ΦΥΣΙΚΗ III

ΣΤΑΤΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

2021 — 2022

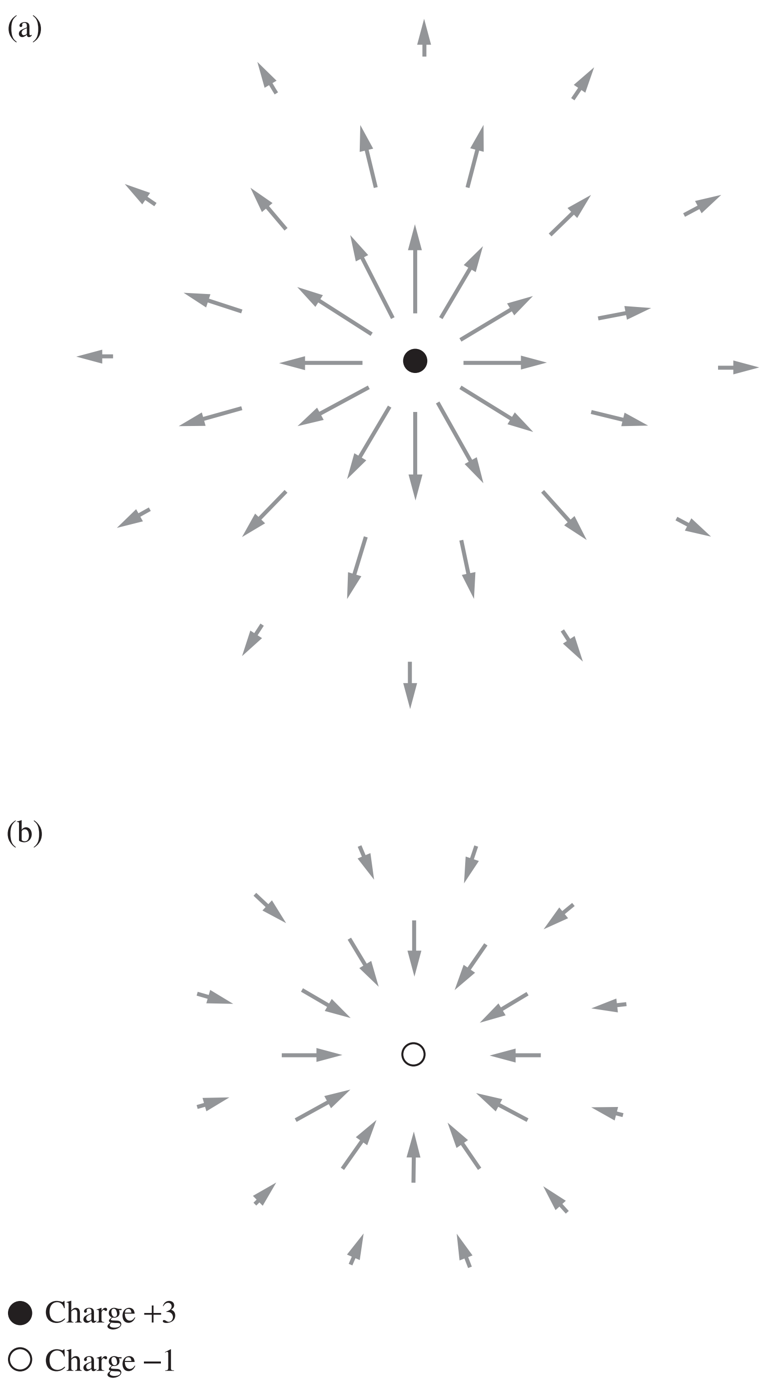
Το ηλεκτρικό πεδίο

$\mathbf{E} \equiv \mathbf{F}/q$

$\mathbf{E}$ = ένταση πεδίου παραγόμενου από φορτία-“πηγές”.

q = “δοκιμαστικό” φορτίο σε κάποιο σημείο κοντά στις πηγές.

$\mathbf{F}$ = δύναμη στο q από τα φορτία-πηγές.



Μονάδα στο SI: N/C = V/m.

Προϋπόθεση: όλα τα φορτία είναι ακίνητα στο κενό.

- ➡ Δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο.
- ➡ Το δοκιμαστικό φορτίο δεν επιφέρει αναδιάταξη των πηγών (εξασφαλίζεται όταν $q \to 0$).
- ➡ Η δύναμη εξαρτάται μόνο από τις πηγές.

