Ασκήσεις στο νόμο του Coulomb

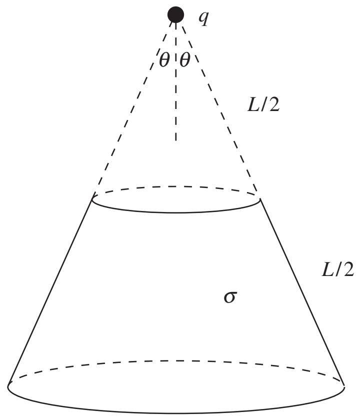
1.Μηδενική δύναμη από τρίγωνο.

Δύο θετικά ιόντα και ένα αρνητικό ιόν είναι σταθερά πάνω στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου. Σε ποιο σημείο του άξονα συμμετρίας της διάταξης πρέπει να τοποθετηθεί ένα τέταρτο ιόν ώστε η δύναμη πάνω σε αυτό να είναι μηδέν; Υπάρχουν περισσότερα από ένα τέτοια σημεία; Θα χρειαστεί η αριθμητική επίλυση μιας εξίσωσης.

2.Δύναμη από φορτισμένο κώνο.

Α. Ένα φορτίο q βρίσκεται στην κορυφή κορυφή ενός κώνου, άδειου στο εσωτερικό του, με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Το κεκλιμένο ύψος του κώνου είναι L και το γωνιακό ημι-άνοιγμά του είναι θ. Τι μπορείτε να πείτε για τη δύναμη που ασκεί ο κώνος στο φορτίο q;

Β. Αν απομακρυνθεί το μισό του κώνου που ακουμπά στην κορυφή του, όπως φαίνεται στο σχήμα, ποια δύναμη ασκεί το άλλο μισό του κώνου στο φορτίο q; Για ποια γωνία θ γίνεται η δύναμη αυτή μέγιστη;

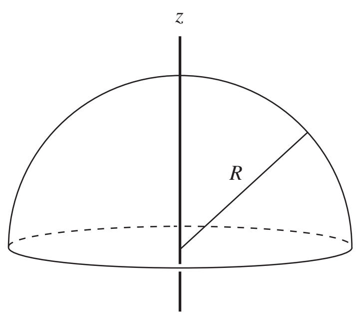


Ασκήσεις στο ηλεκτρικό πεδίο

1.Ηλεκτρικό πεδίο από φορτισμένο ημισφαιρικό φλοιό.

Ένας λεπτός ημισφαιρικός φλοιός ακτίνας R φέρει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ, όπως δείχνει το σχήμα. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο z του άξονα συμμετρίας για οποιαδήποτε τιμή $-\infty < z < \infty$. Θα χρειαστεί ο τύπος ολοκλήρωσης:

$$\int \frac{\sin x(a\cos x - b)dx}{(a^2+b^2-2ab\cos x)^{3/2}} = \frac{b\cos x - a}{b^2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos x}}.$$



2.Ηλεκτρικό πεδίο από φορτισμένο σφαιρικό φλοιό, σωστό και λάθος.

Το ηλεκτρικό πεδίο σε απειροελάχιστη απόσταση έξω από έναν ομοιόμορφα φορτισμένο λεπτό σφαιρικό φλοιό με ακτίνα R και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ είναι σ/ε_0. Προσπαθήστε να φτάσετε σε αυτό το αποτέλεσμα ως εξής:

Α. Διαιρέστε το φλοιό σε απειροστά λεπτούς δακτυλίους, με κέντρα πάνω στον άξονα που συνδέει το σημείο εκτός του φλοιού και το κέντρο του φλοιού, και ολοκληρώστε τις συνεισφορές από όλους τους δακτυλίους στο πεδίο. Θα πρέπει να βρείτε το λάθος αποτέλεσμα $\sigma/(2\varepsilon_0)$.

Β. Γιατί είναι λάθος αυτό το αποτέλεσμα; Προσέξτε ότι θα μπορούσατε να κάνετε ακριβώς το ίδιο ολοκλήρωμα της ερώτησης **Α** για να βρείτε το πεδίο σε απειροελάχιστη απόσταση *μέσα* από το φλοιό, όπου ξέρουμε από το πείραμα του Cavendish ότι το πεδίο μηδενίζεται. Άρα, γνωρίζετε εξαρχής ότι το ολοκλήρωμα αυτό δεν μπορεί από μόνο του να δώσει τη σωστή απάντηση, είτε μέσα είτε έξω από το φλοιό. Εξηγήστε ποια διόρθωση χρειάζεται για να πάρετε το σωστό αποτέλεσμα σ/ε_0 έξω από το φλοιό.

Ασκήσεις στο νόμο του Gauss

1.Ηλεκτρικό πεδίο σε επιφάνειες διαφορετικού σχήματος.

