cdot 10^6 q = 480 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{100dq}{dt} = 480 - 7 \cdot 10^6 q \Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{480 - 7 \cdot 10^6 q} = \int_0^t \frac{dt}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{7 \cdot 10^6} \left[\ln(480 - 7 \cdot 10^6 q) \right]_0^q = \frac{t}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{480 - 7 \cdot 10^6 q}{480}\right) = -7 \cdot 10^4 t \Rightarrow 480 - 7 \cdot 10^6 q = 480 \cdot e^{-7 \cdot 10^4 t} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7 \cdot 10^6 q = 480(1 - e^{-7 \cdot 10^4 t}) \Rightarrow q = \frac{48}{7} \cdot 10^{-5} \cdot (1 - e^{-7 \cdot 10^4 t})$

$I_2 = \frac{dq}{dt} \Rightarrow I_2 = 48 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4 \cdot e^{-7 \cdot 10^4 t} \Rightarrow I_2 = 4,8 \cdot e^{-7 \cdot 10^4 t}$

Για $t=0$: $I_2 = 4,8 \text{ A}$. (3) $\Rightarrow 20 = 7I_1 + 19,2 \Rightarrow I_1 = \frac{8}{70} \text{ A}$.

$I = I_2 + I_1 \Rightarrow I = \frac{344}{70} \text{ A}$.

Το ολικό φορτίο του πυκνωτή θα είναι $Q = \frac{48}{7} \cdot 10^{-5} \text{ C}$

11/12/2015

ΔΙΑΛΕΞΗ #26

Ισχύουν: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ και $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (*)}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ και $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

⊛ Νόμος Faraday: Αν το μαγνητικό πεδίο έχει χρονική εφαρμογή, τότε $\vec{\nabla} \times \vec{E} \neq 0$.

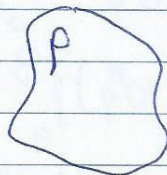
Για να ισχύει $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ θα πρέπει $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, αφού

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ εφ' όρισμού. Άρα ότι ρεύμα μπαίνει σε αυτήν των επιφανειών δεν έχει ροή σε κλειστή επιφάνεια. Δεν υπάρχουν, όπως, μόνο τέτοια ρεύματα, άρα αυτή η επιφάνεια πρέπει να αλλάξει.

Επιφάνεια συνέχειας - Διατήρηση φορτίου

"Δεν γίνεται φορτίο να χαθεί ή να γεννηθεί από το μηδέν"

Έστω κατανομή ρ :



Τότε $Q_V = \int_V \rho dv$

$\frac{dQ_V}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int_V \rho dv \right] = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$: > 0 εάν φορτίο αυξάνεται, < 0 εάν φορτίο μειώνεται.

Αφού θεωρήσαμε μεταβολή φορτίου, τότε θα πρέπει να έχει "φύγει" φορτίο από των επιφάνεια. Το φορτίο αυτό θα είναι:

$\oint_V \vec{J} \cdot \hat{n} ds$: > 0 εάν φορτίο φεύγει, < 0 εάν φορτίο έρχεται.

Με βάση τα προηγουμένα θα πρέπει:

$$\frac{dQ_v}{dt} = - \oint_{\partial v} \vec{j} \cdot \vec{n} ds = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

\downarrow \downarrow
 οριοδωμένα οριοδωμένα στο χώρο
 των επιφανείας του χώρου

Από θεωρήμα Gauss: $-\oint_{\partial v} \vec{j} \cdot \vec{n} ds = - \int_v (\nabla \cdot \vec{j}) dv$

Εάν η παραπάνω ισχύει $\forall v$, τότε θα πρέπει οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις να είναι ίσες:

$$-\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0} \rightarrow \text{εξίσωση συνέχειας ηλεκτρικού φορτίου}$$

Η εξίσωση αυτή μας δίνει πως η μεταβολή φορτίου σε βλεπούμε σαν ρεύμα. Είναι μια χρονική εξίσωση.

Η εξίσωση αυτή νοητές φορές διαχωρίζεται ως διατήρηση του συνολικού φορτίου στο σύστημα.

Έστω ποσό μάζας σφαίρα ακτίνας R:

$$\int_{S(R)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \right) dv = 0 \Rightarrow \int_{S(R)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \int_{S(R)} (\nabla \cdot \vec{j}) dv \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{S(R)} \rho dv \right) = - \oint_{\partial S(R)} \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot ds. \text{ Για } R \rightarrow \infty \text{ θα ισχύει}$$

$$\int_{S(R)} \rho dv = Q_{tot} \text{ (του συστήματος) και } \oint_{\partial S(R)} \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot ds = 0, \text{ διότι}$$

το σύστημα δεν έχει όριο, εφ' όρισμό. Έτσι:

$$\frac{dQ_{tot}}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{Q_{tot} = \text{const.}}$$

Γυρνώντας στα αρχικά, η αναίτιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ αδηφεί
 σε $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, λόγω της εξίσωσης συνέχειας, άρα αυτό
 συμβαίνει μόνο όταν έχουμε στατικό πεδίο ή όταν ένα
 φορτίο κινείται και ένα άλλο "παίρνει απευθείας τη θέση του".