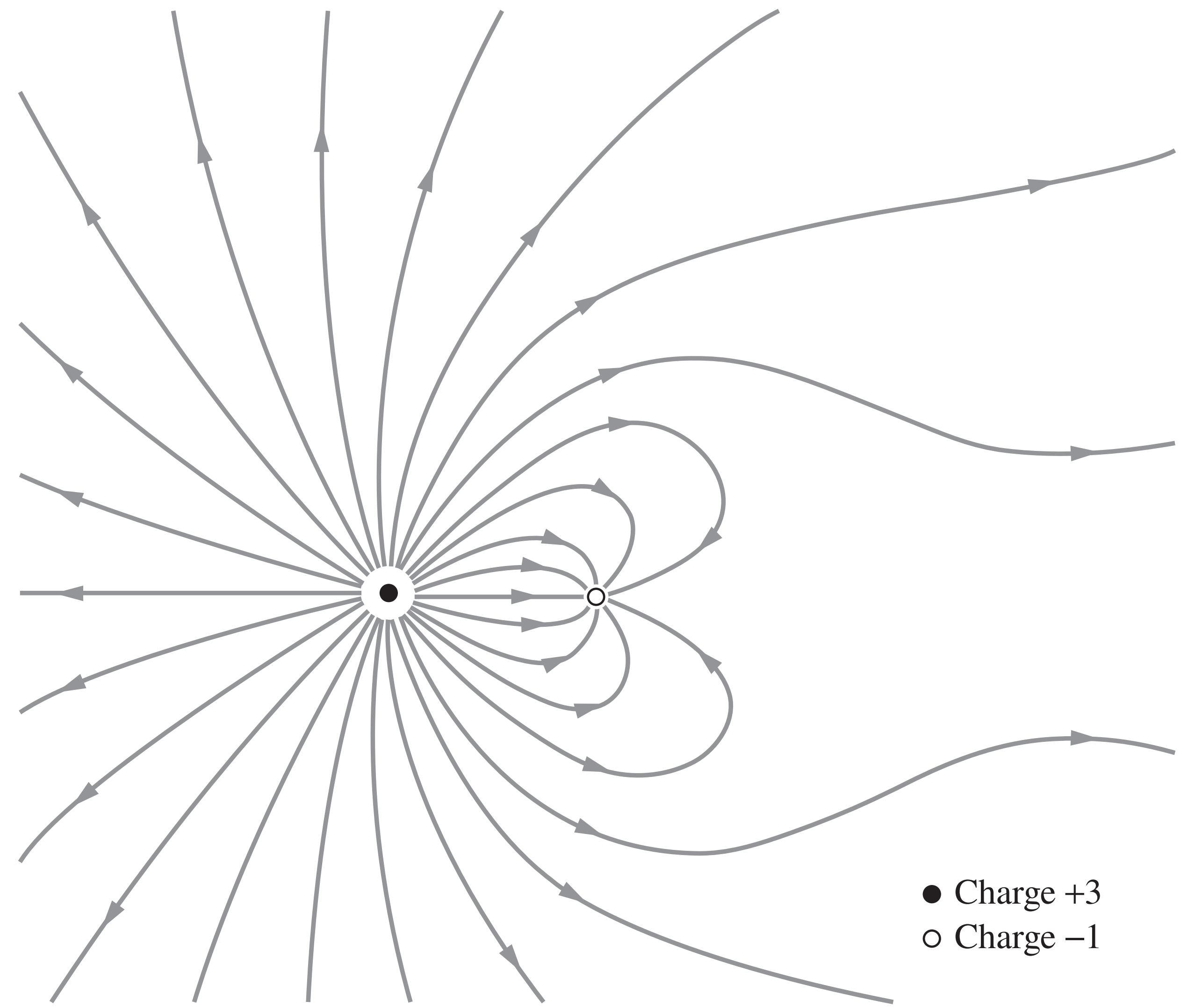
Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μια θεμελιακή φυσική οντότητα που οφείλεται στα φορτία-πηγές (αίτιο) και εκδηλώνεται ασκώντας δύναμη (αποτέλεσμα) στο δοκιμαστικό φορτίο.

Δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου

Η ένταση του πεδίου, όπως και η δύναμη στο δοκιμαστικό φορτίο, είναι διάνυσμα.

⟹ Το ηλεκτρικό πεδίο είναι διανυσματικό πεδίο.

Η εποπτική αναπαράσταση ενός διανυσματικού πεδίου γίνεται με συνεχείς γραμμές (δυναμικές γραμμές): σε κάθε σημείο μιας γραμμής, το διάνυσμα του πεδίου εφάπτεται στη γραμμή.