Θεωρήστε το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια (α) μιας σφαίρας με ακτίνα R, (β) ενός κυλίνδρου με άπειρο μήκος και ακτίνα R και (γ) μιας πλάκας πάχους $2R$ της οποίας οι άλλες δύο διαστάσεις είναι άπειρες. Όλα αυτά τα αντικείμενα έχουν την ίδια χωρική πυκνότητα φορτίου ρ. Συγκρίνετε το πεδίο στις τρεις περιπτώσεις και εξηγήστε γιατί τα μεγέθη της έντασής του κατατάσσονται με τη σειρά που θα βρείτε.

2.Ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο σε κοιλότητα με φορτισμένο τοίχωμα.

Μια συμπαγής σφαίρα έχει ακτίνα R_1 και ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ. Ανοίγουμε μια σφαιρική κοιλότητα ακτίνας R_2 με κέντρο ένα τυχαίο σημείο στο εσωτερικό της αρχικής σφαίρας, έτσι ώστε η κοιλότητα να βρίσκεται ολόκληρη στο εσωτερικό της αρχικής σφαίρας. Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στην κοιλότητα είναι ομογενές (δηλαδή έχει σταθερό μέτρο *και* σταθερή κατεύθυνση). Ποια είναι τα ανάλογα συμπεράσματα για σχήματα χαμηλότερης διάστασης, όπως ο κύλινδρος και η επίπεδη πλάκα;

Ασκήσεις στην ηλεκτρική ενέργεια και το ηλεκτρικό δυναμικό

1.Δυναμική ενέργεια κυλίνδρου.

Ένας κυλινδρικός όγκος ακτίνας a γεμίζει με φορτίο ομογενούς πυκνότητας ρ. Βρείτε τη δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μήκους του κυλίνδρου. Θα βρείτε ότι η ενέργεια ανά μονάδα μήκους είναι άπειρη όταν τα φορτία έρχονται στον κύλινδρο από το άπειρο, γι΄ αυτό υποθέσατε ότι αρχικά είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε μια κυλινδρική επιφάνεια πολύ μεγάλης ακτίνας R.

2.Σφαιρικός φλοιός.

Α. Ένας σφαιρικός φλοιός με φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο σε όλο τον όγκο του έχει εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική ακτίνα R_2. Υπολογίστε και σχεδιάστε προσεγγιστικά το ηλεκτρικό πεδίο σαν συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο του φλοιού, για $0 \leq r < \infty$.

Β. Βρείτε το δυναμικό στο κέντρο του φλοιού συναρτήσει του $R = R_1$, υποθέτοντας $R_2 = 2R_1$.

3.Δυναμικές γραμμές κοντά στην αρχή των αξόνων.

Α. Δύο ίσα θετικά φορτία q βρίσκονται στα σημεία $(\pm a, 0, 0)$. Γράψτε το δυναμικό $V(x, y)$ στο επίπεδο xy και στη συνέχεια εφαρμόστε το ανάπτυγμα Taylor $1/\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 - \epsilon/2 + 3\epsilon^2/8$, $\epsilon \ll 1$, κρατώντας μέχρι και τους τετραγωνικούς όρους ως προς x και ως προς y, για να βρείτε μια προσεγγιστική έκφραση του δυναμικού κοντά στην αρχή $(0,0,0)$. Σχεδιάστε τις ισοδυναμικές γραμμές στο επίπεδο xy κοντά στην αρχή των αξόνων και περιγράψτε πώς θα είναι οι ισοδυναμικές επιφάνειες κοντά στην αρχή των αξόνων στις τρεις διαστάσεις.

Β. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο κοντά στην αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια βρείτε τις εξισώσεις των δυναμικών γραμμών του πεδίου κοντά στην αρχή των αξόνων, απαιτώντας η κλίση dy/dx μιας γραμμής σε δεδομένο σημείο να ισούται με το λόγο E_y/E_x των συνιστωσών του πεδίου σε αυτό το σημείο. Σχεδιάστε τις δυναμικές γραμμές του πεδίου στο επίπεδο xy κοντά στην αρχή των αξόνων και περιγράψτε πώς θα είναι οι δυναμικές γραμμές κοντά στην αρχή των αξόνων στο επίπεδο xz.

4.Ισοδυναμικές επιφάνειες γύρω από φορτισμένο δακτύλιο.

Α. Ένας λεπτός δακτύλιος ακτίνας R φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q και βρίσκεται στο επίπεδο xy με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλα τα σημεία του άξονα z. Για ποια τιμή του z είναι το πεδίο μέγιστο;

Β. Σχεδιάστε προσεγγιστικά τις ισοδυναμικές γραμμές στο επίπεδο xz και εξηγήστε τη μετάβαση από περιοχές πολύ κοντά στο δακτύλιο σε περιοχές πολύ μακριά από αυτόν.