Οδηγήσαμε, λοιπόν, στη διαρρύθμιση που είχαμε προηγου-
 μένως αναφέρει. Ξεκινάμε από την αρχική και τη διαρρύθμιση:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) \Rightarrow$$

\downarrow αρχική σχέση (δεν ισχύει πάντα) $= 0$ \downarrow βρήκαμε ότι πάντα = 0

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})) = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow$$

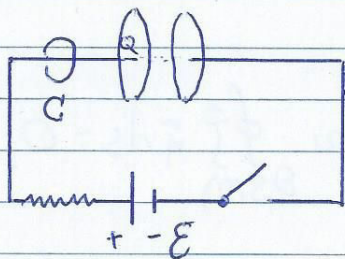
$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \rightarrow$$

Ο Maxwell όρισε $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (ρεύμα μετατόπισης)

Προκιντούν τελικά 4 εξισώσεις (εξισώσεις Maxwell):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$$

Πρόβλημα: Φόρτιση - Εξφόρτιση Πυκνωτή



Ο πυκνωτής φορτίζεται πλήρως όταν στα άκρα του υπάρχει τάση ίση με ϵ (αρχικά η διαφορά δυναμικού είναι μηδέν, γ' αυτό ο πυκνωτής φορτίζεται).

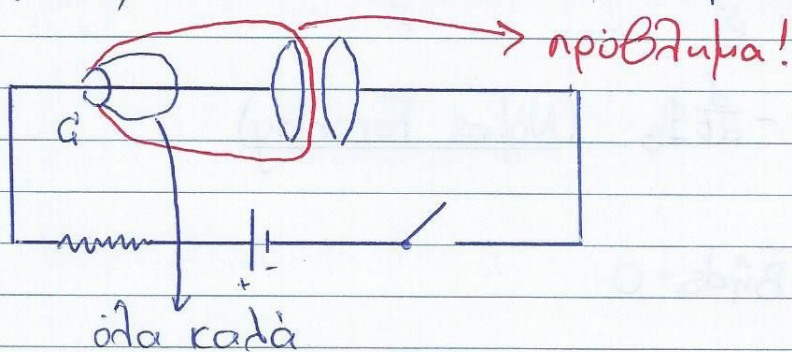
Έχουμε βρει: $Q(t) = C \cdot \epsilon (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

Διαφορά δυναμικού οπλισμών: $V(t) = \epsilon (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

Πείρα που διαφέρει το κύκλωμα: $I(t) = \frac{Q}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$

Ο Νόμος του Ampere μας έλεγε: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_s$ με $Q = \partial S$

Για αμπεριανό βρόχο C όπως του παραπάνω σχήματος, εάν η επιφάνεια είναι εκτός του κυκλώτη παίρνουμε $\mu_0 \cdot I_s$, ενώ εάν η επιφάνεια έχει άνοιγμα το C και περιλαμβάνει τον κυκλώτη παίρνουμε 0.



Χρησιμοποιούμε την προσέγγιση των άπειρων κυκλωτών. Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον κυκλώτη είναι:

$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 A} \hat{y}$. Η ηλεκτρική ροή θα είναι (για οποιαδήποτε επιφάνεια μέσα στον κυκλώτη):

$$\Phi_E = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 A} \cdot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_E = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}. \text{ Άρα } \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot I(t)$$

Εάν ορίσουμε στον κυκλώτη ένα ρεύμα μετατόνισης:

$I_D = \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt}$ (όσο είναι πραγματικό ρεύμα λόγω κίνησης φορτίων, οφείλεται στη μεταβολή της ροής), τότε

Γράφουμε στον Νόμο Ampere: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_s + I_D)$ και

το πρόβλημα λύνεται.

Αυτό ήταν το κεντρικό που ανακάλυψε ο Maxwell για τη μεταβολή της τέταρτης εξίσωσης.

Οι εξισώσεις Maxwell ισοδυναμούν με τρεις διαφορικές νόμους:

$$\textcircled{1} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv \Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q_V$$

(Νόμος Ηλεκτρικής Ροής)

$$\textcircled{2} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \hat{n} ds = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} ds \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_B \quad (\text{Νόμος Faraday})$$

$$\textcircled{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} ds = 0$$

$$\textcircled{4} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_p), \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\int_S \vec{j} \cdot \hat{n} ds + \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} ds \right)$$

Για $\rho=0$ και $\vec{j}=\vec{0}$ οι εξισώσεις δίνουν:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Αν και θα περίμενε κανείς να προκύπτει $E=0$ και $B=0$, όχι μόνο δεν προκύπτει αυτό αλλά μάλλον τα δύο πεδία εμπεριέχονται. Γενικότερα, έτσι, ο ηλεκτρομαγνητισμός.

