Ασκήσεις Διανυσματικού Λογισμού που λύθηκαν στο μάθημα

1. Δείξτε ότι $\vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\vec{r}}{r^3} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\hat{r}}{r^2} \right) = 0$.

2. Υπολογίστε την απόκλιση $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{r})$ αν για το διανυσματικό πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$ ισχύει $\vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \vec{0}$.

3. Δείξτε ότι $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, όπου $\vec{A}(\vec{r})$ τυχαίο διανυσματικό πεδίο.

4. Συντηρητικά διανυσματικά πεδία.

A. Αν $\vec{F}(\vec{r})$ είναι ένα *συντηρητικό* πεδίο, δείξτε ότι είναι *αστρόβιλο*: $\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \vec{0}$.

B. Αντίστροφα, αν το $\vec{F}(\vec{r})$ είναι *αστρόβιλο*, $\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \vec{0}$, δείξτε ότι είναι συντηρητικό.

5. Δείξτε ότι $\displaystyle\int_V \vec{\nabla} \times \vec{B} d\tau = \oint_S d\vec{S} \times \vec{B}$, όπου $\vec{B}(\vec{r})$ τυχαίο διανυσματικό πεδίο και η επιφάνεια S είναι το σύνορο του όγκου V.

6. Έστω S μια απλή κλειστή επιφάνεια και $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου (x, y, z) ως προς την αρχή O των συντεταγμένων. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{S}$ είναι **(a)** 0, αν η αρχή O βρίσκεται στο εξωτερικό της S, και **(b)** 4π, αν η αρχή O βρίσκεται στο εσωτερικό της S.

7. Δείξτε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $\displaystyle\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$ για κάθε κλειστό βρόχο C είναι η $\vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \vec{0}$, δηλαδή το πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$ να είναι *αστρόβιλο*.

Ασκήσεις Διανυσματικού Λογισμού που προτείνονται για λύση

1. Δείξτε ότι $\vec{\nabla} \cdot (U \vec{\nabla} V - V \vec{\nabla} U) = U \nabla^2 V - V \nabla^2 U$, όπου $U(\vec{r})$ και $V(\vec{r})$ τυχαία βαθμωτά πεδία.

2. Αν $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, δείξτε ότι $\vec{\omega} = \dfrac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v}$, όπου $\vec{\omega}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα.

3. Δείξτε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η παράσταση $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ *τέλειο διαφορικό* είναι η $\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \vec{0}$, δηλαδή το πεδίο $\vec{F}(\vec{r}) = F_x(\vec{r})\hat{i} + F_y(\vec{r})\hat{j} + F_z(\vec{r})\hat{k}$ να είναι *αστρόβιλο*.

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\oint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$, όπου S οποιαδήποτε απλή κλειστή επιφάνεια.

5. Δείξτε τη *2η ταυτότητα του Green*: $\displaystyle\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d\tau = \oint_S (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{S}$, όπου $\phi(\vec{r})$ και $\psi(\vec{r})$ τυχαία βαθμωτά πεδία και η επιφάνεια S είναι το σύνορο του όγκου V.

6. Δείξτε ότι $\displaystyle\int_V \vec{\nabla} \phi d\tau = \oint_S \phi d\vec{S}$, όπου $\phi(\vec{r})$ τυχαίο βαθμωτό πεδίο και η επιφάνεια S είναι το σύνορο του όγκου V.

7. Δείξτε ότι $\oint_C d\vec{r} \times \vec{B} = \int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B}$, όπου $\vec{B}(\vec{r})$ τυχαίο διανυσματικό πεδίο και ο βρόχος C είναι το σύνορο της επιφάνειας S. *<u>Υπόδειξη</u>*: Εφαρμόστε το θεώρημα Stokes στο ολοκλήρωμα $\oint_C d\vec{r} \cdot (\vec{B} \times \vec{A})$, όπου $\vec{A}$ ένα τυχαίο σταθερό διάνυσμα.