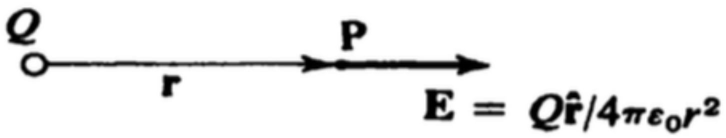
Μια δυναμική γραμμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι η τροχιά που θα διαγράψει ένα δοκιμαστικό φορτίο κάτω από την επίδραση του πεδίου, όταν βρεθεί σε κάποιο σημείο της γραμμής.

Η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών σε μια περιοχή του χώρου είναι ανάλογη της έντασης του πεδίου σε αυτή την περιοχή (→ νόμος του Gauss).

Ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου

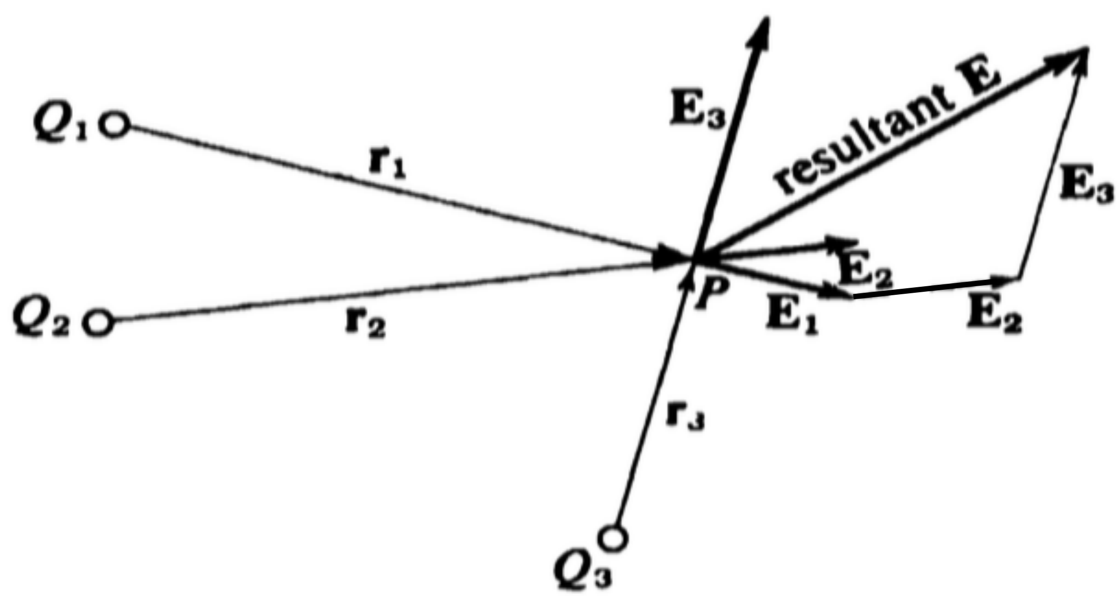
Από το νόμο του Coulob:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$



Από την αρχή της επαλληλίας:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \ldots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1^2}\hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{Q_2}{r_2^2}\hat{\mathbf{r}}_2 + \frac{Q_3}{r_3^2}\hat{\mathbf{r}}_3 + \ldots\right)$$