Ένα φορτίο q μπορεί να δέχεται δύναμη και από ηλεκτρικό και από μαγνητικό πεδίο:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}, \quad \vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}, \quad \text{άρα το ηλεκτρικό και το}$$

μαγνητικό πεδίο έχουν μονάδες που, σε όλα τα

συστήματα μετρικής, διαφέρουν κατά "μία ταχύτητα".

Αυτό μας αδηφεί ότι συμπέρασμα πως το $\mu_0 \epsilon_0$ πρέπει να έχει μονάδες $1/c^2$.

Προκίπτει μάλιστα πως αυτή δεν είναι οποιαδήποτε ταχύτητα, αλλά:

$$\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$$

14/12/2015

ΔΙΑΛΕΞΗ #27

(Γ. Διαφορικός)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Από την εξίσωση $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ παίρνουμε $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ και προκύπτει:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi$$

Έχουμε λοιπόν: $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ και $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Εάν στεί για \vec{A} θέσουμε $\vec{A} + \vec{\nabla} \chi$, τότε:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Αν λοιπόν προσέσω μια οποιαδήποτε βαθμωτή $\vec{\nabla} f$, τότε το μαγνητικό πεδίο δεν αλλάζει. Το ηλεκτρικό:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\nabla} f}{\partial t} = \\ &= -\vec{\nabla} \left(\phi + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

Διατήρηση της ενέργειας

$$W = W_e + W_m, \quad W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E}, \quad W_m = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \vec{B} \cdot \vec{B}$$

\hookrightarrow πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου
 \hookrightarrow πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{E} \left[\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (-\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Ισχύει από ιδιότητες διανυσμάτων πως:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \text{ και συνεπώς προκύπτει:}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{J} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} - \vec{E} \cdot \vec{J}, \text{ όπου}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Το \vec{P} ονομάζεται άρρηγμα Poynting.

Έχουμε, δηλαδή: $\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \vec{E} \cdot \vec{J} = 0$

Ακόμη και αν τα ρ, \vec{J} δεν υπάρχουν, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο υπάρχει και ενεργειακά ισχύει $\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$.

Θα αφηστούμε των τερμ των εξισώσεων Maxwell για να "σηκώσουμε" τα \vec{E}, \vec{B} .

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=0} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \rho - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}, \text{ άρα το ηλεκτρικό}$$

πεδίο ικανοποιείται από εξίσωση του μορφής της κυματικής

Όμοια προκύπτει: $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J}$

Και τα δύο πεδία, λοιπόν, ικανοποιούν κυματικές εξισώσεις, οι οποίες:

- i) είναι μη αμοιβαίως γενικά
- ii) είναι αμοιβαίως εὐν $\rho=0, \vec{j}=\vec{0}$

Αντίστροφα κύματα

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

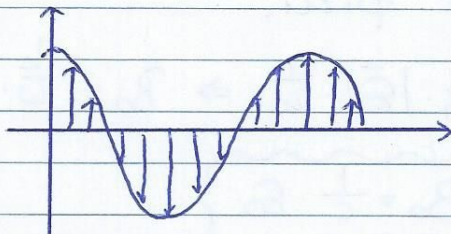
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0$$

$$\vec{k} = k\hat{y} : \text{κυματάνοση}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) =$$

$$= - (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \vec{E}, \quad \omega^2 = c^2 k^2$$



$$\text{Ισχύει } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k_x \cdot E_{0x} + k_y \cdot E_{0y} + k_z \cdot E_{0z}) \cdot \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = 0$$

Για να ικανοποιείται η 1^η εξίσωση του Maxwell θα

$$\text{απαιτείται } k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \text{ δηλαδή τα}$$

διανύσματα \vec{k} και \vec{E}_0 να είναι κάθετα.

$$\text{Από τη δεύτερη εξίσωση απαιτείται να ισχύει } \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{0x} \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) & E_{0y} \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) & E_{0z} \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i} (E_{0z} \cdot k_x - E_{0y} \cdot k_z) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) - \hat{j} \dots + \hat{k} \dots =$$

$$= \vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \text{ Άρα } \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

και βρίσκουμε $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, άρα:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Άρα τα \vec{B}, \vec{E} ταλαντώνονται στις δύο διαστάσεις και η διατάραξη διαδίδεται στην τρίτη.

$$\text{Ισχύει } \vec{B}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} \Rightarrow |\vec{B}_0| = k \cdot |\vec{E}_0| \cdot \frac{1}{\omega} \Rightarrow B_0 = \frac{k}{\omega} \cdot E_0$$

Όπως $k = \omega/c$, άρα τελικά: $B_0 = \frac{1}{c} \cdot E_0$

Προσοχή!! Τα παραπάνω ισχύουν όταν δεν έχουμε μηδέν, δηλαδή $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$.

$$\text{Σύνοψη: } \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \end{cases}, \quad \omega = kc, \quad \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \\ \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0$$

