

Ασκήσεις στο ηλεκτρικό πεδίο

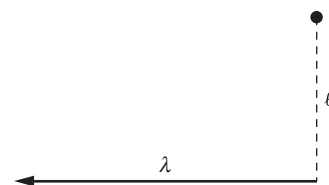
1. Ηλεκτρικό πεδίο από δύο φορτία.

Ένα φορτίο $2q$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και ένα φορτίο $-q$ βρίσκεται στη θέση $x = a > 0$ στον άξονα x .

- Βρείτε το σημείο στον άξονα x όπου το πεδίο είναι μηδέν.
- Θεωρήστε την ευθεία $x = a$ που περνά από το φορτίο $-q$. Εντοπίστε ένα σημείο πάνω σε αυτή την ευθεία όπου το πεδίο είναι παράλληλο στον άξονα x .

2. Δυναμική γραμμή σε γωνία 45° .

Μια ημιευθεία έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου λ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο σε απόσταση ℓ από την αρχή της ημιευθείας, τέτοιο ώστε η ευθεία που το ενώνει με την αρχή να είναι κάθετη στην ημιευθεία, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θα πρέπει να βρείτε ότι το πεδίο σε αυτό το σημείο σχηματίζει πάντα γωνία 45° με την ημιευθεία, ανεξάρτητα από την απόσταση ℓ .



3. Ηλεκτρικό πεδίο στο τέλος ενός κυλίνδρου.

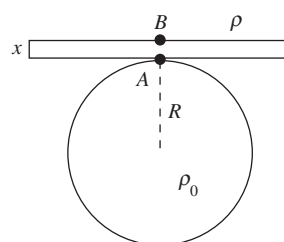
- Θεωρήστε ένα λεπτό κυλινδρικό φλοιό ακτίνας R και άπειρου μήκους στη μία κατεύθυνση, με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο της κυκλικής βάσης του κυλίνδρου, η οποία δεν φέρει φορτίο.
- Χρησιμοποιείστε το προηγούμενο το προηγούμενο αποτέλεσμα για να βρείτε το πεδίο στο ίδιο σημείο ενός *συμπαγούς* κυλίνδρου ακτίνας R και άπειρου μήκους στη μία κατεύθυνση, με ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ , ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί φτιαγμένος από μια απειρία κυλινδρικών φλοιών όπως αυτός της προηγούμενης ερώτησης.

4. Κυκλική οπή σε φορτισμένο επίπεδο.

- Μια κυκλική οπή ακτίνας R ανοίγεται σε επίπεδη επιφάνεια πολύ μεγάλης έκτασης που φέρει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma > 0$. Έστω L η ευθεία που τέμνει κάθετα την επιφάνεια, περνώντας από το κέντρο της οπής. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο της L σε απόσταση z από το κέντρο της οπής.
- Αν ένα φορτίο $-q < 0$ με μάζα m αφήνεται ελεύθερο από την ηρεμία πάνω στην L , πολύ κοντά στο κέντρο της οπής, δείξτε ότι εκτελεί αρμονική ταλάντωση και βρείτε την κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης.
- Αν ένα φορτίο $-q < 0$ με μάζα m αφήνεται ελεύθερο από την ηρεμία πάνω στην L , σε απόσταση z από το κέντρο της οπής, ποια είναι η ταχύτητά του όταν περάσει από το κέντρο της οπής; Πώς ανάγεται το αποτέλεσμα για μεγάλο z ή, ισοδύναμα, μικρό R ;

5. Φορτισμένο επίπεδο φύλλο επαπτόμενο σε φορτισμένη σφαίρα.

Θεωρήστε ένα μεγάλο οριζόντιο φύλλο πάχους x με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ , επαπτόμενο σε μια σφαίρα ακτίνας R με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ_0 , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω A το σημείο επαφής του φύλλου με τη σφαίρα και B το σημείο στην ίδια ευθεία από το κέντρο της σφαίρας στο A , αλλά από την άλλη πλευρά του φύλλου. Υποθέτοντας ότι $x \ll R$, δείξτε ότι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση της ευθείας AB (οφειλόμενο και στη σφαίρα και στο φύλλο) είναι μεγαλύτερο κατά

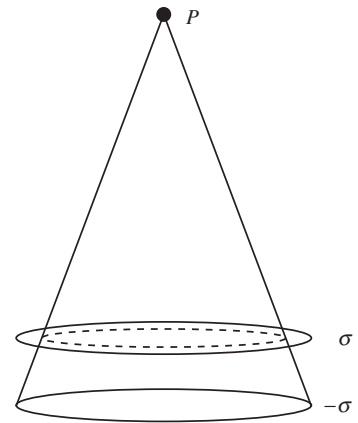


μέτρο στο σημείο B από ό,τι στο A αν $\rho > (2/3)\rho_0$.