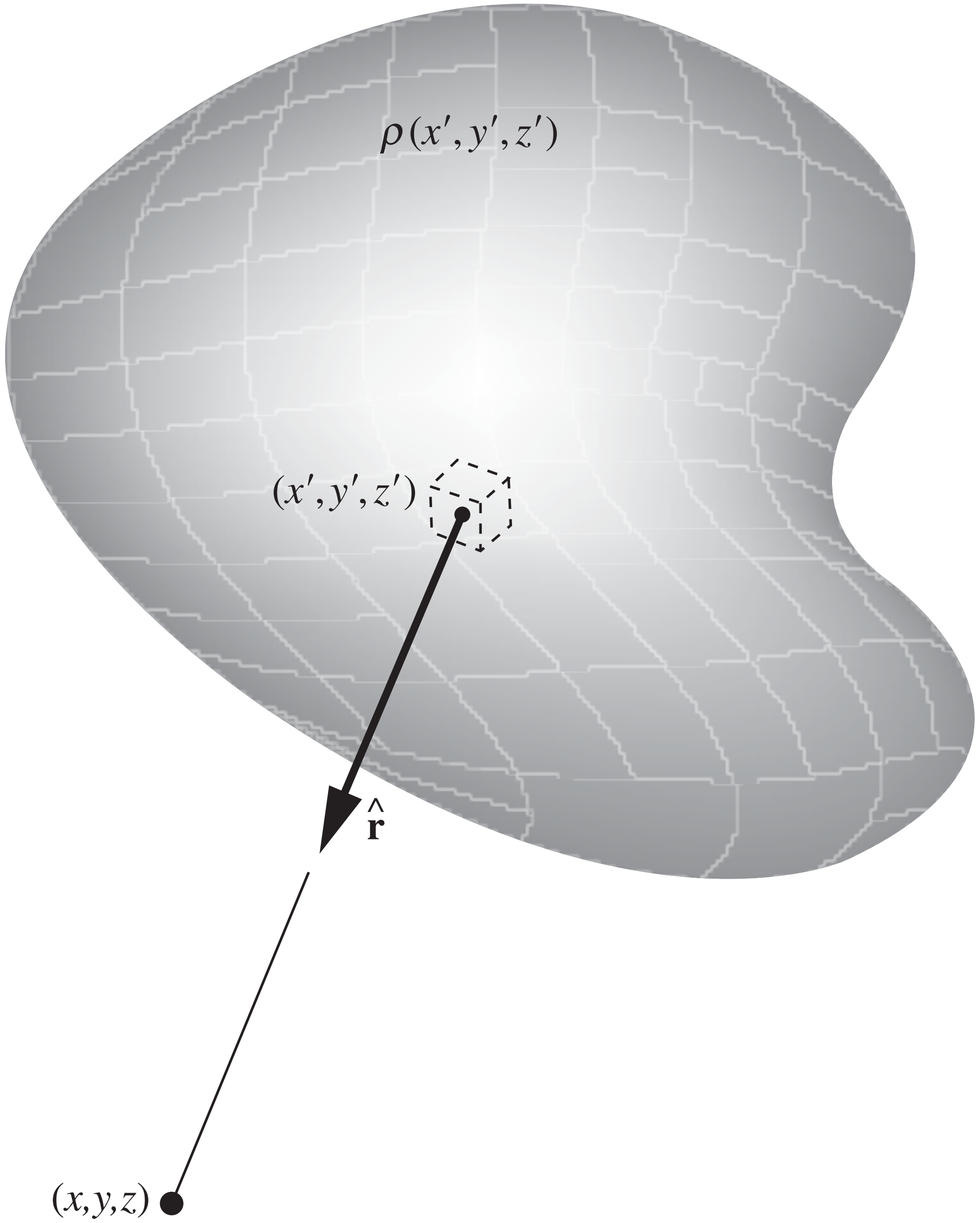


Ηλεκτρικό πεδίο κατανομής φορτίου

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z')\, \hat{\mathbf{r}}\, dx'dy'dz'}{r^2}$$

ή

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\, \hat{\mathbf{r}}\, d^3\mathbf{r}'}{r^2}$$

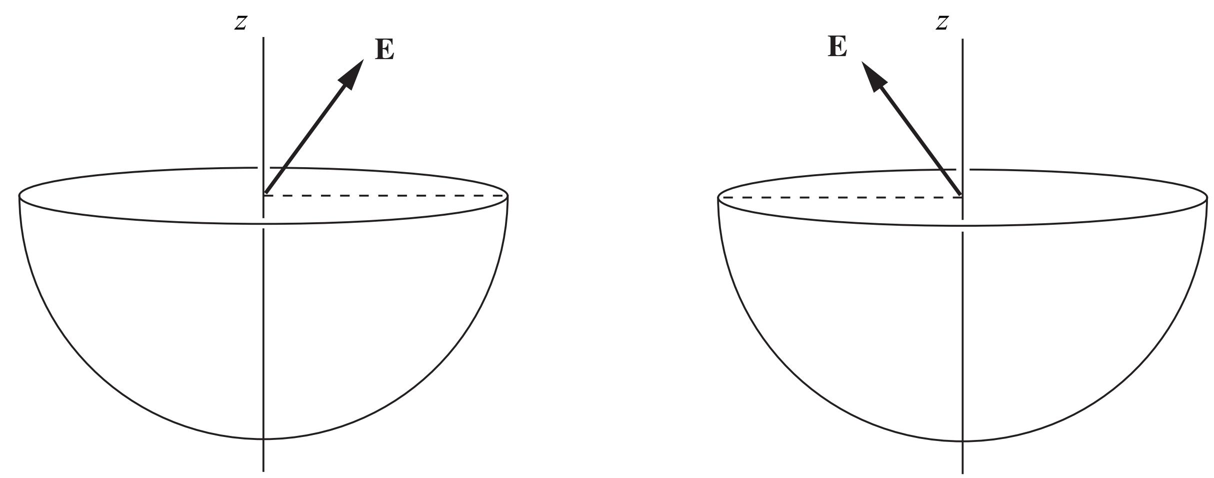


Προσοχή: το διάνυσμα ακτίνας $\mathbf{r}$ είναι και αυτό συνάρτηση του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}'$ (δεν βγαίνει από το ολοκλήρωμα).