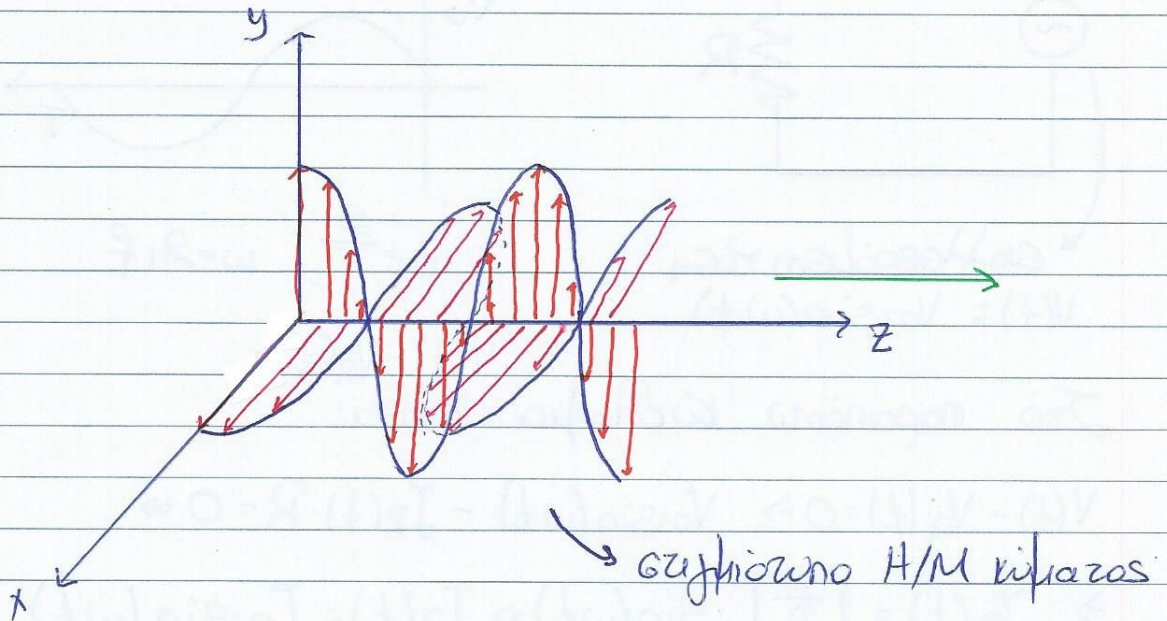
Τα $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ δηλώνουν ένα τριγωνομετρικό σύστημα αξόνων για το οποίο ισχύει:

$$\hat{y}_B = \hat{y}_k \times \hat{y}_E, \quad \hat{y}_E = \hat{y}_B \times \hat{y}_k, \quad \hat{y}_k = \hat{y}_E \times \hat{y}_B$$

Το διάνυσμα \vec{P} θα είναι:

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cdot \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{E}_0 \cdot B_0 \cdot \hat{y} \cdot \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$



16/12/2015

ΔΙΑΛΕΞΗ #28

(Γ. Αιγαίου)

Υπενθυμίζουμε τις εξισώσεις Maxwell:

$$(1): \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2): \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3): \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4): \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Ημιστατική Προσέγγιση

$$\vec{j} = 0, \rho(t) \quad \text{Λύνουμε των (1): } \vec{E}_p(t) = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{E}_p^{(0)}(t)$$

$$\text{Λύνουμε των (4): } \vec{B}_p(t) = \mu_0 \cdot \vec{B}_p^{(0)}(t)$$

$$\text{Παίρνουμε, βγαίνοντας: } \vec{E}_p(t) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\vec{E}_p^{(0)}(t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{v^2}{c^2} \vec{E}_p^{(1)}(t) \right],$$

για $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ (μη σχετικιστικό πρόβλημα)

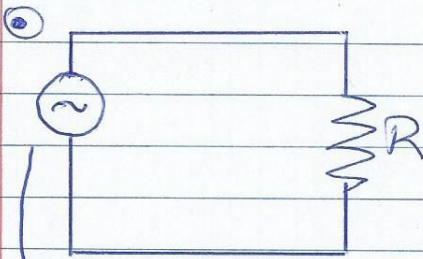
(Α) επαναληπτικές ασκήσεις που έχουν ήδη γίνει αναφερόμενοι.

