ΦΥΣΙΚΗ III

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟ

2021 — 2022

ΤΜΗΜΑ Α΄

Μ. Ασημακοπούλου — Κ. Βελλίδης

masim@phys.uoa.gr

210 727 6922, 210 727 6847

cvellid@phys.uoa.gr

210 727 6946, 210 727 6895
Τομέας ΠΦΣΣ: νβ3
ΙΕΣΕ: β΄ όροφος

ΦΥΣΙΚΗ III

Πρόγραμμα και ύλη

Δευτέρα 10:00 – 12:00
Τετάρτη 11:00 – 13:00
Παρασκευή 12:00 – 14:00

Halliday-Resnick-Walker (HRW)

Κεφ. 21 – 25 (Ηλεκτρισμός) 11/10/21 – 05/11/21 (Βελλίδης)

Κεφ. 26 – 31 (Ρεύματα, Κυκλώματα, Μαγνητισμός) 08/11/21 – 22/12/21 (Ασημακοπούλου)

Κεφ. 32 – 33 (Maxwell, Η/Μ Κύματα) 10/01/22 – 21/01/22 (Βελλίδης)

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙΙ

Πρόγραμμα μαθημάτων Ηλεκτρισμού

Δευτέρα	11/10/21:	Στοιχεία διανυσματικού λογισμού	(θεωρία)
Τετάρτη	13/10/21:	Στοιχεία διανυσματικού λογισμού	(ασκήσεις)
Παρασκευή	15/10/21:	Νόμος του Coulomb	(θεωρία)
Δευτέρα	18/10/21:	Νόμος του Coulomb	(ασκήσεις)
Τετάρτη	20/10/21:	Ηλεκτρικό πεδίο	(θεωρία)
Παρασκευή	22/10/21:	Ηλεκτρικό πεδίο	(ασκήσεις)
Δευτέρα	25/10/21:	Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο	(θεωρία)
Τετάρτη	27/10/21:	Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο	(ασκήσεις)
Παρασκευή	29/10/21:	Ηλεκτρικό δυναμικό	(θεωρία)
Δευτέρα	01/11/21:	Ηλεκτρικό δυναμικό	(ασκήσεις)
Τετάρτη	03/11/21:	Ηλεκτρική χωρητικότητα & πυκνωτές	(θεωρία)
Παρασκευή	05/11/21:	Ηλεκτρική χωρητικότητα & πυκνωτές	(ασκήσεις)
Δευτέρα	10/01/22:	Εξισώσεις Maxwell	(θεωρία)
Τετάρτη	12/01/22:	Εξισώσεις Maxwell	(ασκήσεις)
Παρασκευή	14/01/22:	Εξισώσεις Maxwell μέσα στην ύλη	(θεωρία)
Δευτέρα	17/01/22:	Εξισώσεις Maxwell μέσα στην ύλη	(ασκήσεις)
Τετάρτη	19/01/22:	Ηλεκτρομαγνητικά κύματα	(θεωρία)
Παρασκευή	21/01/22:	Ηλεκτρομαγνητικά κύματα	(ασκήσεις)

ΦΥΣΙΚΗ III

Βιβλιογραφία

- HRW, “Φυσική”, 8η έκδοση, τόμος II, Gutenberg
- Giancoli, “Φυσική, Αρχές και Εφαρμογές”, 7η έκδοση, Τζιόλας
- Serway, “Φυσική για Επιστήμονες και Μηχανικούς”, 8η έκδοση, τόμος II, Κλειδάριθμος
- Young & Freedman, “Πανεπιστημιακή Φυσική”, 2η έκδοση, τόμος II, Παπαζήσης
- Alonso & Finn, “Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική”, τόμος II, “Πεδία και Κύματα”
- Purcell, “Μαθήματα Φυσικής του Berkeley”, τόμος II, “Ηλεκτρισμός-Μαγνητισμός”
- Purcell & Morin, “Electricity and Magnetism”, 3η έκδοση, Cambridge
- Duffin, “Electricity and Magnetism”, 3η έκδοση, McGraw-Hill

- Ayres, “Γενικά Μαθηματικά”, Schaum’s Outline Series, ΕΣΠΙ

ΦΥΣΙΚΗ III

ΤΜΗΜΑ Β’
Κώστας Βελλίδης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, 2021-2022

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

- Πολικές Συντεταγμένες
- Κυλινδρικές Συντεταγμένες
- Σφαιρικές Συντεταγμένες
- Στοιχειώδεις Όγκοι

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

- Καρτεσιανές Συντεταγμένες
- Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων
- Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων
- Βαθμωτό Γινόμενο Τριών Διανυσμάτων

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

- Παράγωγος κατά Κατεύθυνση
- Παραγώγιση στον Τρισδιάστατο Χώρο – Ο Τελεστής ∇

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

- Επικαμπύλια, Επιφανειακά και Χωρικά Ολοκληρώματα
- Ολοκληρώματα Τρισδιάστατων Παραγώγων

ΦΥΣΙΚΗ III

ΤΜΗΜΑ Β’
Κώστας Βελλίδης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, 2021-2022

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Τα εισαγωγικά κεφάλαια των παρακάτω βιβλίων αποτελούν μέρος μόνο της πλούσιας διαθέσιμης βιβλιογραφίας που υπάρχει για τα θέματα που θίγονται στα επόμενα.

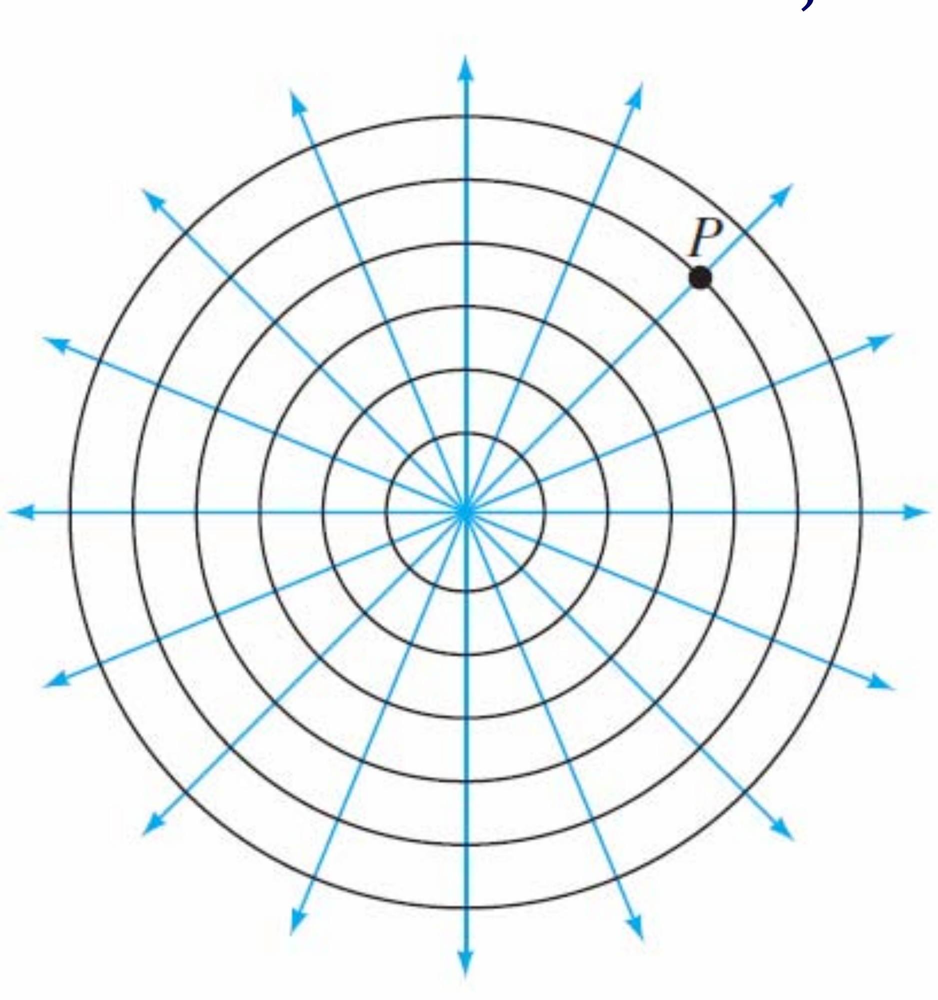
J. Mardsen & A. Tromba: *Διανυσματικός Λογισμός (Vector Calculus)*, 3rd Edition, Απόδοση στα Ελληνικά Α. Γιαννόπουλος, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (1992) ISBN: 978-9607309457.

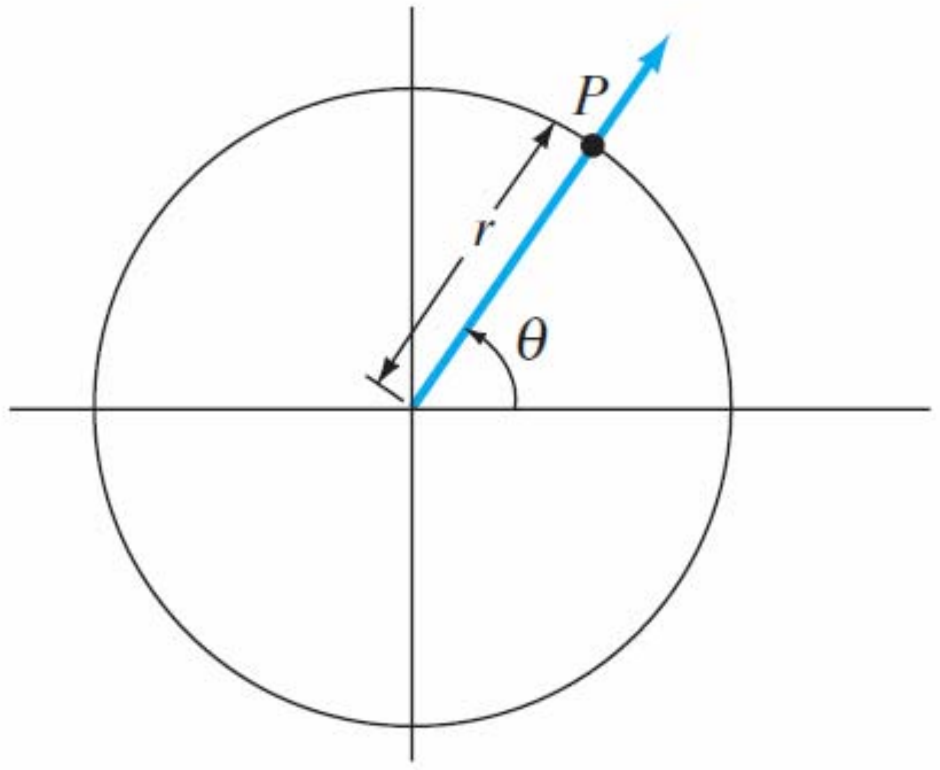
Susan J. Colley: *Vector Calculus*, Pearson 4th Edition (2011) ISBN: 978-0321780652.