Ασκήσεις στην ηλεκτρική χωρητικότητα

1.Πυκνωτής τεσσάρων παράλληλων πλακών.

Θεωρήστε έναν πυκνωτή φτιαγμένο από τέσσερις παράλληλες πλάκες με μεγάλη επιφάνεια εμβαδού A και σε ίσες αποστάσεις μήκους s μεταξύ τους. Η πρώτη και η τρίτη πλάκα συνδέονται με σύρμα, όπως συνδέονται και η δεύτερη με την τέταρτη πλάκα. Βρείτε τη χωρητικότητα του συστήματος.

Ασκήσεις στις εξισώσεις Maxwell

1.Δυαδική ιδιότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Να δειχτεί ότι για πεδία εντεινόμενα στον ελεύθερο πηγών κενό χώρο ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$) οι εξισώσεις Maxwell παραμένουν αναλλοίωτες κατά την εφαρμογή του μετασχηματισμού

$$\mathbf{E}' = \cos\theta\,\mathbf{E} + c\sin\theta\,\mathbf{B} \qquad \mathbf{B}' = -\frac{\sin\theta}{c}\mathbf{E} + \cos\theta\,\mathbf{B},$$

όπου θ μια αυθαίρετη σταθερή και $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$ η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό. Παρατηρείστε τη δυνατότητα εναλλαγής των πεδίων για $\theta = \pi/2$, η οποία είναι γνωστή ως δυαδική ιδιότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

2.Δυναμικό μαγνητικού πεδίου.

Η μαγνητική επαγωγή ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνεται από τη σχέση $\mathbf{B} = B_0 t\hat{\mathbf{z}}$, όπου B_0 μια σταθερή. Θεωρώντας συμμετρία γύρω από τον άξονα z, να βρεθεί το μαγνητικό δυναμικό $\mathbf{A}$ και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$, αν δίνεται ότι το ηλεκτρικό δυναμικό είναι $V = 0$.

3.Ο νόμος του Faraday σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

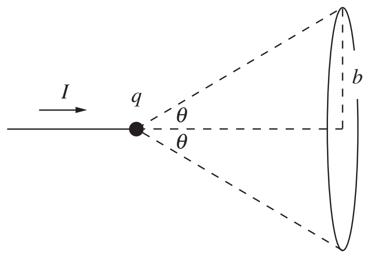
Το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}$, κάθετο στο επίπεδο ενός κυκλικού ρευματοφόρου βρόχου ακτίνας R, δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{1+\alpha\rho}\cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}},$$

όπου B_0, α, ω σταθερές και ρ η ακτινική απόσταση σε κυλινδρικές συντεταγμένες με άξονα z τον άξονα του κυκλικού βρόχου και επίπεδο xy το επίπεδο του βρόχου ($z = 0$). Με τη βοήθεια της ολοκληρωτικής διατύπωσης του νόμου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, να βρεθεί το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ σε ακτινική απόσταση $\rho \leq R$ στο επίπεδο του βρόχου.

4.Φορτίο από ημι-άπειρο ρευματοφόρο σύρμα.

Ένα ευθύγραμμο σύρμα μεγάλου μήκους φέρνει ρεύμα I στην αρχή των αξόνων, όπου αναπτύσσει αυξανόμενο σημειακό φορτίο q, έτσι ώστε $dq/dt = I$. Θεωρήστε τον κύκλο C ακτίνας b του σχήματος, ο οποίος φαίνεται υπό γωνία 2θ από το φορτίο.



A. Υπολογίστε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου από το φορτίο q, η οποία περνά μέσα από ένα σφαιρικό θόλο με κέντρο το φορτίο και σύνορο τον κύκλο C. Εξηγήστε γιατί η επιλογή της επιφάνειας ροής, με την προϋπόθεση ότι δεν τέμνει το σύρμα, δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα (π.χ. θα μπορούσε να είναι ο δίσκος με σύνορο τον κύκλο C).

B. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, υπολογίστε την κυκλοφορία του μαγνητικού πεδίου πάνω στον κύκλο C από το νόμο Ampère-Maxwell,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \int_{S(C)} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a},$$

όπου η επιφάνεια S είναι ο σφαιρικός θόλος του ερωτήματος Α με σύνορο τον κύκλο C.

5.Ταλαντούμενο πεδίο σε σωληνοειδές πηνίο.

Σωληνοειδές πηνίο ακτίνας R με n στροφές ανά μονάδα μήκους διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I(t) = I_0 \cos \omega t$ δημιουργώντας ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο $B = \mu_0 n I(t)$ στο εσωτερικό του πηνίου.