18/12/2015

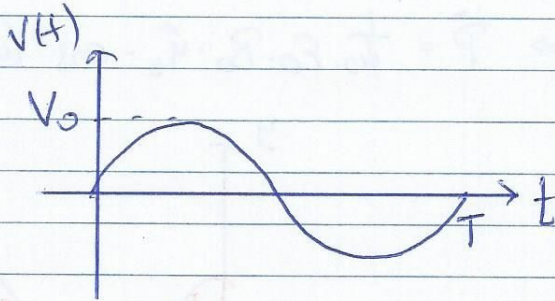
ΔΙΑΛΕΞΗ #29

(N. Σαουδιδου)

Κυκλώματα Εναλλασσόμενου Ρεύματος



Εναλλασσόμενου ρεύμα
 $V(t) = V_0 \cdot \sin(\omega t)$



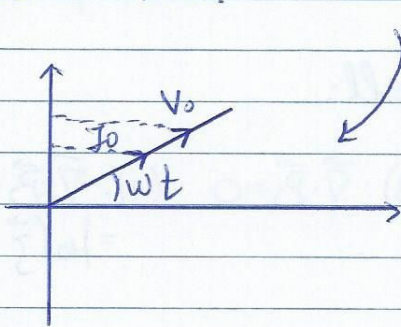
$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = 2\pi f$$

Σε οποιαδήποτε κύκλωμα έχουμε:

$$V(t) - V_R(t) = 0 \Rightarrow V_0 \cdot \sin(\omega t) - I_R(t) \cdot R = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_R(t) = \left[\frac{V_0}{R} \right] \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow I_R(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t), \text{ με}$$

$$I_0 = V_0 / R$$



Phasor Diagram

Τα δύο μεγέθη βρίσκονται σε συγχρονία φάσης δηλαδή παίρνουν τα μέγιστα ή των ελάχιστων τιμή τους ταυτόχρονα.

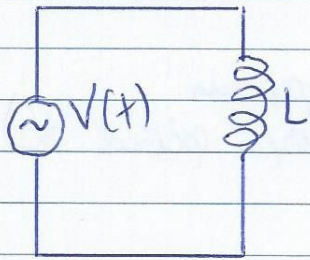
$$\text{Ισχύει } I_{RMS} = \sqrt{\langle I_R^2(t) \rangle}, \quad V_{RMS} = \sqrt{\langle V^2(t) \rangle}$$

$$\parallel \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\parallel \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Προκύπτει } \langle P_R(t) \rangle = \langle I_R^2(t) \cdot R \rangle = \frac{R \cdot I_0^2}{(\sqrt{2})^2} \Rightarrow \langle P_R(t) \rangle = R \cdot I_{RMS}^2$$

⊙



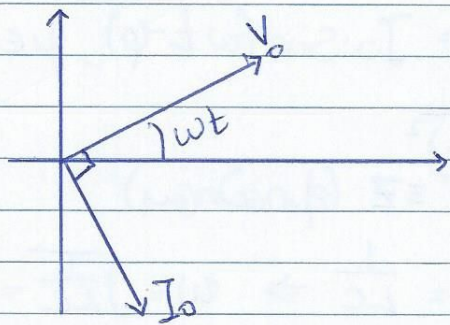
$$\Rightarrow V(t) - V_L(t) = 0 \Rightarrow$$
$$V_0 \cdot \sin(\omega t) - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{V_0}{L} \sin(\omega t) dt = I(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{\omega L} \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = \left[\frac{V_0}{X_L} \right] \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}), \quad \frac{V_0}{X_L} = I_0$$

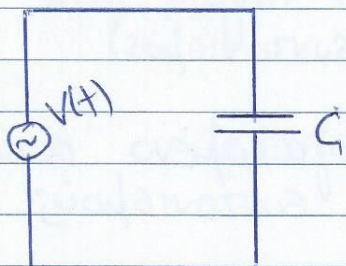
Το $X_L = \omega \cdot L$ έχει μονάδες αντίστασης και είναι η αντίσταση στο ρεύμα που εμφανίζεται λόγω του ηνίου, λόγω της αυτεπαγωγής του.

Παρατηρούμε πως εδώ, τα V, I βρίσκονται σε διαφορά φάσης $\Delta\phi = \pi/2$ rad, άρα τα δύο μεγέθη δεν λαμβάνουν ταυτόχρονα τα μέγιστα/ελάχιστα τους τιμή, αλλά όταν το ένα είναι μέγιστο, το άλλο είναι μηδέν.



Phasor Diagram

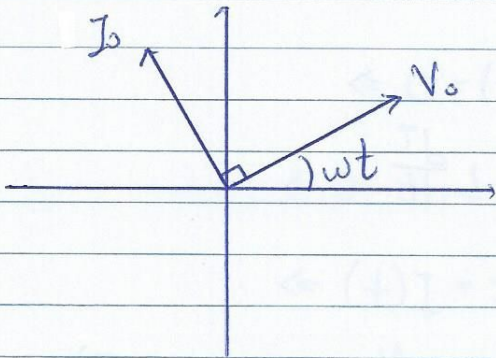
⊙



$$\Rightarrow V(t) - V_C = 0 \Rightarrow$$
$$V_0 \cdot \sin(\omega t) - \frac{q(t)}{C} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q(t) = V_0 \cdot C \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow$$