Adrian Banner: *The Calculus Lifesaver*, Princeton University Press, 1st Edition (2007) ISBN: 978-0691130880.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Πολικές Συντεταγμένες Επιπέδου





Το σημείο P του επιπέδου προσδιορίζεται μέσω της ακτίνας r και της γωνίας θ: **P(r,θ)**

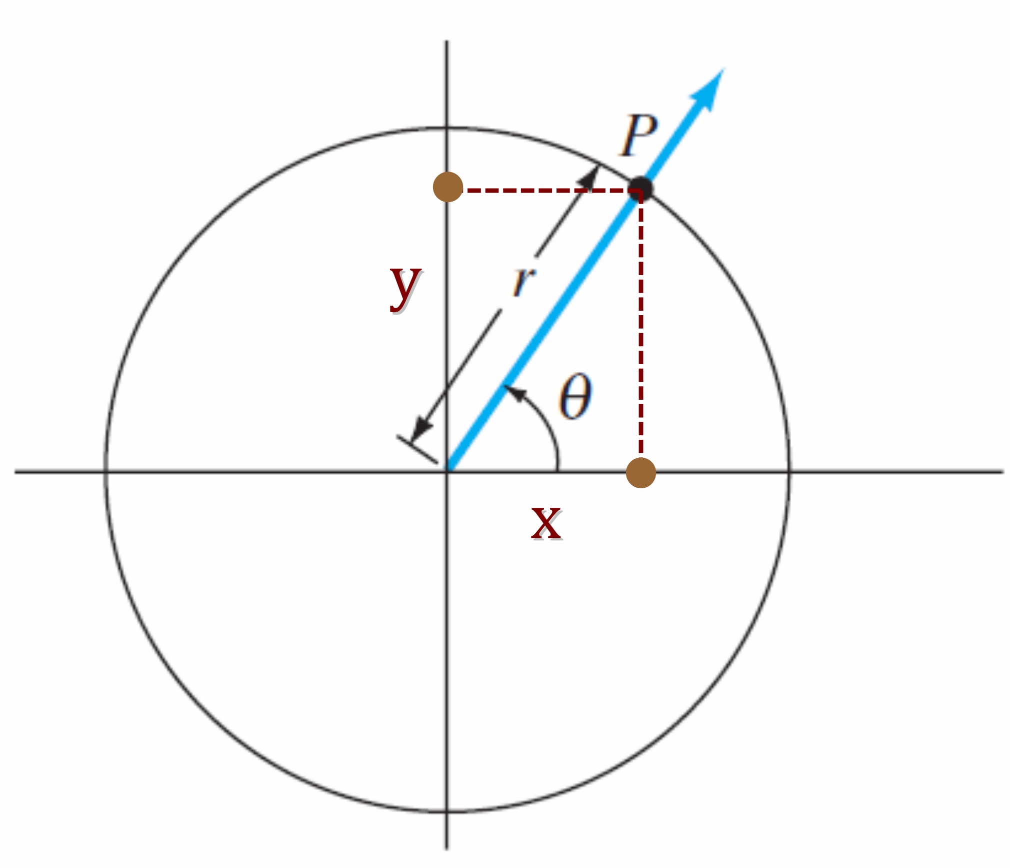
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

όπου

$$0 \le r < \infty \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Σχέση Πολικών & Καρτεσιανών Συντεταγμένων



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

όπου

$$0 \le r < \infty$$
$$0 \le \theta < 2\pi$$

⇓

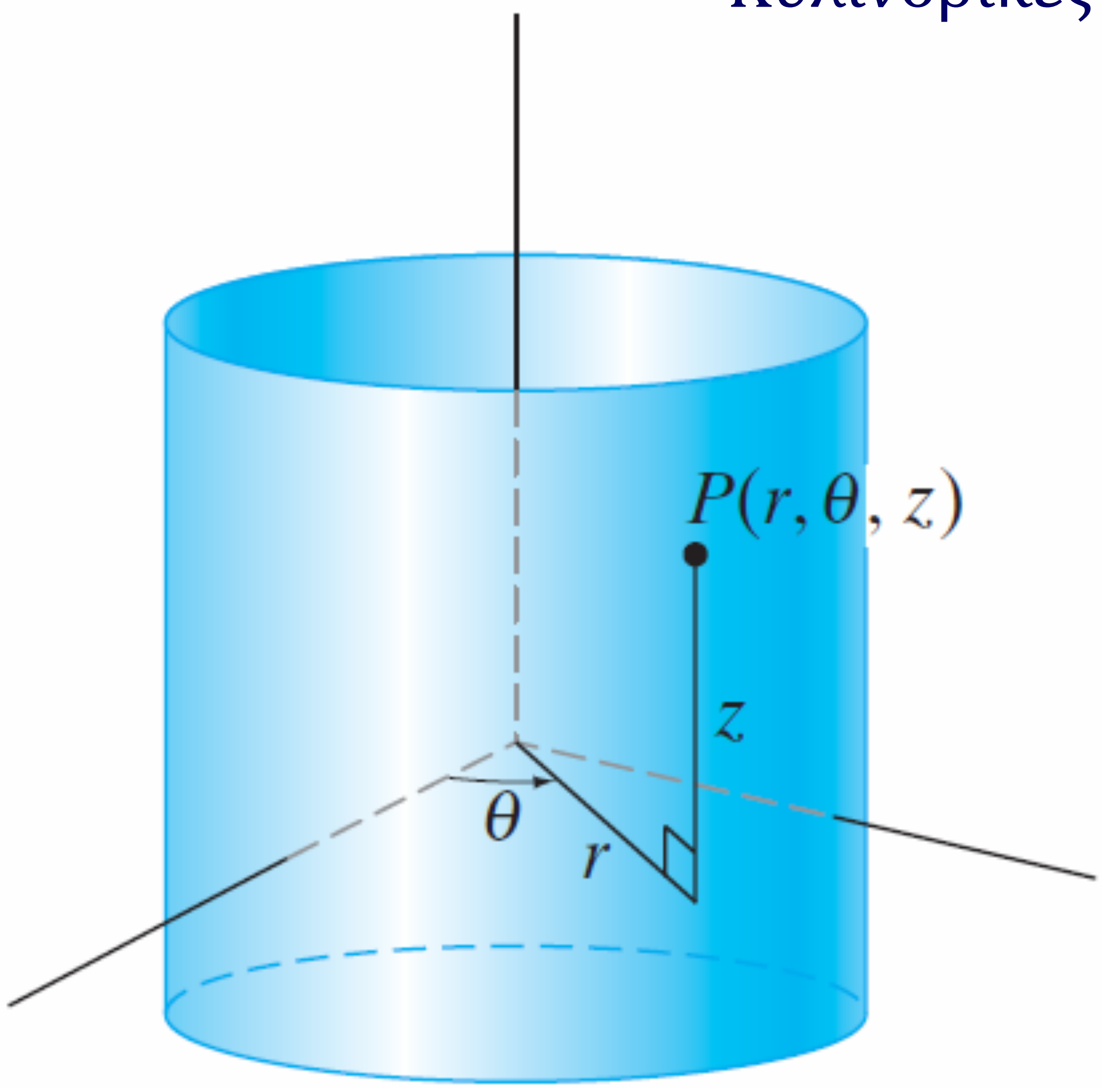
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$
$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

Ο γεωμετρικός τόπος r=const. στις πολικές συντεταγμένες είναι ένας κύκλος.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Κυλινδρικές Συντεταγμένες



Ο γεωμετρικός τόπος r=const. στις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι η επιφάνεια κυλίνδρου.