6. Δίσκοι και δίπολα.

Δύο παράλληλοι λεπτοί δίσκοι με την ίδια ακτίνα R είναι τοποθετημένοι παράλληλα σε απόσταση ℓ μεταξύ τους και φέρουν ομογενείς επιφανειακές πυκνότητες φορτίου σ και $-\sigma$. Πόσο είναι το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον κοινό άξονα των δίσκων σε μεγάλη απόσταση r από το κέντρο τους; Λύστε το πρόβλημα με δύο τρόπους:

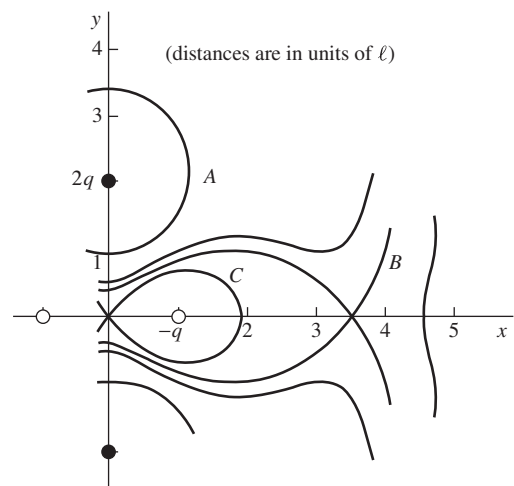
- Μεταχειριστείτε τους δίσκους σαν μια συλλογή πολύ μεγάλου αριθμού στοιχειωδών ηλεκτρικών δίπολων στοιχισμένων το ένα δίπλα στο άλλο.
- Εξηγήστε γιατί τα μέρη των δύο δίσκων που περιέχονται στον κώνο του σχήματος παράγουν πεδία που απαλείφονται μεταξύ τους στην κορυφή P του κώνου. Στη συνέχεια βρείτε το πεδίο από το κομμάτι του ενός δίσκου που δεν περιέχεται στον κώνο.



Ασκήσεις στην ηλεκτρική ενέργεια και το ηλεκτρικό δυναμικό

1. Ισοδυναμικές επιφάνειες γύρω από τέσσερα φορτία.

Δύο σημειακά φορτία με τιμή $2q$ το καθένα και άλλα δύο με τιμή $-q$ το καθένα εντοπίζονται συμμετρικά στο επίπεδο xy ως εξής: Τα δύο πρώτα φορτία βρίσκονται στις θέσεις $(0, 2\ell)$ και $(0, -2\ell)$ του άξονα y και τα δύο άλλα φορτία στις θέσεις $(\ell, 0)$ και $(-\ell, 0)$ του άξονα x , όπως δείχνει το σχήμα. Σε αυτό το σχήμα φαίνονται και οι τομές μερικών ισοδυναμικών επιφανειών με το επίπεδο xy . Αφού μελετήσετε και καταλάβετε καλά το σχήμα, βρείτε τις τιμές του δυναμικού στις επιφάνειες που συμβολίζονται με A , B και C , παίρνοντας όπως πάντα το δυναμικό μηδέν στο άπειρο. Η επιφάνεια A τέμνει τον άξονα y στο σημείο $y = \ell$. Δείξτε ότι η επιφάνεια B τέμνει τον άξονα x στο σημείο $x \simeq 3.44\ell$ και σχεδιάστε τις τομές μερικών επιφανειών με το επίπεδο xy ενδιάμεσα σε αυτές που δείχνει το σχήμα.



2. Υπολογισμός του δυναμικού με ολοκλήρωση.

- Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας R φέρει ομογενή χωρική πυκνότητα φορτίου ρ . Βρείτε το δυναμικό στο κέντρο της σφαίρας.
- Ένας λεπτός σφαιρικός φλοιός ακτίνας R φέρει ομογενή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Βρείτε το δυναμικό σε ένα σημείο στην επιφάνεια του φλοιού.
- Γράφοντας τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα συναρτήσει του συνολικού φορτίου Q , που υποτίθεται το ίδιο στις δύο περιπτώσεις, πώς αυτά τα αποτελέσματα συγκρίνονται μεταξύ τους;

3.Πεδίο και δυναμικό ενός φορτισμένου δακτυλίου.