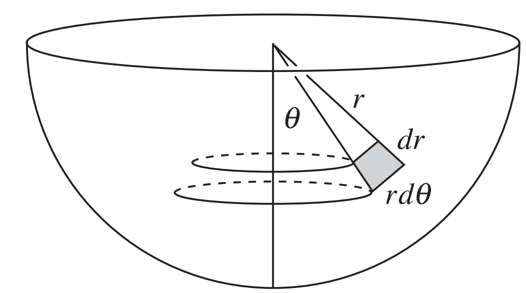
Η εφαρμογή αυτής της γενικής εξίσωσης βασίζεται στην εύρεση μιας έκφρασης του στοιχείου όγκου $d^3\mathbf{r}'$ στο κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, τέτοιας ώστε να αξιοποιείται η οποιαδήποτε συμμετρία της $\rho(\mathbf{r}')$.

Πεδίο στο κέντρο ομοιόμορφα φορτισμένου ημισφαιρίου

Αντιδιαμετρικά φορτία ως προς τον άξονα συμμετρίας z αλληλοαναιρούν συνιστώσες παράλληλες στο ισημερινό επίπεδο $\Longrightarrow$ μόνη μη μηδενική συνιστώσα η E_z (κάθετη στο ισημερινό επίπεδο).



Η σφαιρική συμμετρία της κατανομής φορτίου υποδείχνει τη χρήση σφαιρικών πολικών συντεταγμένων. Τα διανύσματα θέσης φορτίου $\mathbf{r}'$ ως προς το κέντρο της σφαίρας και ακτίνας $\mathbf{r}$ στο σημείο πεδίου (πάλι το κέντρο της σφαίρας) είναι αντίθετα, άρα τα μέτρα τους είναι ίσα. Το ημισφαίριο έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου ρ.



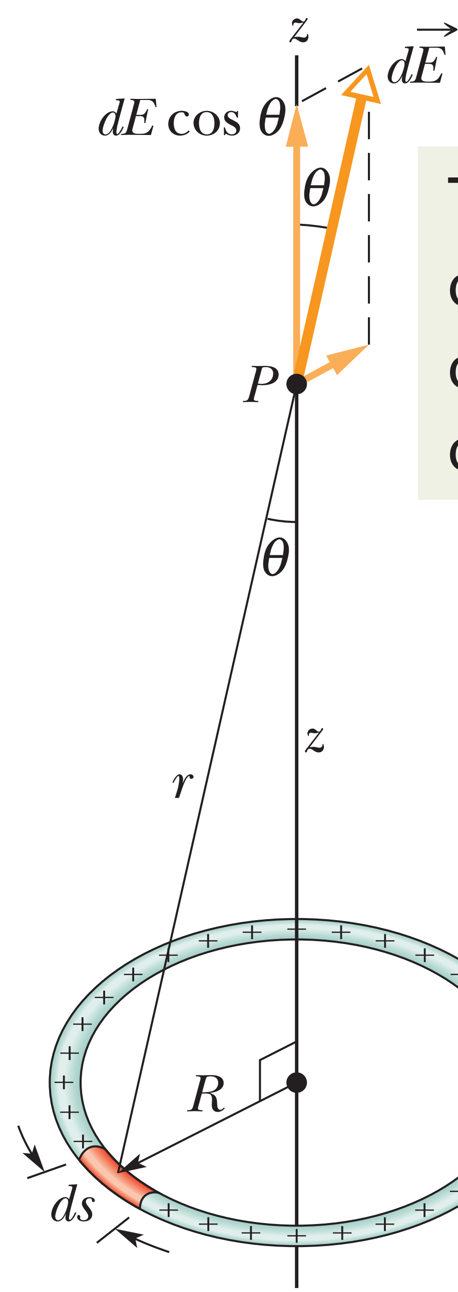
$$dE_z = \frac{\rho d^3\mathbf{r}'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{\rho r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta \underset{\int d\phi}{\rightarrow} \frac{\rho dr \sin\theta\cos\theta d\theta}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho dr \sin(2\theta) d\theta}{4\varepsilon_0}$$

$$\Longrightarrow \quad E_z = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}\int_0^R dr \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)d\theta = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\psi d\psi = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}\frac{-(\cos\pi - \cos 0)}{2} = \boxed{\frac{\rho R}{4\varepsilon_0}}$$

Σημείωση: Προσέξτε την απαλοιφή του r^2. Ομαλές κατανομές φορτίου, $\rho d^3\mathbf{r}\,(\mathbf{r}\to\mathbf{0}) \to 0$, “προστατεύουν” τα πεδία $\mathbf{E} = Q\hat{\mathbf{r}}/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ από τη φαινομενική ανωμαλία στο όριο $\mathbf{r}\to\mathbf{0}$.