Κυλινδρικές συντεταγμένες σε Καρτεσιανές

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

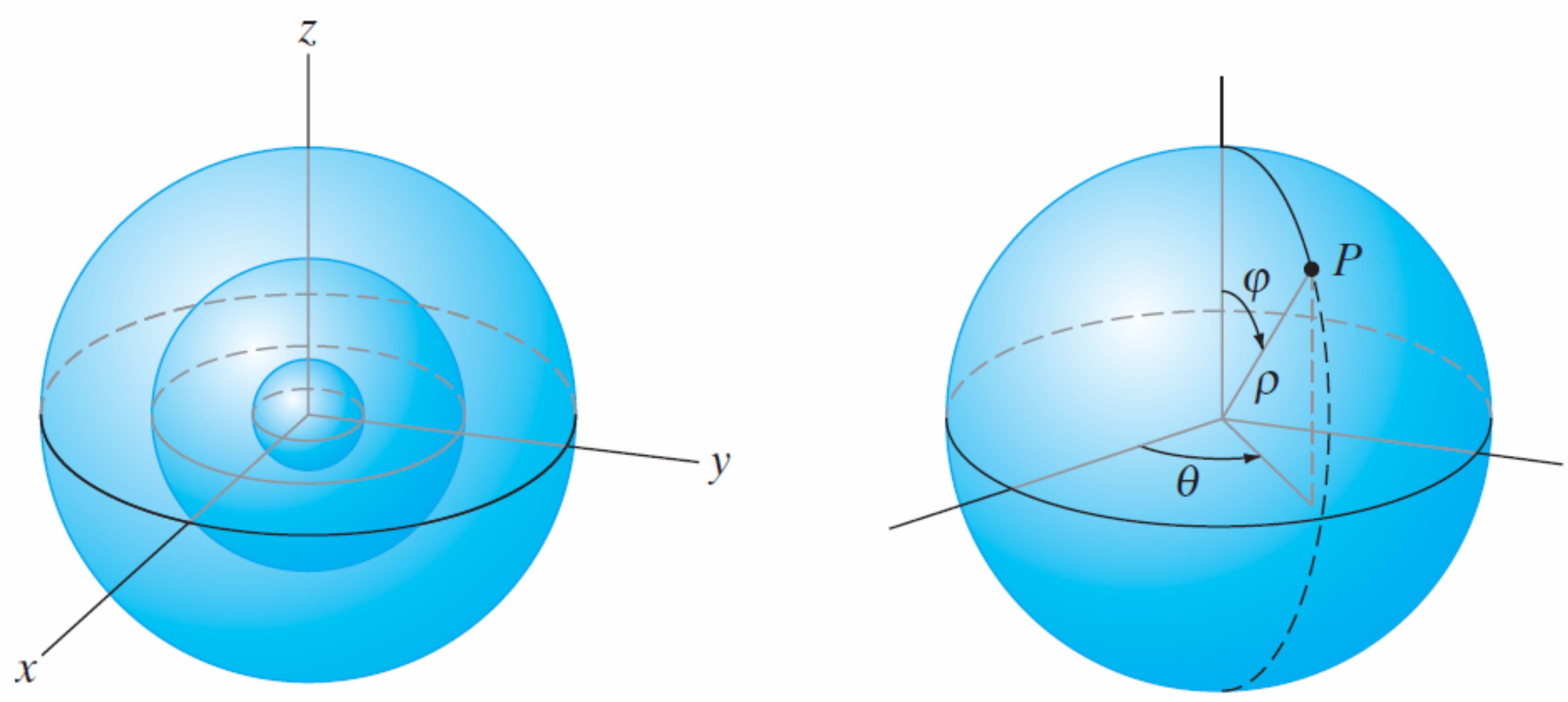
Καρτεσιανές συντεταγμένες σε Κυλινδρικές

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z$$

Το σημείο P του χώρου προσδιορίζεται μέσω της ακτίνας r, της γωνίας θ και της καρτεσιανής συντεταγμένης z: **P(r, θ, z)**

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Σφαιρικές Συντεταγμένες



Ο γεωμετρικός τόπος ρ=const. στις σφαιρικές συντεταγμένες είναι η επιφάνεια σφαίρας.

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

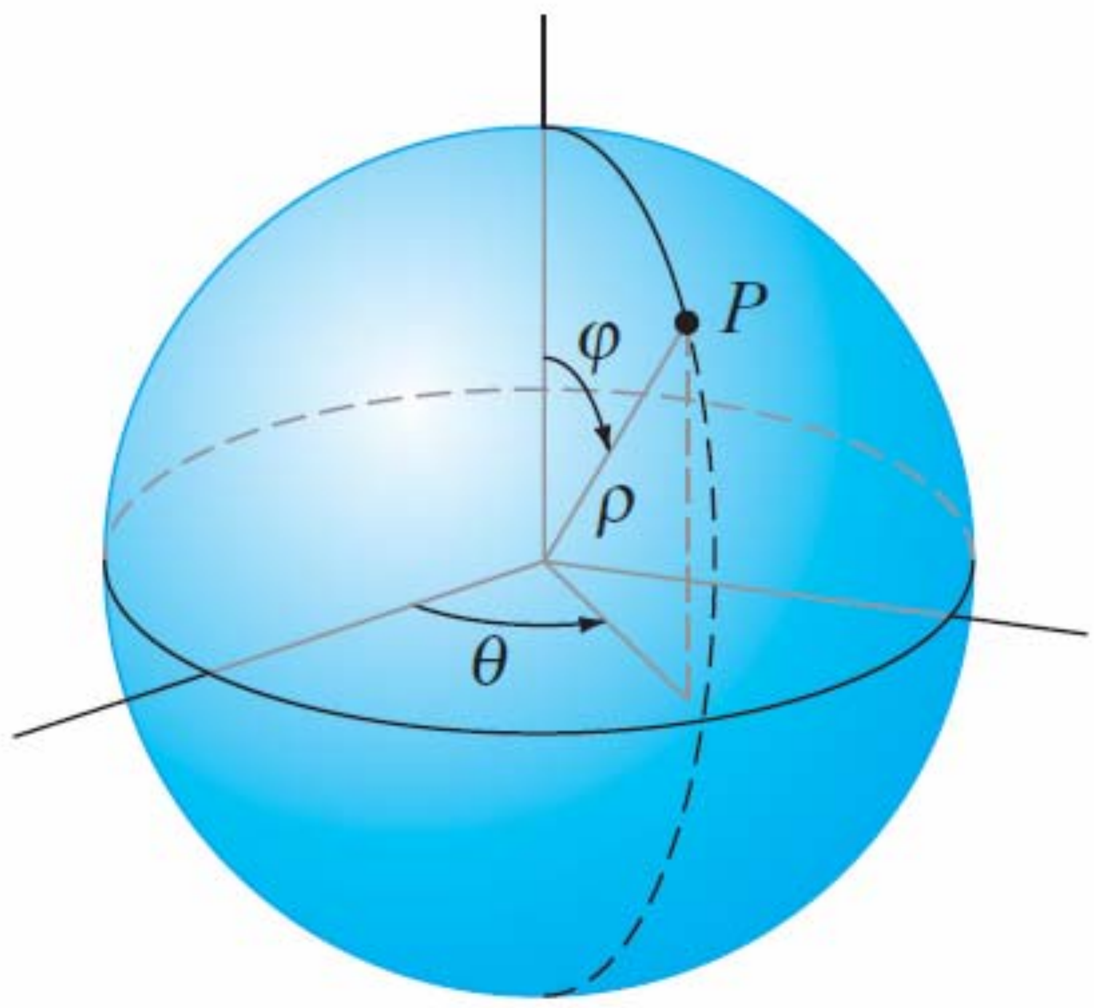
όπου

$$0 \le \rho < \infty$$
$$0 \le \theta < 2\pi$$
$$0 \le \varphi \le \pi$$

Το σημείο P του χώρου προσδιορίζεται μέσω της ακτίνας ρ και των γωνιών θ και φ: P(ρ, θ, φ)

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Σφαιρικές Συντεταγμένες



Σφαιρικές συντεταγμένες σε Καρτεσιανές

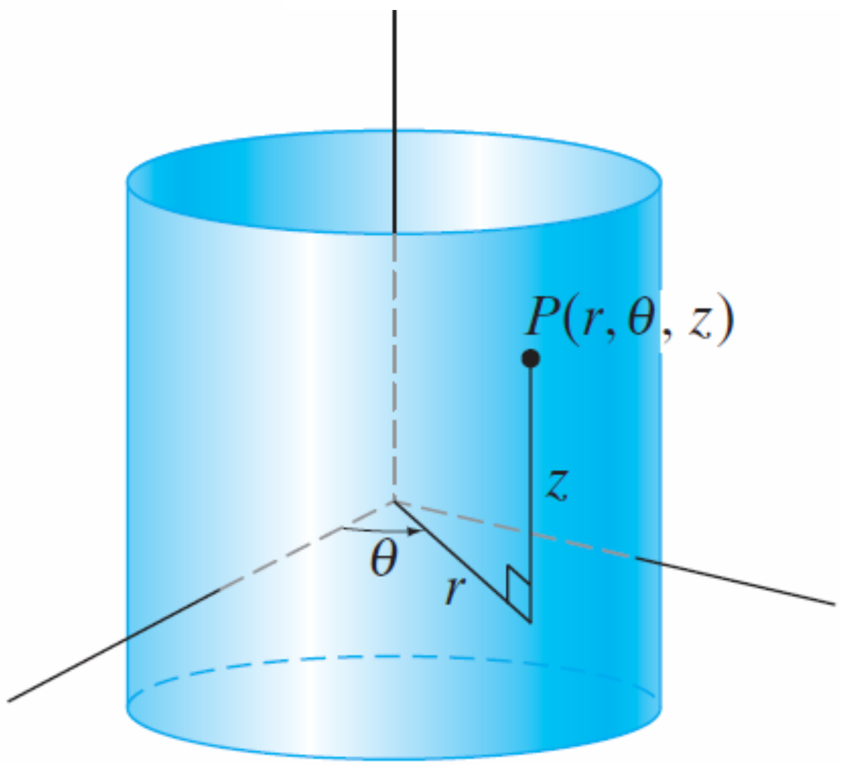
$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

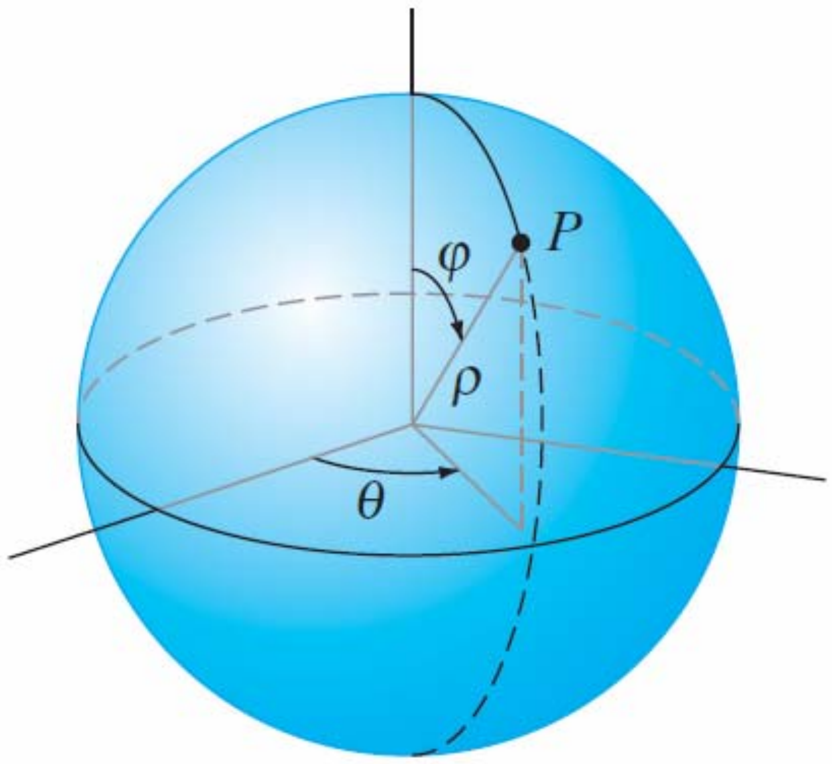
Καρτεσιανές συντεταγμένες σε Σφαιρικές

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \mathrm{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\varphi = \mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = \mathrm{acos}(z/\rho)$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Σχέση Κυλινδρικών & Σφαιρικών Συντεταγμένων