- A. Θεωρήστε ένα δακτύλιο ακτίνας R που φέρει συνολικό φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο στην περιφέρειά του. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο P σε απόσταση x από το επίπεδο του δίσκου πάνω στον άξονα που περνά από το κέντρο του.
- B. Βρείτε το δυναμικό στο σημείο P .
- C. Δείξτε ότι $E = -dV/dx$ στο P .
- D. Αν ένα φορτίο $-q$ με μάζα m , αρχικά σε ηρεμία πάνω στον άξονα x μακριά από το δακτύλιο, αφηθεί ελεύθερο, με ποια ταχύτητα θα περάσει από το κέντρο του δακτυλίου; Υποθέστε ότι ο δακτύλιος κρατιέται σταθερός στη θέση του.

4.Ενέργεια συμπαγούς φορτισμένης σφαίρας.

Βρείτε την ενέργεια συμπαγούς σφαίρας ακτίνας R με ομογενή χωρική πυκνότητα φορτίου ρ .

Ασκήσεις στην ηλεκτρική χωρητικότητα

1.Κατανομή φορτίου σε αγωγό και σε πυκνωτή.

- A. Το πείραμα του Cavendish έδειξε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν παντού μέσα σε έναν κοίλο λεπτό σφαιρικό φλοιό με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου. Προβάλλοντας το φλοιό στο ισημερινό του επίπεδο που περιέχει ένα τυχαίο σημείο P , δείξτε ότι το πεδίο στο P έχει μόνο κάθετη συνιστώσα στο ισημερινό επίπεδο.
- B. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, βρείτε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ενός αγωγίου δίσκου ακτίνας R που φέρει συνολικό φορτίο Q . Σημειώστε ότι αυτή η επιφανειακή πυκνότητα *δεν είναι σταθερή* πάνω σε όλο το δίσκο.
- C. Θεωρήστε τώρα δύο αντίθετα φορτισμένους δίσκους (με ίσα κατά μέτρο φορτία και αντίθετο πρόσημο), ή γενικότερα δύο λεπτούς αγωγούς οποιουδήποτε άλλου επιπέδου σχήματος, τοποθετημένους παράλληλα ώστε να σχηματίζουν έναν πυκνωτή. Δείξτε ότι αν η απόσταση μεταξύ τους είναι πολύ μικρή τότε η επιφανειακή πυκνότητες φορτίου τους είναι σταθερές, με ίσα μέτρα και αντίθετα πρόσημα, παραλείποντας συνοριακά φαινόμενα.

2.Άνισα φορτία σε πυκνωτή.

Θεωρήστε έναν πυκνωτή παράλληλων πλακών με διαφορετικές ποσότητες φορτίου Q_1 και Q_2 στις δύο πλάκες του. Βρείτε τις τέσσερις ποσότητες φορτίου στις εσωτερικές και τις εξωτερικές πλευρές των πλακών.

3.Πυκνωτής τριών ομοαξονικών κυλινδρικών αγωγών.

Ένας πυκνωτής αποτελείται από τρεις λεπτούς ομοαξονικούς κυλινδρικούς φλοιούς με ακτίνες R , $2R$ και $3R$. Ο εσωτερικός και ο εξωτερικός φλοιός συνδέονται με σύρμα ώστε να βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό. Οι τρεις φλοιοί είναι αρχικά ουδέτεροι και στη συνέχεια μια μπαταρία μεταφέρει φορτίο από το μεσαίο φλοιό στους άλλους δύο.

- A. Αν η τελική πυκνότητα φορτίου ανά μονάδα μήκους (γραμμική πυκνότητα) του μεσαίου φλοιού είναι $-\lambda$, ποιες είναι οι γραμμικές πυκνότητες φορτίου των άλλων δύο φλοιών;
- B. Ποια είναι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του πυκνωτή;

Ασκήσεις στις εξισώσεις Maxwell

1. Οι εξισώσεις Maxwell με μαγνητικό φορτίο.

Γράψτε τις εξισώσεις Maxwell όπως θα ήταν αν είχαμε μαγνητικά φορτία και μαγνητικά ρεύματα, όπως έχουμε ηλεκτρικά φορτία και ρεύματα. Επινοήστε όποια νέα σύμβολα χρειάζεστε και ορίστε προσεκτικά τι αντιπροσωπεύουν. Προσέξτε ιδιαίτερα τα θετικά και αρνητικά πρόσημα.

2. Ρεύμα μετατόπισης από κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο.