Πεδίο στον άξονα ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου

Αναζητούμε το πεδίο κατά μήκος άξονα κάθετου στο επίπεδο του δακτυλίου στο κέντρο του. Το πρόβλημα έχει κυλινδρική συμμετρία $\Longrightarrow$ χρησιμοποιούμε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου στο (λεπτό) δακτύλιο είναι $\lambda = Q/(2\pi R)$.



The perpendicular components just cancel but the parallel components add.

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda ds}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)}$$

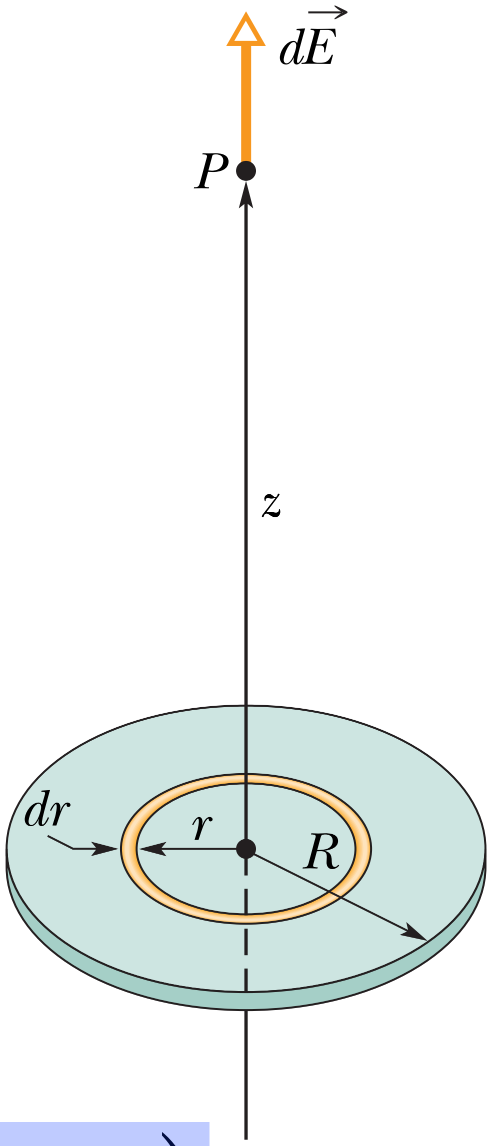
$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$

$$dE_z = dE\cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}ds$$

$$\Longrightarrow \quad E_z(z) = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} ds = \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}}$$

Πεδίο στον άξονα ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Ο (λεπτός) δίσκος φέρει φορτίο με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα σ. Έχουμε και πάλι κυλινδρική συμμετρία $\Longrightarrow$ χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου αναλύοντας το δίσκο σε συνεχή κατανομή απειροστά λεπτών δακτυλίων.



$dQ = \sigma dA = \sigma \cdot 2\pi r dr$ Φορτίο ενός δακτυλίου.

$$dE = \frac{z\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \frac{2rdr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$ Προηγούμενο αποτέλεσμα.

$$\Longrightarrow \quad E(z) = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \int_0^R (r^2 + z^2)^{-3/2}\, 2rdr = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \int_0^{R^2} (x + z^2)^{-3/2} dx$$