P(r, θ, z)

P(ρ, θ, φ)

$$r = \rho \sin\varphi$$
$$\theta = \theta$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$$
$$\theta = \theta$$
$$\varphi = \operatorname{atan}\left(r/z\right)$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Παράδειγμα

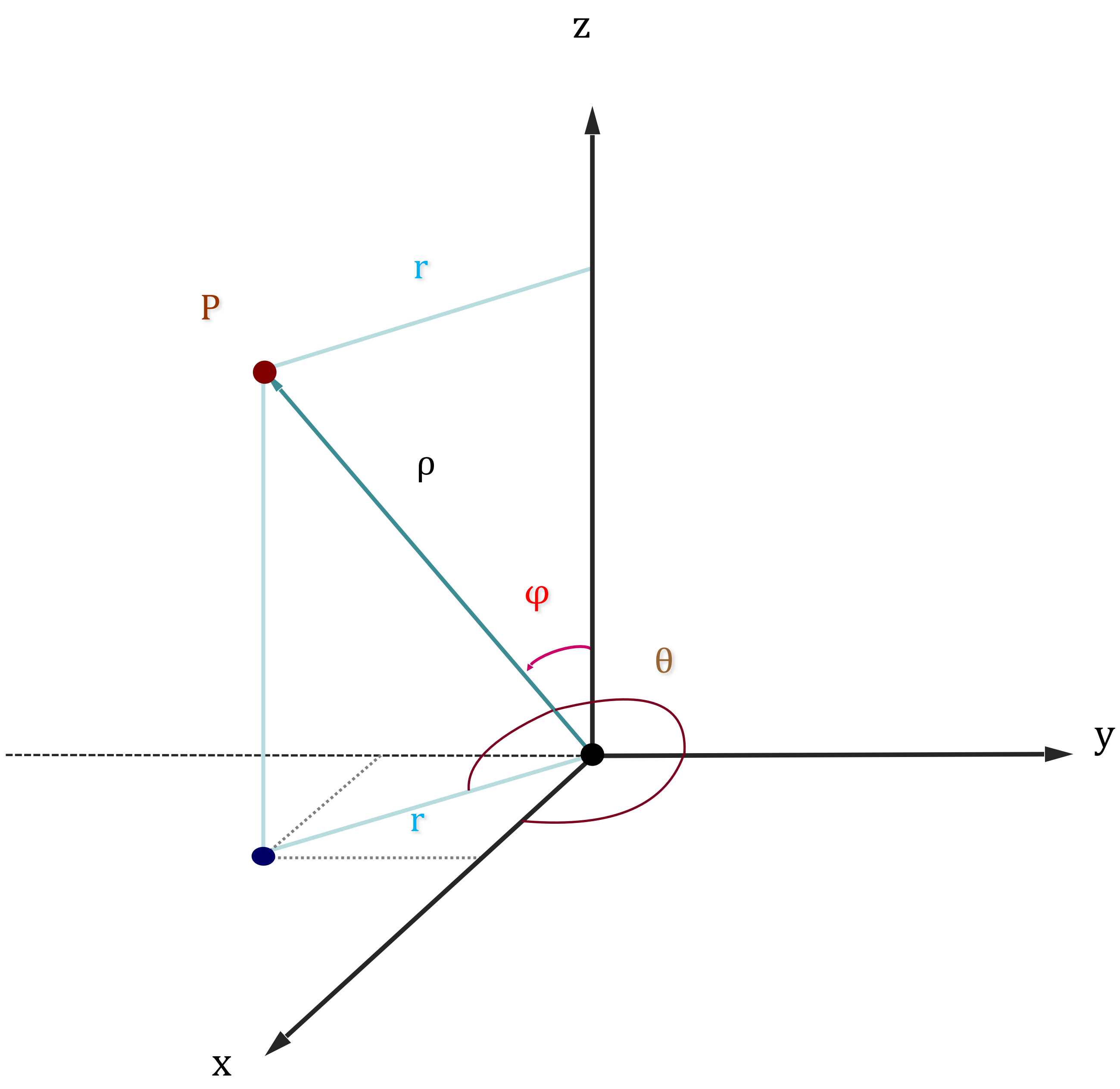
Το σημείο του χώρου P με Καρτεσιανές Συντεταγμένες (+1, -1, +1) έχει:

Κυλινδρικές Συντεταγμένες

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\theta = \mathrm{atan}(-1/1) = 7\pi/4$$
$$z = +1$$