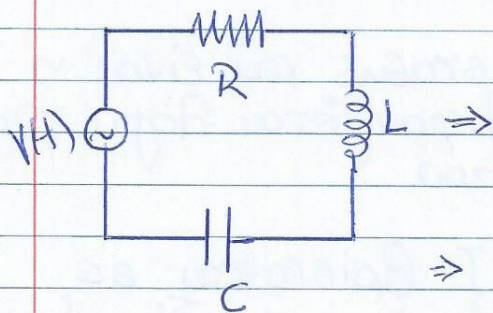
$$\Rightarrow I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = V_0 \cdot \omega \cdot C \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{X_C} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad \text{με } X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$



Phasor Diagram
(Ενώ, διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$)

⊙ Συντονισμός:



$$V(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0 \cdot \sin(\omega t) - I(t) \cdot R - \frac{Q(t)}{C} - \frac{dI(t)}{dt} \cdot L = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dQ(t)}{dt} R + \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} L + \frac{Q(t)}{C} = V_0 \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow \dots$$

$\Rightarrow Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi)$, με:

$$Q_0 = \frac{V_0}{\omega \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad \text{και} \quad \tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \rightarrow \frac{1}{\omega C}$$

Επιπλέον, $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$, με

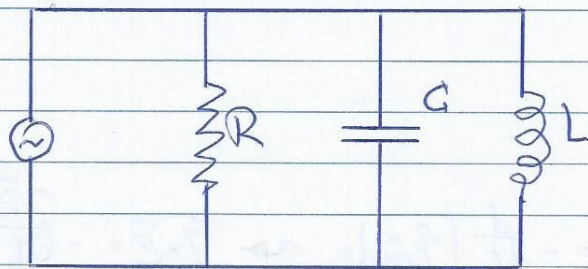
$$I_0 = -\omega \cdot Q_0, \quad |I_0| = \frac{\omega V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \equiv Z \text{ (επιπρόσθετα)}$$

Εάν $X_L = X_C \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0$

Εάν ω_0 είναι η συχνότητα του μητρώου τότε έχουμε το μέγιστο ρεύμα, διότι $X_L - X_C = 0$. (συntonισμός)

(\Rightarrow Να υπολογιστεί η μέση ισχύς στο συγκεκριμένο κύκλωμα)
Τι συμβαίνει στα περιπτώσεις του συntonισμού;

⊙ Παράλληλη σύνδεση RLC:



Ιχίους:

$$V_R = V_0 \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_R(t) = \frac{V_0}{R} \cdot \sin(\omega t) \quad (1)$$

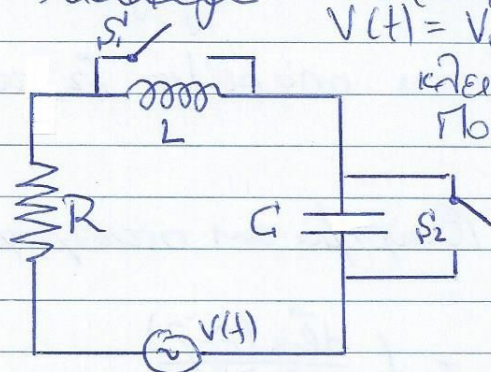
Όμοια, $V_C = V_0 \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow I_C(t) = \frac{V_0}{X_C} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (2)$

και $V_L = V_0 \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow I_L(t) = \frac{V_0}{X_L} \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (3)$

Άρα, $I(t) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t)$ (Ιχίους οι κανόνες Kirchhoff)

Εδώ, ισχύει $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C})^2}$ και $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

⇒ Εφαρμογή:



Θεωρούμε το παρακάτω κύκλωμα με $V(t) = V_0 \cdot \sin(\omega t)$. Οι S_1 και S_2 είναι αρχικά κλειστά. Θεωρήστε πρώτα τα R, L, V, ω . Ποιο είναι το πείρα αν θωπάρω τον χρόνο ποια η μέση ισχύς; Ανοίξουμε τον S_1 . Ποιο είναι το πείρα μετά από πολύ χρόνο. Ποιο είναι το C αν S_1 και S_2 φεί-

νουν ανοικτοί για μεγάλο χρονικό διάστημα και η τάση είναι σε φάση με το πείρα; Ποια η θηρόδνηση του κυκλώματος για ανοικτούς S_1 και S_2 ; Ποια η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στο πυκνωτή (εξο ηννιο); Αν διπλασιάσουμε το ω ποια η διαφορά φάσης ανάμεσα στο πείρα και την τάση; Ποια η συχνότητα εξου οποία ισχύει $X_L = X_C/2$;

21/12/2015

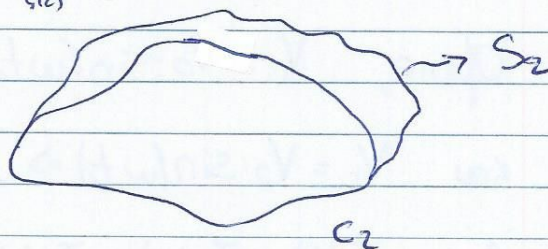
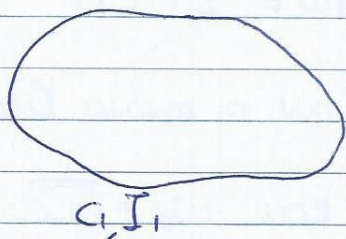
ΔΙΑΝΕΣΗ #30