Χρησιμοποιώντας το ρεύμα μετατόπισης, δείξτε ότι ένα ηλεκτρικό φορτίο q που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}(t)$ διαγράφοντας τροχιά με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)$, όπου t ο χρόνος, δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = \mu_0 q (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) / (4\pi r^3)$.

3. Φορτιζόμενος σφαιρικός φλοιός.

Ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης και σφαιρικά συμμετρικής χωρικής πυκνότητας ρέει ακτινικά προς το εσωτερικό ενός σφαιρικού φλοιού, αυξάνοντας το φορτίο του φλοιού με σταθερό ρυθμό dq/dt . Επαληθεύστε ότι η εξίσωση Ampère-Maxwell ικανοποιείται σε όλα τα σημεία έξω από το φλοιό.

Ασκήσεις στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

1. Σχέση διασποράς σε επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Βρείτε τη σχέση μεταξύ των ω και k έτσι ώστε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στον κενό χώρο που περιγράφεται από τις εκφράσεις

$$E_x = 0, E_y = E_0 \sin(kx + \omega t), E_z = 0 \quad \text{και} \quad B_x = 0, B_y = 0, B_z = -\frac{E_0}{c} \sin(kx + \omega t)$$

να ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell.

2. Επίπεδο κύμα με μεταβαλλόμενο πλάτος.

Δείξτε ότι τα πεδία

$$\mathbf{E} = \frac{\beta b}{\pi} E_0 \cos \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{y}} + E_0 \sin \frac{\pi y}{b} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{z}}$$

και

$$\mathbf{B} = \frac{\beta b}{\pi c^2} E_0 \cos \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{z}}$$

ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell σε διαφορική μορφή, χωρίς πηγές, στο διάστημα $0 \leq y \leq b$ για κάθε x, z, t .

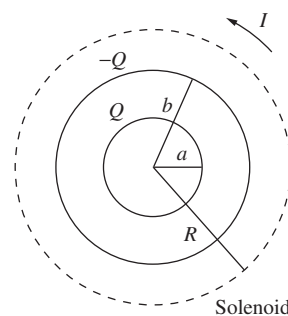
3. Μέση πυκνότητα ενέργειας και μέση ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας κύματος.

Δίνεται η ηλεκτρική συνιστώσα $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}}$ ηλεκτρομαγνητικού κύματος και οι σταθερές $E_0, \omega, \epsilon_0, \mu_0$.

- Βρείτε ποιες τιμές των σταθερών B_0 και β ικανοποιούν την έκφραση $\mathbf{B} = B_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{y}}$ της μαγνητικής συνιστώσας του κύματος.
- Δείξτε ότι οι χρονικές μέσες τιμές της πυκνότητας ηλεκτρικής ενέργειας $\langle w_e \rangle$ και της πυκνότητας μαγνητικής ενέργειας $\langle w_m \rangle$ είναι ίσες. Ποια είναι η στιγμιαία και η χρονική μέση τιμή της ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας του κύματος;

4. Παράδοξο στροφορμής.

Μια διάταξη αποτελείται από τρεις πολύ μακριές ομοαξονικές κυλινδρικές επιφάνειες: ένα μονωτικό κυλινδρικό φλοιό ακτίνας a με ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο $+Q$, έναν άλλο μονωτικό κυλινδρικό φλοιό ακτίνας $b > a$ με ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο $-Q$ και ένα σωληνοειδές πηνίο ακτίνας $R > b$ που διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I , όπως φαίνεται στο σχήμα. Το πηνίο κρατιέται σταθερό, ενώ οι δύο φορτισμένοι κύλινδροι είναι ελεύθεροι να περιστρέφονται ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο και αρχικά ηρεμούν. Το ρεύμα δημιουργεί ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο B_0 στο εσωτερικό του πηνίου και σε κάποιο χρόνο μηδενίζεται, σβήνοντας το μαγνητικό πεδίο. Η αλλαγή του μαγνητικού πεδίου συνεπάγεται τη δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου στις θέσεις των δύο κυλίνδρων.



- A. Βρείτε τη στροφορμή που αποκτά κάθε φορτισμένος κύλινδρος όταν το μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται.
- B. Πρέπει να βρείτε ότι η συνολική αλλαγή της στροφορμής των κυλίνδρων δεν είναι μηδέν. Επαληθεύστε ότι η στροφορμή όλης της διάταξης διατηρείται. Υποθέστε ότι οι δύο κύλινδροι είναι αρκετά βαρείς ώστε να μην περιστρέφονται πολύ γρήγορα, που σημαίνει ότι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από την περιστροφή τους μπορεί κατά προσέγγιση να παραλειφθεί.