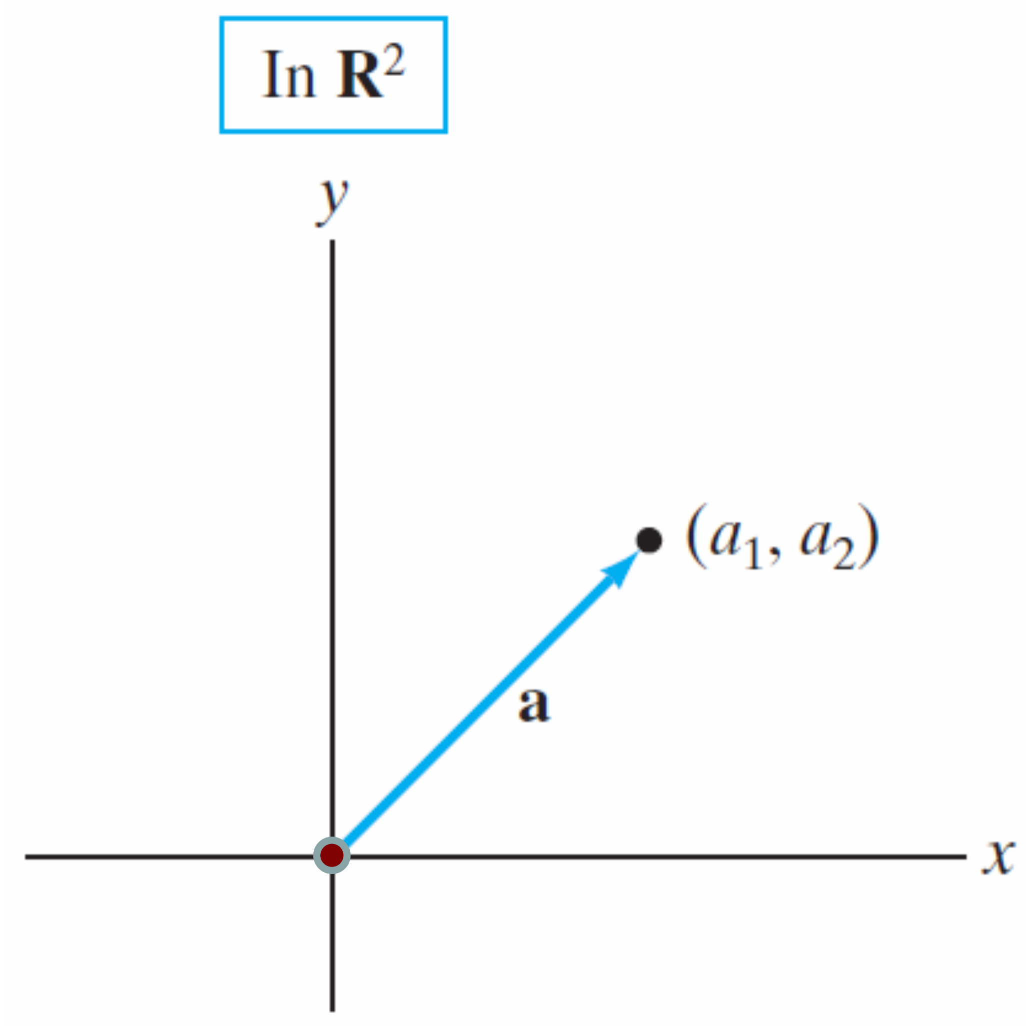
Σφαιρικές Συντεταγμένες

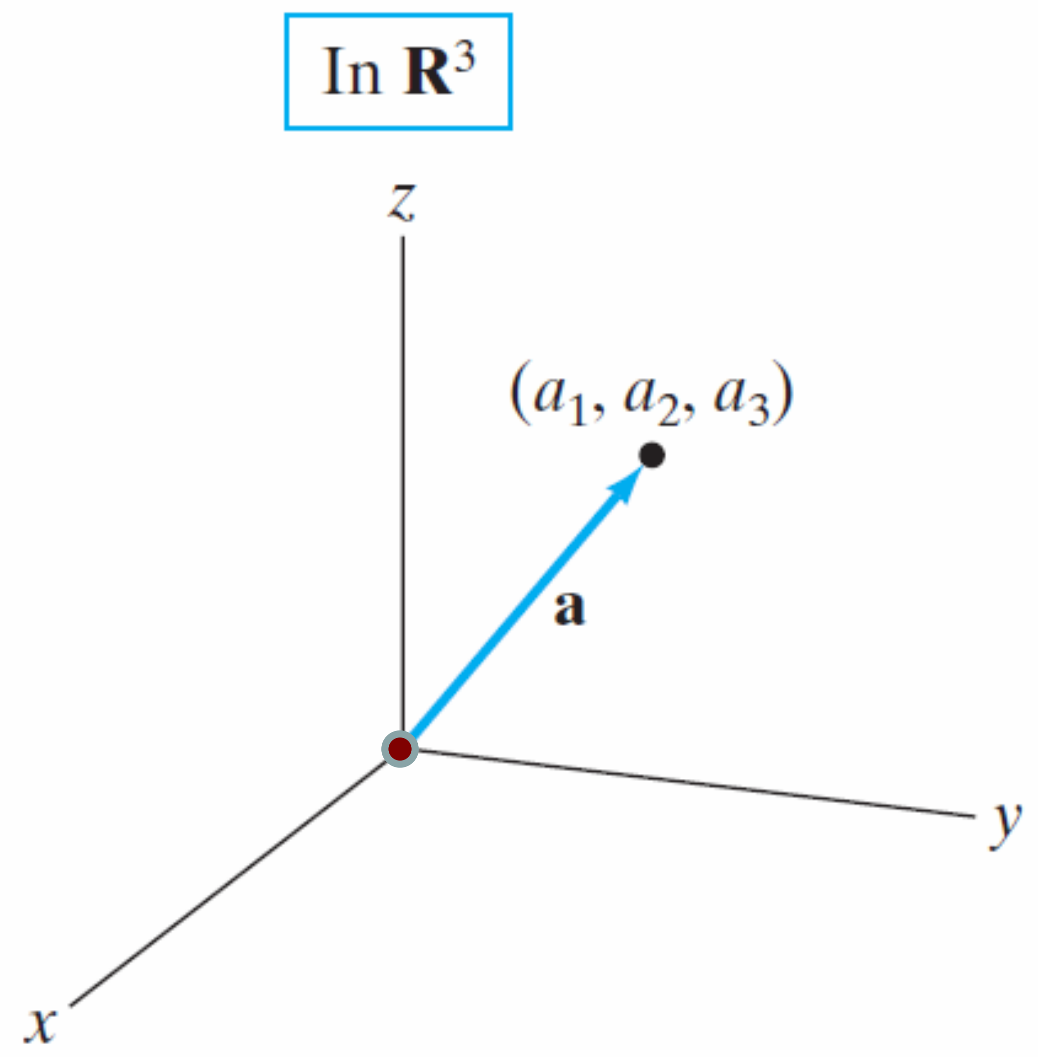
$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$
$$\theta = \mathrm{atan}(-1/1) = 7\pi/4$$
$$\phi = \mathrm{acos}(1/\sqrt{3}) \approx 54.7^{o}$$



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

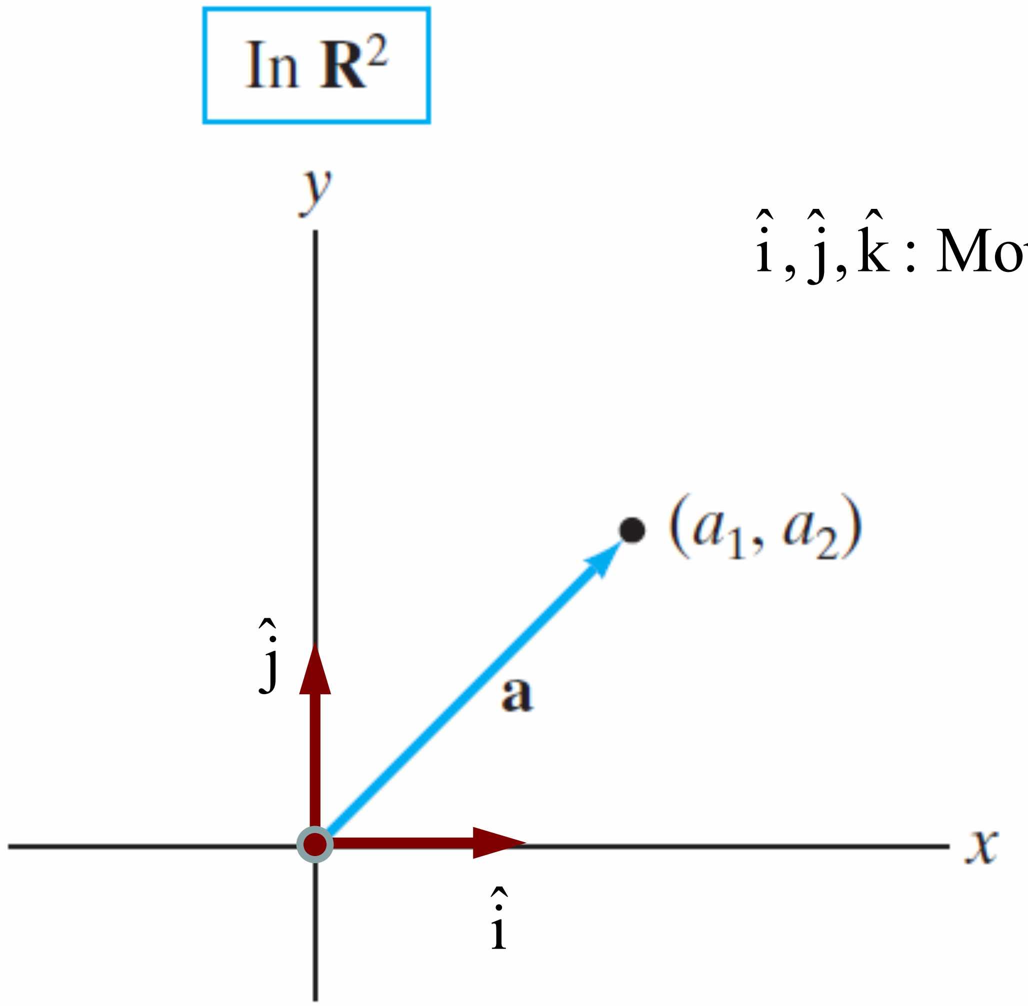
Διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο (a_1, a_2) του επιπέδου και στο σημείο (a_1, a_2, a_3) του τρισδιάστατου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.





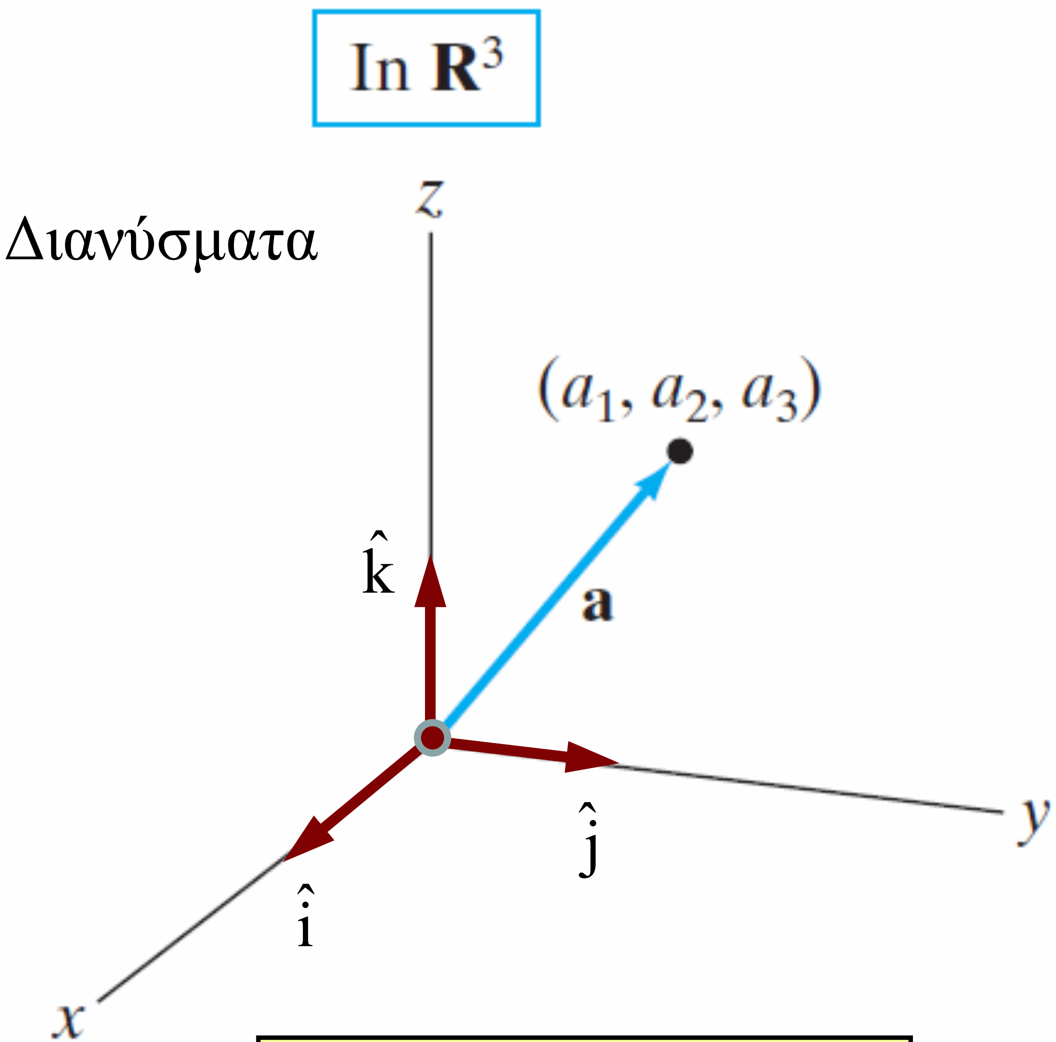
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο (a_1, a_2) του επιπέδου και στο σημείο (a_1, a_2, a_3) του τρισδιάστατου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.