(Γ. Διοφάντης)

Μαγνητική Ενέργεια

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \Phi_B$$

Ισχύει: $\int_{S(t)} (\nabla \times \vec{E}) \hat{n} ds = \oint_C \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \hat{n} \cdot \vec{B} ds \leadsto \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$



$$\Phi_{21} = I_1 \cdot L_{21}$$

↳ ανεξάρτητος απόβαιας ενέργειας

$$\Phi_{11} = I_1 \cdot L_1$$

↳ ανεξάρτητος αυτενέργειας

Εάν ο C_2 αρχίσει να διαρρέεται από ρεύμα I_2 , τότε θα ισχύει $\Phi_{12} = I_2 \cdot L_{12}$.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{12} &= I_2 \cdot L_{12} \\ \Phi_{21} &= I_1 \cdot L_{21} \end{aligned} \right\} \underline{L_{12} = L_{21}} \text{ (Θεώρημα της αλληλεπίδρασης)}$$

Απόδειξη: Νόμος Biot-Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_i \oint_C \frac{d\vec{\ell}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$

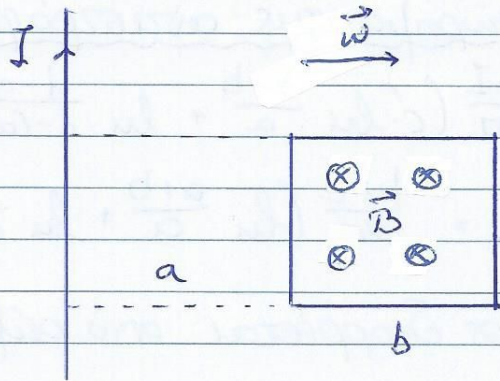
$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad , \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \hat{n} ds_2 = \int_{S_2} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n} ds_2 = \oint_{C_2} \vec{A}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{\ell}_2 =$$

$$= \oint_{C_2} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \iint_{C_2 C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Όμοια θα προέκυπτε: $\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \iint_{C_2} \iint_{C_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$, άρα αποδεικνύεται το θεώρημα της αντιστροφής.

⇒ Εφαρμογή:



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \hat{\phi}$$

$$\int_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot \hat{n} ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_S \frac{1}{\rho} d\rho dz =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{z_1=a}^{z_2=a+b} \int_{\rho=a}^{\rho=c} \frac{1}{\rho} d\rho dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot \hat{n} ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot c \cdot \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

↓
Ροή Φ_B

Εάν ο βρόχος έχει αντίσταση R και το πείμα κίνηση χρονική εφάρμοξη (I(t)), τότε:

$$I_{\text{Len}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi_B}{dt} = \text{πείμα εφ' επαγωγής, η φορά του οποίου καθορίζεται από τον κανόνα του Lenz.}$$

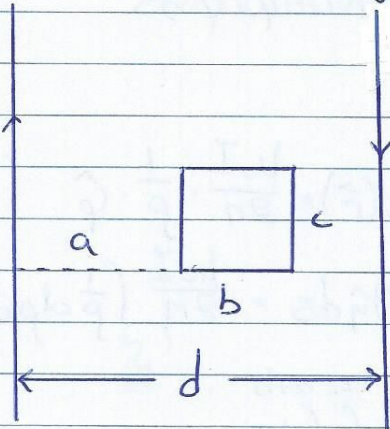
Ο κανόνας του Lenz μας δείχνει ότι ενώ η φορά είναι ευσταθής ως προς τις μεταβολές που προκαλούνται σε αυτήν.

Για σταθερό I τώρα, περιστρέφω το πλαίσιο με μια σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.

Εφόσον το πλαίσιο περιστρέφεται, το εμβαδόν του παραμένει σταθερό, αλλά έχει $\hat{n} = \cos(\omega t)\hat{j} + \sin(\omega t)\hat{k}$

θα έχουμε τότε, εναλλασσόμενο πείμα, με σταθερό μαγνητικό πεδίο.

⇒ Εφαρμογή: Έστω ένας πολύ μικρός βρόχος και ένας ορθογώνιος βρόχος:



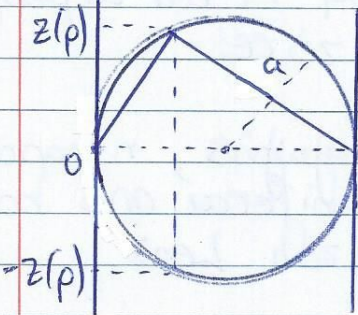
Θα θεωρήσουμε πως ο μεγάλος βρόχος διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και θα εφαρμόσουμε το θεώρημα της κυκλοφορίας

$$\Phi_{\square} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} c \cdot \left(\ln \frac{a+b}{a} + \ln \frac{d-a}{d-(a+b)} \right)$$

$$\text{Άρα } L_{\text{αβ}} = \frac{\mu_0 \cdot c}{2\pi} \left(\ln \frac{a+b}{a} + \ln \frac{d-a}{d-(a+b)} \right)$$

Τελώς, αν ο μικρός βρόχος διαρρέεται από ρεύμα I , τότε θα ισχύει $\Phi_{\text{II}} = I \cdot L_{\text{αβ}}$ (ίδια ποσ.)