A. Υποθέτοντας ότι το μαγνητικό πεδίο είναι $B = \mu_0 n I_0 \cos \omega t$, βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο $E(r, t)$ σε ακτίνα r μέσα στο πηνίο ($0 \leq r \leq R$).

B. Το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί ένα πρόσθετο χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Βρείτε τη διαφορά $\Delta B(r, t)$ του συνολικού μαγνητικού πεδίου $B(r, t)$ σε ακτίνα r από το συνολικό μαγνητικό πεδίο $B_0(t) = B(r = 0, t)$ στον άξονα ($r = 0$) του πηνίου.

C. Το συνολικό μαγνητικό πεδίο δεν ισούται με $\mu_0 n I_0 \cos \omega t$ σε όλο το εσωτερικό του σωληνοειδούς, εξαιτίας της διαφοράς $\Delta B(r, t)$. Υπολογίστε το κλάσμα $\Delta B(r, t)/B_0(t)$ και εξηγήστε γιατί η αρχική προσέγγιση $B = \mu_0 n I_0 \cos \omega t$ είναι πρακτικά ακριβής όταν η χρονική κλίμακα των μεταβολών του ρεύματος είναι πολύ μεγαλύτερη από το χρόνο που χρειάζεται το φως για να διασχίσει την ακτίνα του πηνίου.

Ασκήσεις στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

1.Οδεύοντα και στάσιμα επίπεδα κύματα.

Η επαλληλία (συμβολή) $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ των ηλεκτρικών πεδίων δύο επίπεδων κυμάτων που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις,

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}} E_0 \cos(kz - \omega t) \qquad \text{και} \qquad \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}} E_0 \cos(kz + \omega t),$$

δημιουργεί ένα στάσιμο επίπεδο κύμα με ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}(2E_0)\cos kz \cos \omega t$, που χαρακτηρίζεται από σημεία $z_n = (2n+1)\pi/(2k)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ στον άξονα διάδοσης στα οποία μηδενίζεται σε όλους τους χρόνους και από χρόνους $t_n = (2n+1)\pi/(2\omega)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ στους οποίους μηδενίζεται σε όλα τα σημεία του άξονα διάδοσης. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο που συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο σε αυτό το στάσιμο κύμα με δύο τρόπους:

Α. Υπολογίζοντας τα μαγνητικά πεδία που συνδέονται με καθένα από τα δύο οδεύοντα ηλεκτρικά πεδία και προσθέτοντάς τα.

Β. Εφαρμόζοντας το νόμο του Faraday για να βρείτε το μαγνητικό πεδίο που συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο του στάσιμου κύματος.

Προφανώς, τα δύο αποτελέσματα πρέπει να είναι τα ίδια.

2.Πεδίο σε κουτί τετραγωνικής διατομής.

Δείξτε ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που περιγράφεται από τις εκφράσεις

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}}E_0 \cos(kx)\cos(ky)\cos(\omega t) \qquad \text{και} \qquad \mathbf{B} = B_0\left[\hat{\mathbf{x}}\cos(kx)\sin(ky) - \hat{\mathbf{y}}\sin(kx)\cos(ky)\right]\sin(\omega t)$$

ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell στον κενό χώρο όταν $E_0 = \sqrt{2}cB_0$ και $\omega = \sqrt{2}ck$. Αυτό το πεδίο μπορεί να αναπτυχθεί σε μεταλλικό κουτί με τετραγωνική διατομή που ορίζεται από τις σχέσεις $-\pi/(2k) < x < \pi/(2k)$ και $-\pi/(2k) < x < \pi/(2k)$. Δώστε μια ποιοτική περιγραφή της κατανομής του μαγνητικού πεδίου.

3.Ροή ενέργειας σε φορτιζόμενο πυκνωτή παράλληλων κυκλικών πλακών.

Ένας πυκνωτής παράλληλων κυκλικών πλακών ακτίνας R φορτίζεται από ρεύμα σταθερής έντασης I. Το ηλεκτρικό πεδίο E ανάμεσα στις πλάκες αυξάνεται, επομένως αυξάνεται και η πυκνότητα ενέργειας. Αυτό σημαίνει προς πρέπει να υπάρχει κάποια ροή ενέργειας προς τον πυκνωτή. Υπολογίστε το διάνυσμα Poynting σε ακτίνα r από τον άξονα του πυκνωτή (συναρτήσει του r και του E) και επαληθεύστε ότι η ροή του ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας που αποθηκεύεται στον κυλινδρικό όγκο ακτίνας r στο εσωτερικό του πυκνωτή.