$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: Μοναδιαία Διανύσματα

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$$

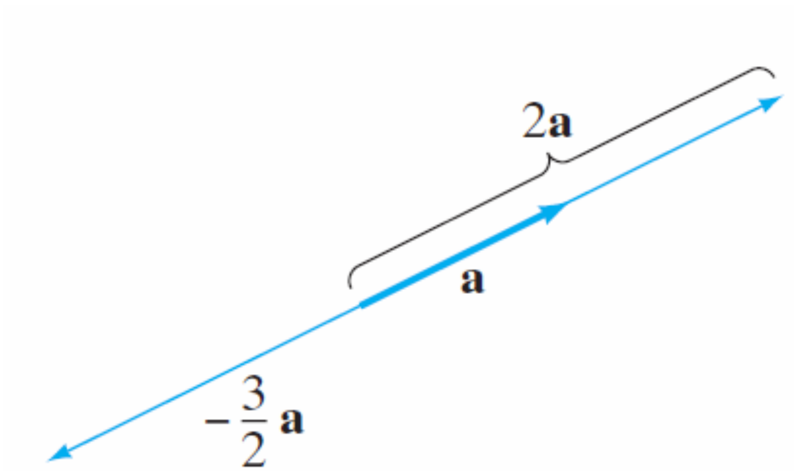


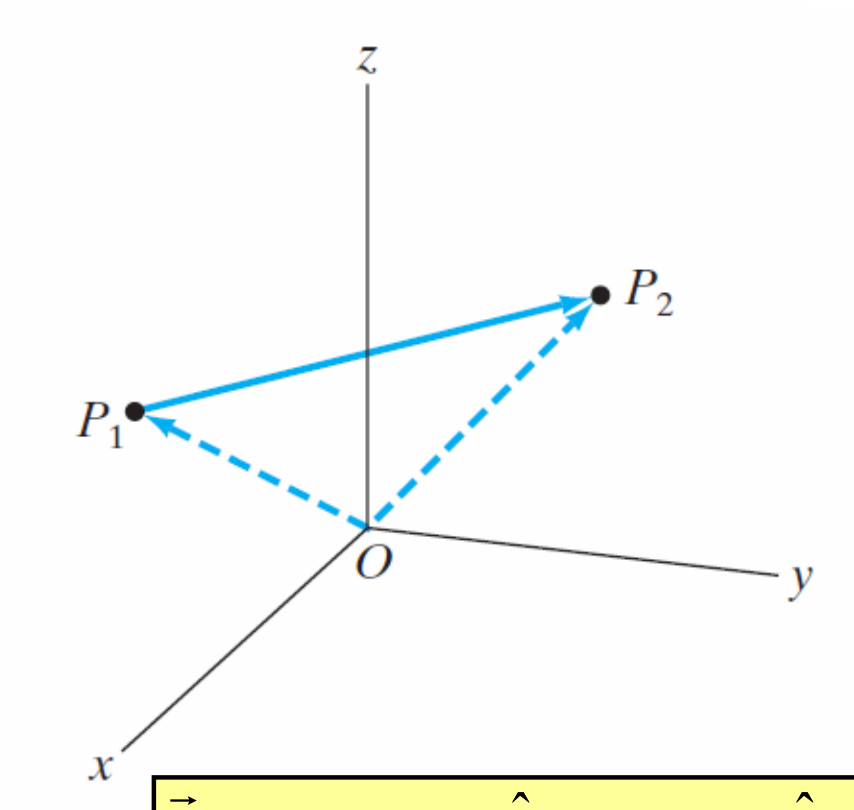
$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

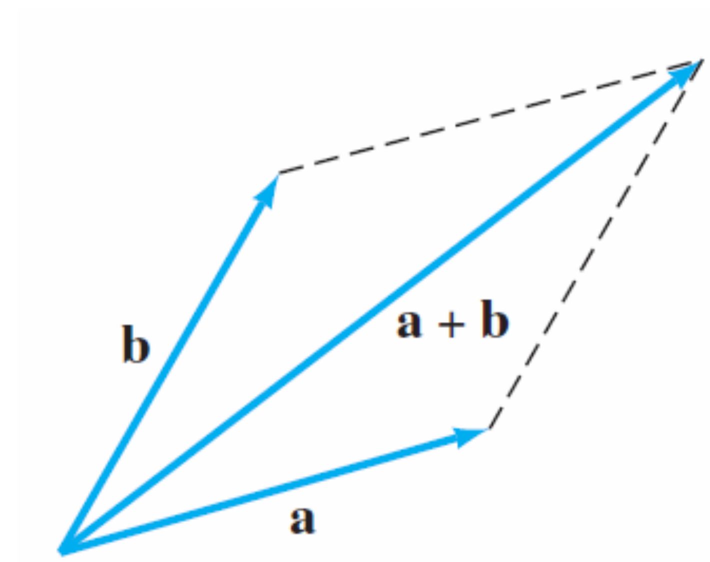
Αριθμητικά Πολλαπλάσια

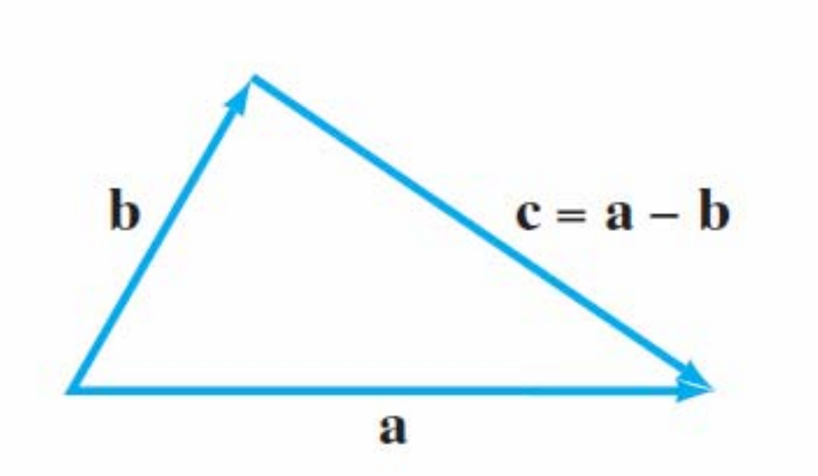




$$\vec{P}_{12} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

Άθροισμα Διανυσμάτων





Διαφορά Διανυσμάτων

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Για τα διανύσματα **a**=(a_1, a_2, a_3) και **b**=(b_1, b_2, b_3) του τρισδιάστατου χώρου το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

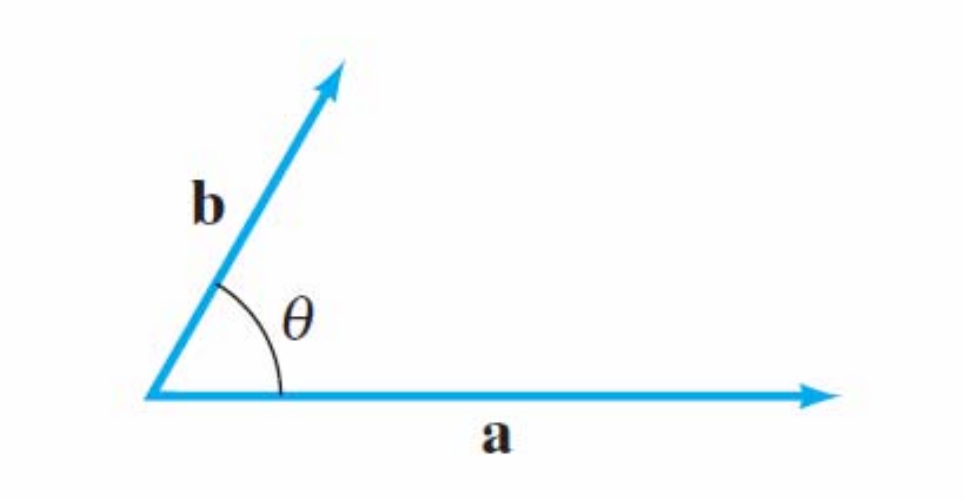
Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0$, and $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0$ if and only if $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;
3. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$;
4. $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b})$.

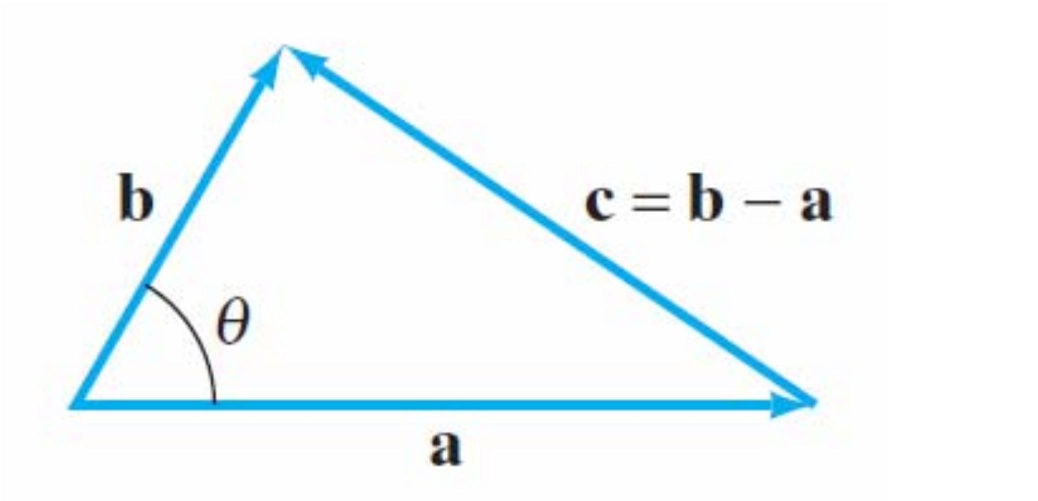
$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 = \left|\vec{a}\right|^2 \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Leftrightarrow (\vec{b}-\vec{a})(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{b}\vec{b} + \vec{a}\vec{a} - 2\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

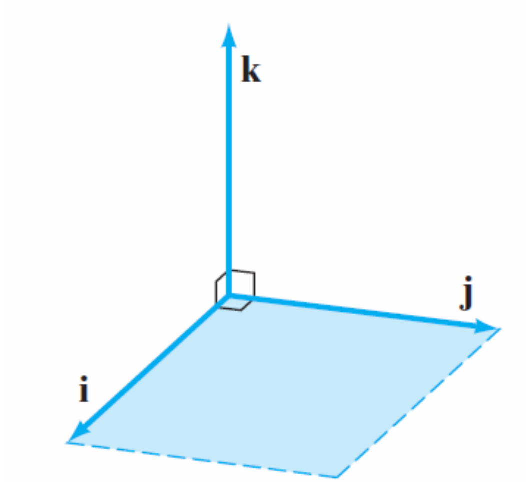
Για τα διανύσματα **a**=(a_1, a_2, a_3) και **b**=(b_1, b_2, b_3) του τρισδιάστατου χώρου το εξωτερικό γινόμενο δίνεται μέσω της ορίζουσας:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

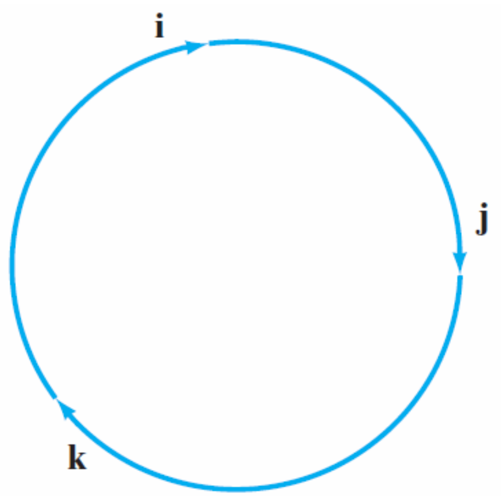
Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι διανυσματικό μέγεθος.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ (anticommutativity);
2. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (distributivity);
3. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ (distributivity);
4. $k(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (k\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(k\mathbf{b})$.