⇒ Εφαρμογή:



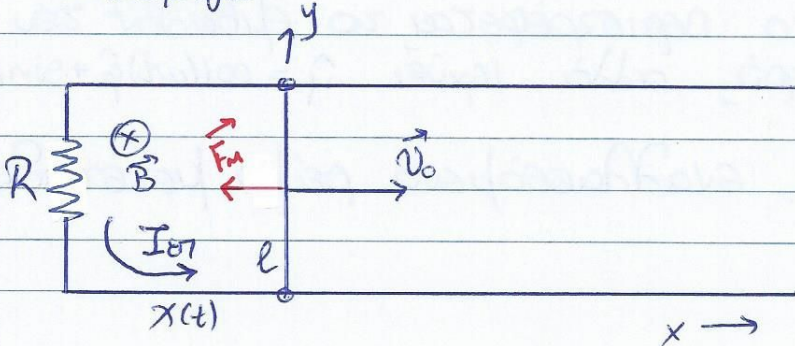
$$\int_0^a \frac{1}{\rho} ds = 2 \int_0^{2a} \frac{1}{\rho} d\rho dz = 4 \int_0^{2a} \frac{z(\rho)}{\rho} d\rho$$

και θα δειχούμε

κατ' αντιστοιχία...

$$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{u} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad , \quad \vec{F}_m = I \cdot \oint_C d\vec{l} \times \vec{B}$$

⇒ Εφαρμογή:



$$\Phi(t) = B \cdot l \cdot x(t)$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -B \cdot l \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -B \cdot l \cdot v$$

Η Παιή αυξανεται από από τον ραβδό του Lenz ηρέσει να ελκισσάται περὶ εἰς ἐναρμόνισ για να τὴν μειώσει.

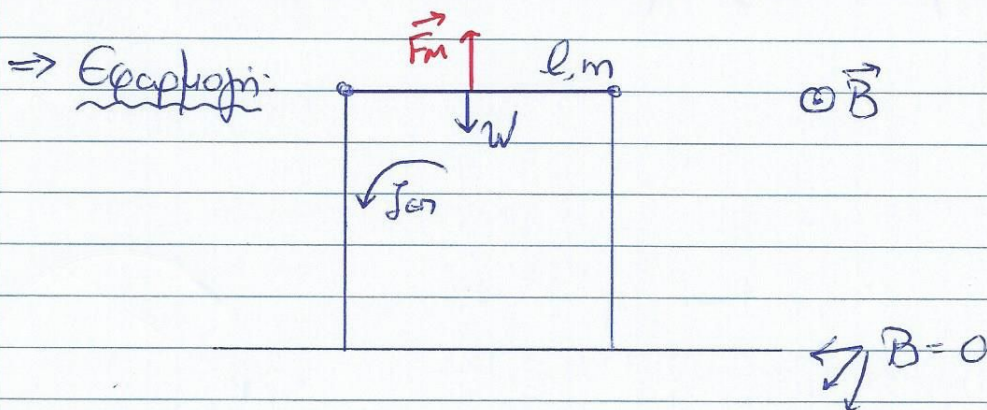
Ὁρα ἰσχύει $I_{\text{em}} = \frac{Blv}{R}$

$\vec{F}_m = I_{\text{em}} \int_{y_0}^{y_0+l} dy \cdot \hat{j} \times (-B\hat{i}) \Rightarrow \vec{F}_m = -l \cdot I_{\text{em}} \cdot B \cdot \hat{i}$

ἰσχύει $m \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2 v}{R} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{mR} v = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v(t) = c \cdot e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}$ $v(t_0) = c \cdot e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t_0} = v_0$

Ἄρα $v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} (t-t_0)}$



Ἄρα ὅτι μειώνεται συνεχῶς ἀπὸ τὴν ἐπιρροὴν τῆς βαρῆς, ὅρα ὅτι ελκισσάται I_{em} ὡστε να τὴν αυξήσει.

Τώρα, ἔχουμε: $m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2 l^2}{R} v \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{mR} v = g \Rightarrow v(t) = c \cdot e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} + \frac{mgR}{B^2 l^2}$

$v(t_0) = c \cdot e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} \cdot 0} + \frac{mgR}{B^2 l^2} = 0 \Rightarrow c = \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow v(t) = v_{\text{op}} (1 - e^{-\frac{gt}{v_{\text{op}}}})$, με $v_{\text{op}} = \frac{B^2 l^2}{mR}$