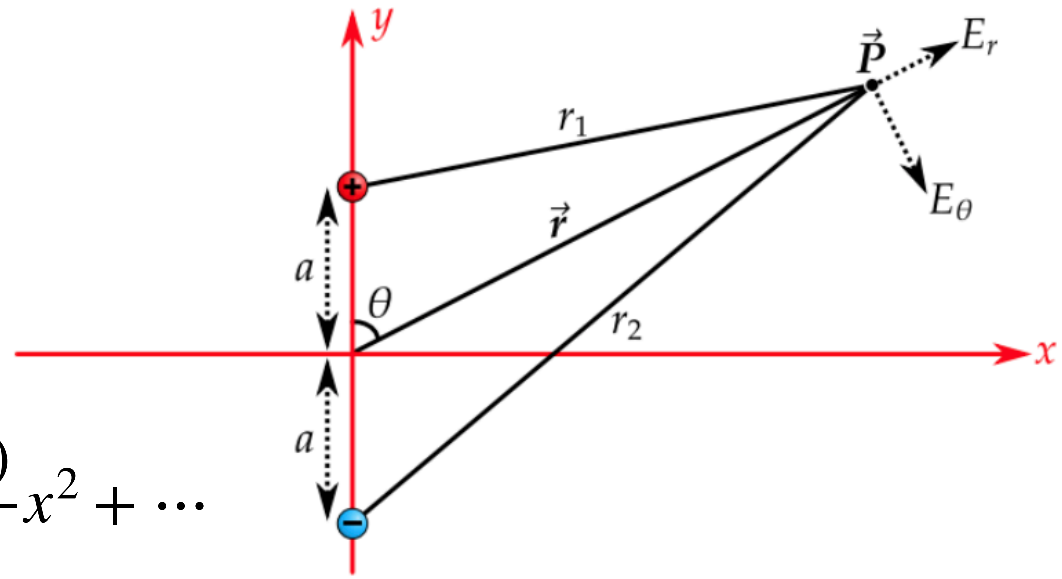
$$= \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \left[\frac{(x + z^2)^{-(3/2)+1}}{-(3/2)+1} \right]_0^{R^2} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \left[\frac{(r^2 + z^2)^{-1/2}}{-1/2} \right]_0^R = \boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)}$$

Στο όριο $R \to \infty$ έχουμε το πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου απέραντου επιπέδου:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Το ηλεκτρικό δίπολο

Ηλεκτρικό πεδίο, σε πολικές συντεταγμένες, ζεύγους αντίθετων φορτίων $+Q$ και $-Q$ σε μεγάλη απόσταση r από το κέντρο της μεταξύ τους απόστασης $d = 2\alpha$:



$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\hat{\mathbf{r}}_1 - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\hat{\mathbf{r}}_2 \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2} - \frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}|^2}\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2} - \frac{\hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}|^2}\right) = E_r\hat{\mathbf{r}} + E_\theta\hat{\mathbf{u}}_\theta$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{1-(2a/r)\cos\theta + (a/r)^2} - \frac{1}{1+(2a/r)\cos\theta + (a/r)^2}\right)$$

και όταν $a \ll r$:

$$\approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{1-(d/r)\cos\theta} - \frac{1}{1+(d/r)\cos\theta}\right) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\left(1+\frac{d}{r}\cos\theta\right) - \left(1-\frac{d}{r}\cos\theta\right)\right]$$

$$= \frac{2Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{Q\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E_r \approx \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

Το διάνυσμα $\mathbf{p} \equiv Q\mathbf{d}$ με κατεύθυνση από το $-Q$ στο $+Q$ είναι η διπολική ροπή του ζεύγους.

Το ηλεκτρικό δίπολο

Για την εγκάρσια συνιστώσα του πεδίου E_θ :

$$\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{a}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{a}}{r}\left(1 - \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

και όταν $a \ll r$:

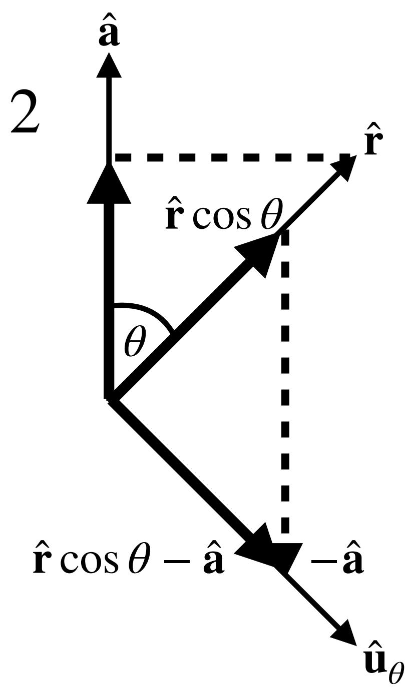
$$\approx \left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{a}}{r}\right)\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right) - \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{a}}{r} + \frac{a\mathbf{r}}{r^2}\cos\theta - \frac{a\mathbf{a}}{r^2}\cos\theta \approx \frac{a}{r}(\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\mathbf{a}})$$

$$\hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}+\mathbf{a}}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}|} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}+\mathbf{a}}{r}\left(1 + \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\approx \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{a}}{r}\right)\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right) - \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{a}}{r} - \frac{a\mathbf{r}}{r^2}\cos\theta - \frac{a\mathbf{a}}{r^2}\cos\theta \approx -\frac{a}{r}(\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\mathbf{a}})$$

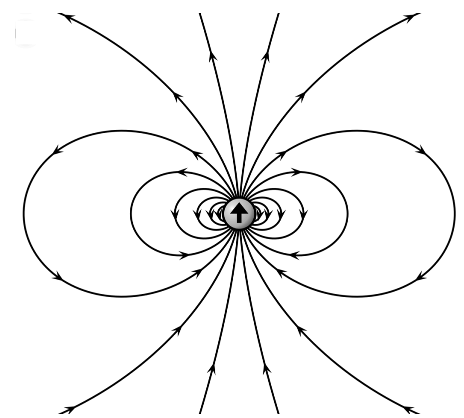
$$\Longrightarrow \quad E_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{1-(2a/r)\cos\theta + (a/r)^2} + \frac{1}{1+(2a/r)\cos\theta + (a/r)^2}\right)\frac{a}{r}(\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\mathbf{a}})$$

$$\left(\frac{1}{\ldots} + \frac{1}{\ldots}\right) \approx \frac{1}{1-(d/r)\cos\theta} + \frac{1}{1+(d/r)\cos\theta} \approx \left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta\right) + \left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta\right) = 2$$



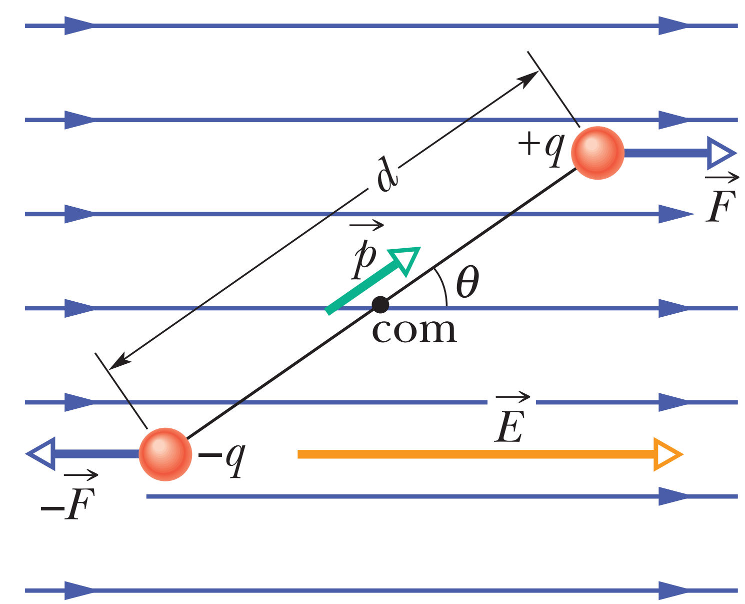
$$(\hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\mathbf{a}})^2 = \cos^2\theta + 1 - 2\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{a}}\cos\theta = \cos^2\theta + 1 - 2\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{u}}_\theta \sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{E_\theta \approx \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$



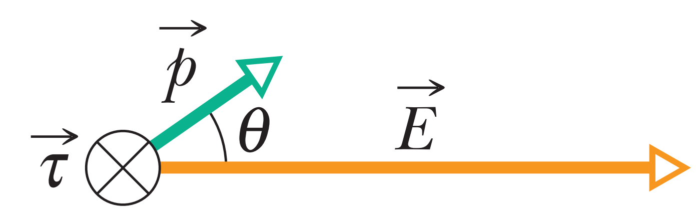
Επίδραση εξωτερικού πεδίου στο ηλεκτρικό δίπολο

Ομογενές πεδίο ασκεί ζεύγος δυνάμεων στα δύο φορτία, με αποτέλεσμα μια ροπή ως προς το κέντρο του διπόλου, η οποία τείνει να ευθυγραμμίσει το δίπολο με το πεδίο:



$$\tau = Fx\sin\theta + F(d-x)\sin\theta = Fd\sin\theta = Eqd\sin\theta = pE\sin\theta$$

Γενικεύοντας σε διανυσματική μορφή για τυχαίο πεδίο:



$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Η δυναμική ενέργεια του διπόλου μέσα στο πεδίο είναι το έργο που εκτελεί το πεδίο για να στρέψει τη διπολική ροπή από 90° σε κάποια γωνία θ ως προς τη διεύθυνση του πεδίου:

$$U = W = \int_{90^\circ}^{\theta} \tau d\theta' = \int_{90^\circ}^{\theta} pE\sin\theta' d\theta' = -pE\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}}$$