$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\ ,\ \ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\ ,\ \ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$



ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 3×3 ισοδυναμεί με το άθροισμα τριών οριζουσών 2×2:

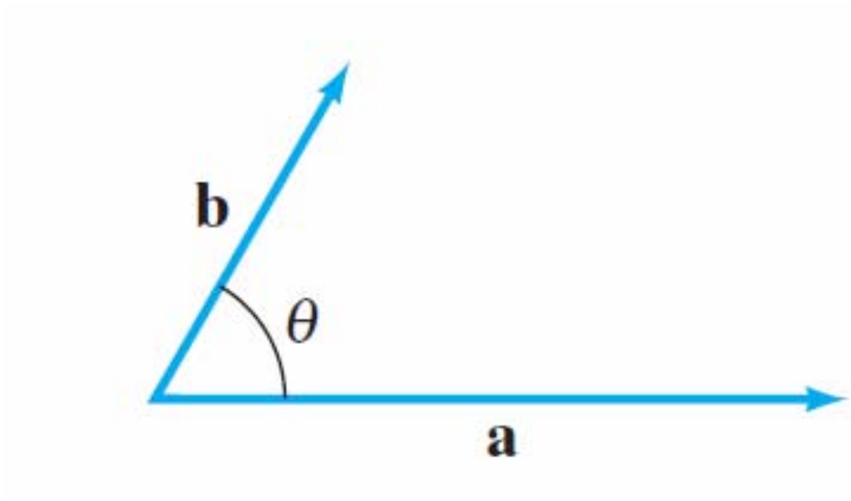
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\hat{k}$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας μπορεί να γίνει ως προς οποιαδήποτε σειρά ή στήλη με τον μνημονικό κανόνα των προσήμων:

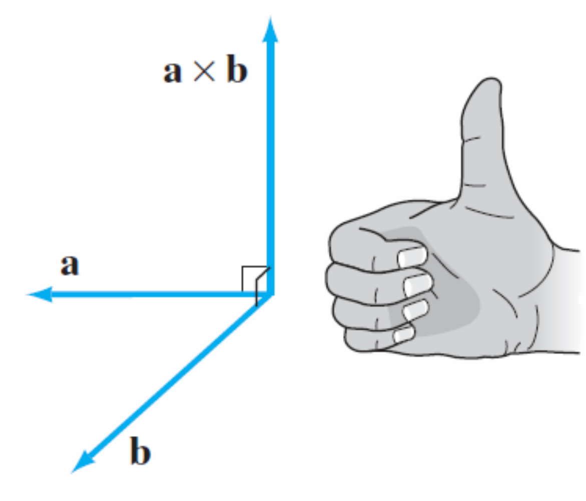
$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Είναι προφανές πως ισχύει η γενίκευση, ότι μια ορίζουσα **n τάξεως** μπορεί να αντικατασταθεί με **n ορίζουσες τάξεως (n-1)**.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$\boxed{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta}$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

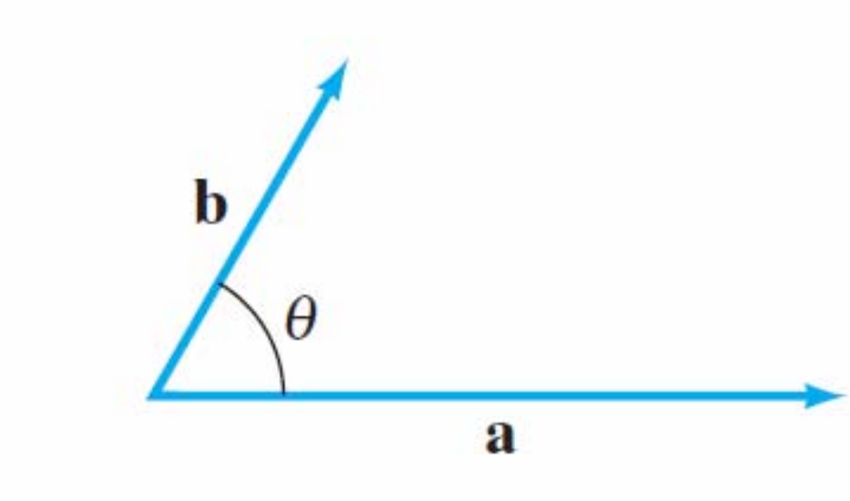
$$\Downarrow$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$\Downarrow$$

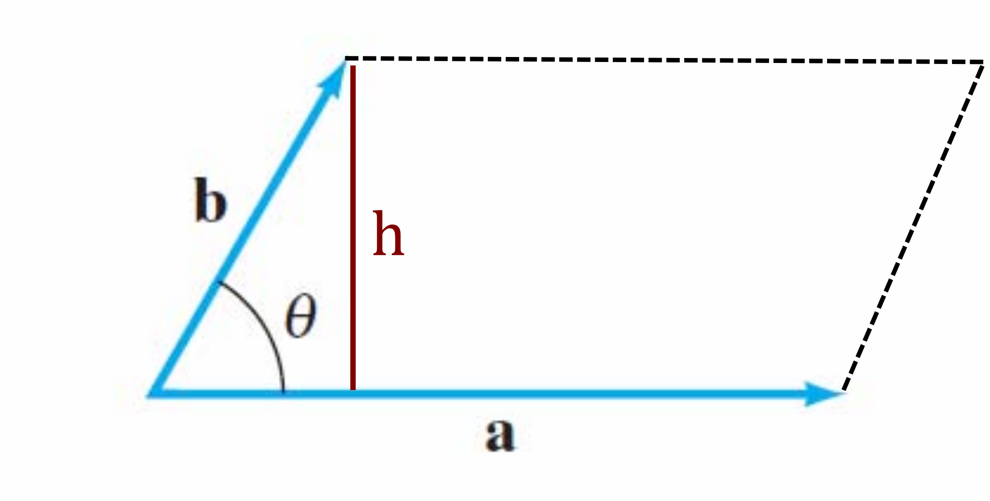
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\theta = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\theta$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

Γεωμετρική σημασία του Εξωτερικού Γινομένου

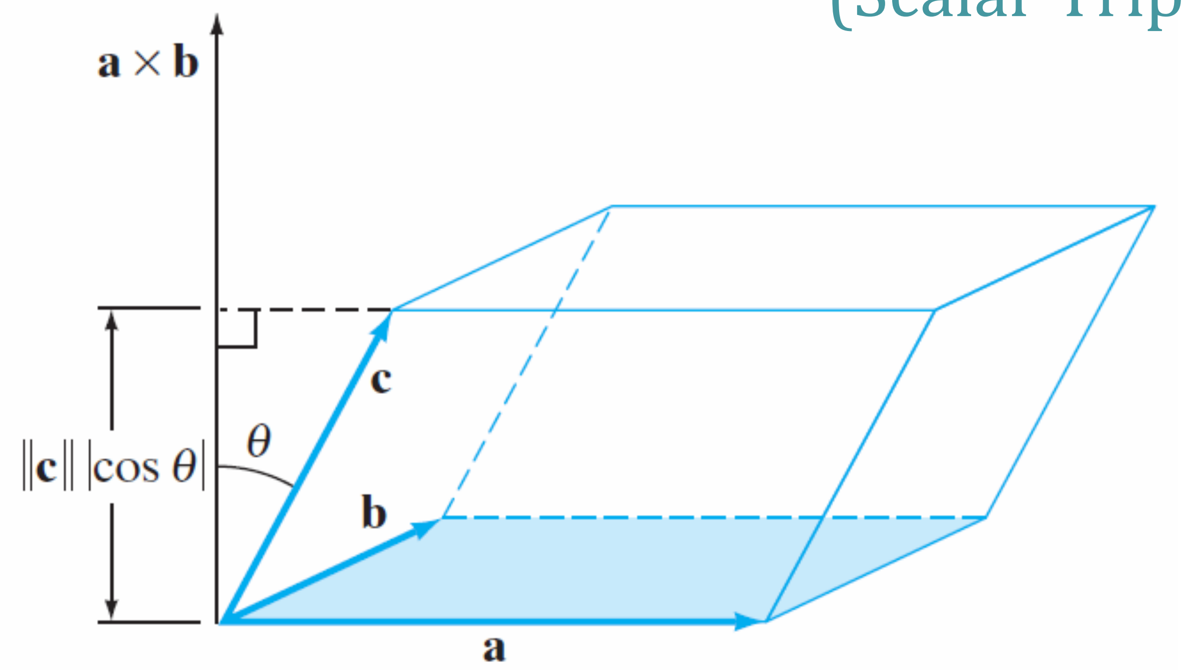


$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\theta = |\vec{a}|\left(\left|\vec{b}\right|\sin\theta\right) = |\vec{a}|h = E$$

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ισούται με το εμβαδόν του αντίστοιχου παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο αυτά διανύσματα.

ΒΑΘΜΩΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

(Scalar Triple Product)



Ορίζεται σαν το μεικτό γινόμενο:

$$\boxed{\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}$$

και είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

$$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=(c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k})\cdot\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

Γεωμετρική σημασία του Τριπλού Γινομένου

$$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=|\vec{c}|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cos\theta=\left(|\vec{c}|\cos\theta\right)\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left(|\vec{c}|\cos\theta\right)E=V$$

Το τριπλό γινόμενο διανυσμάτων ισούται με τον όγκο του αντίστοιχου παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα τρία διανύσματα.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Η έννοια της παραγώγισης ενός βαθμωτού ή διανυσματικού πεδίου στον χώρο διευκολύνεται με την εισαγωγή του τελεστή ∇ (*Ανάδελτα* ή *Nabla*), ο οποίος ορίζεται ως:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

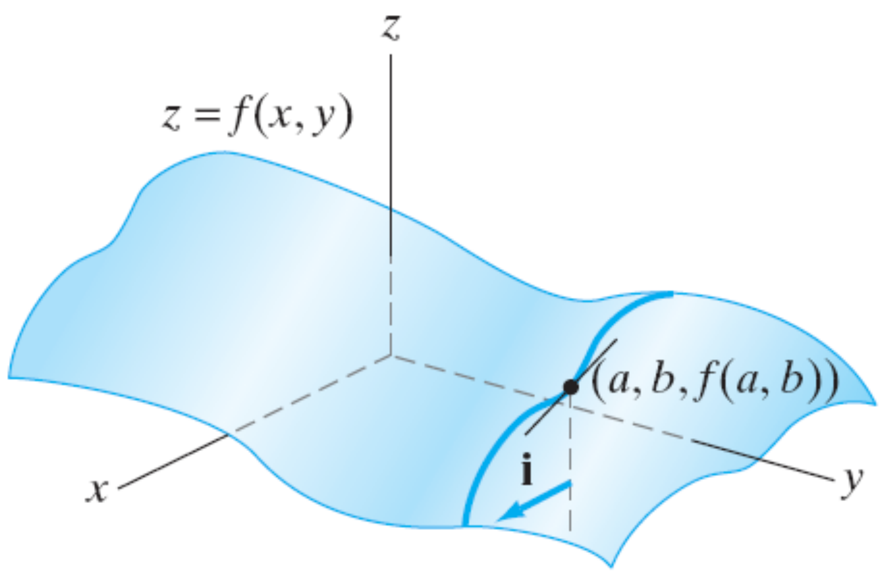
Διακρίνονται οι τρεις παρακάτω περιπτώσεις, ανάλογα με το εάν το πεδίο (η συνάρτηση) στο οποίο ο τελεστής αυτός επιδρά είναι βαθμωτό ή διανυσματικό:

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΟΡΙΣΜΑ	ΤΡΟΠΟΣ ΔΡΑΣΗΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
Κλίση (grad)	Βαθμωτό	$\vec{\nabla} f$	Διανυσματικό
Απόκλιση (div)	Διανυσματικό	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	Βαθμωτό
Στροβιλισμός (curl)	Διανυσματικό	$\vec{\nabla} \times \vec{F}$	Διανυσματικό

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Ως κλίση ενός βαθμωτού πεδίου (συνάρτησης) f(x,y,z) ορίζεται ως το διανυσματικό πεδίο:

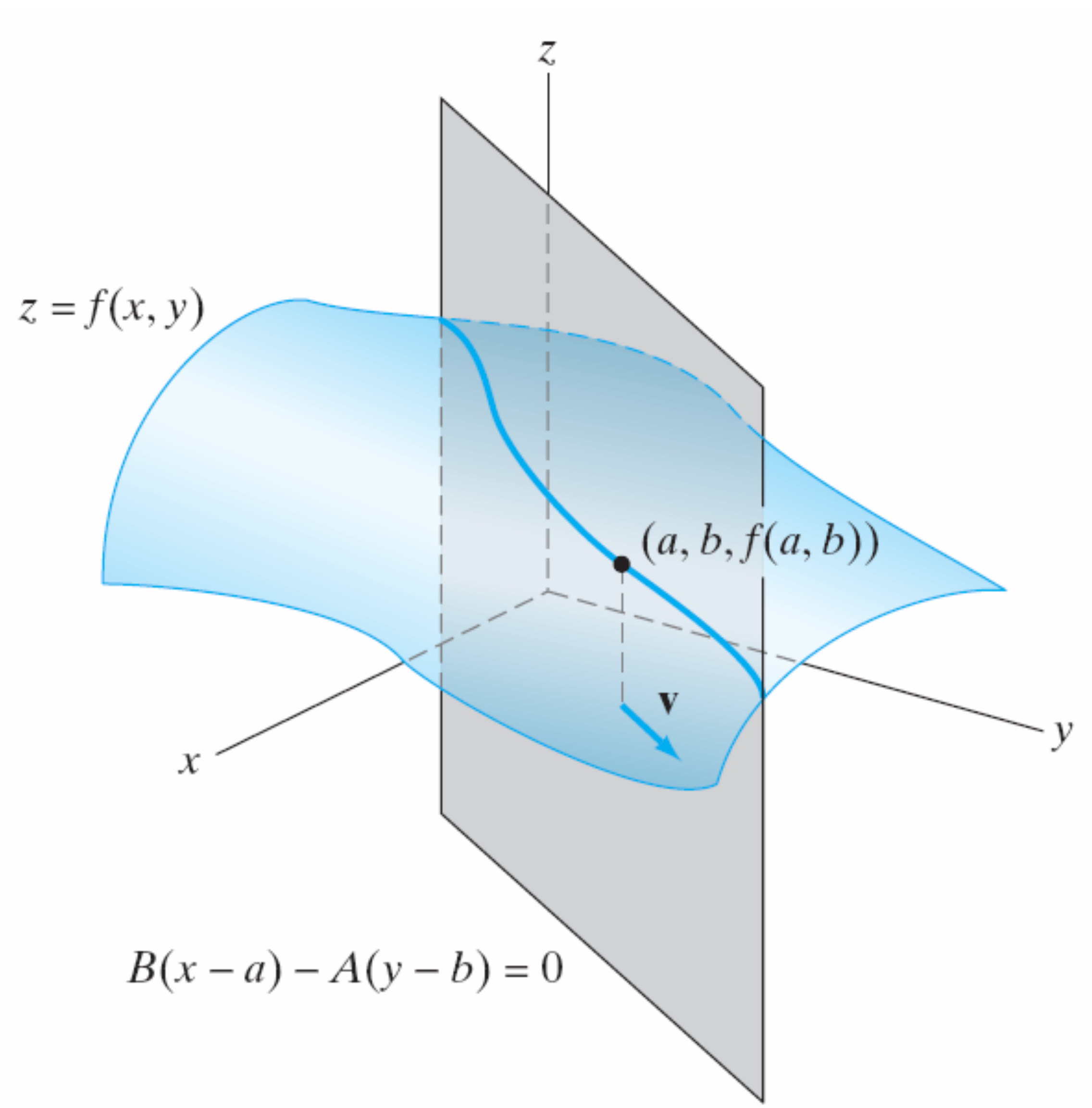
$$\boxed{\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}}$$



*Το **gradf** δίνει την **παράγωγο** του βαθμωτού πεδίου **ανά κατεύθυνση**. Προφανώς το εσωτερικό γινόμενο*

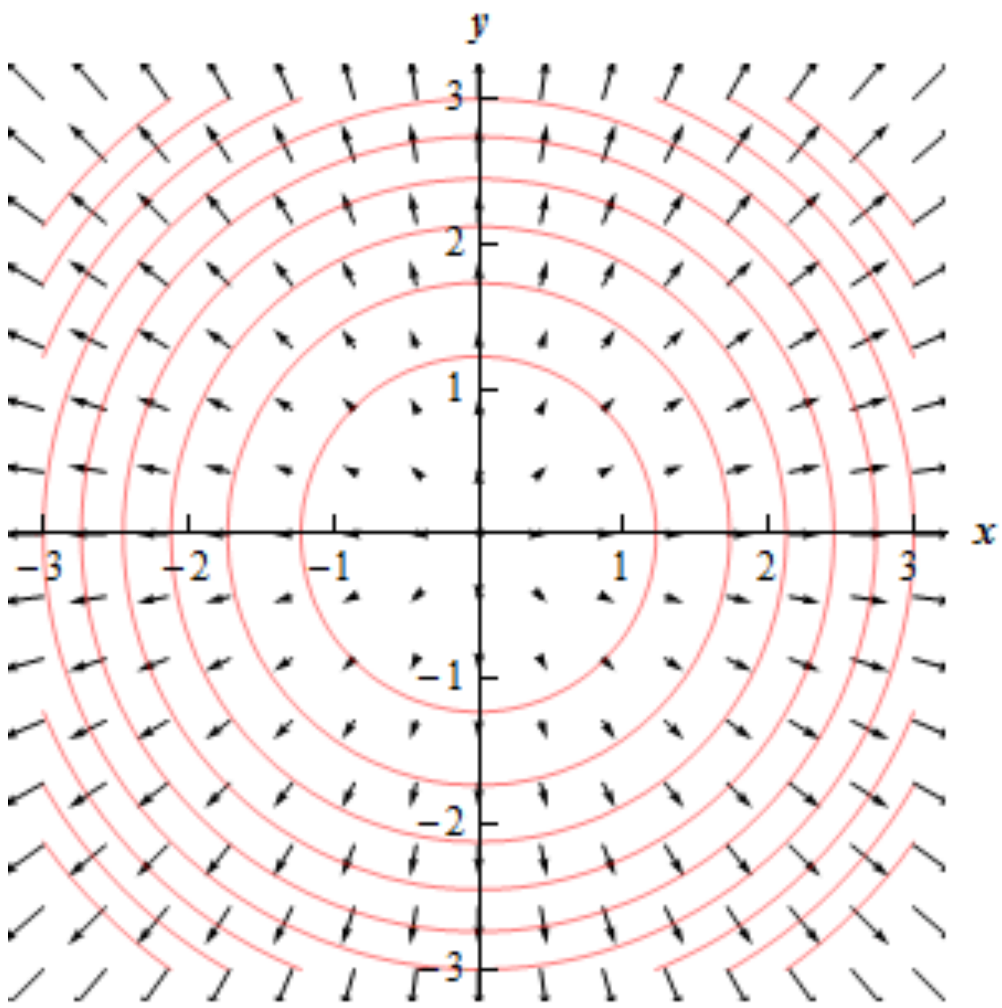
$$\boxed{\left(\vec{\nabla} f\right)\cdot \vec{e}}$$

*είναι το μέγεθος της παραγώγου (μεταβολή του πεδίου) ως προς την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος **e**.*



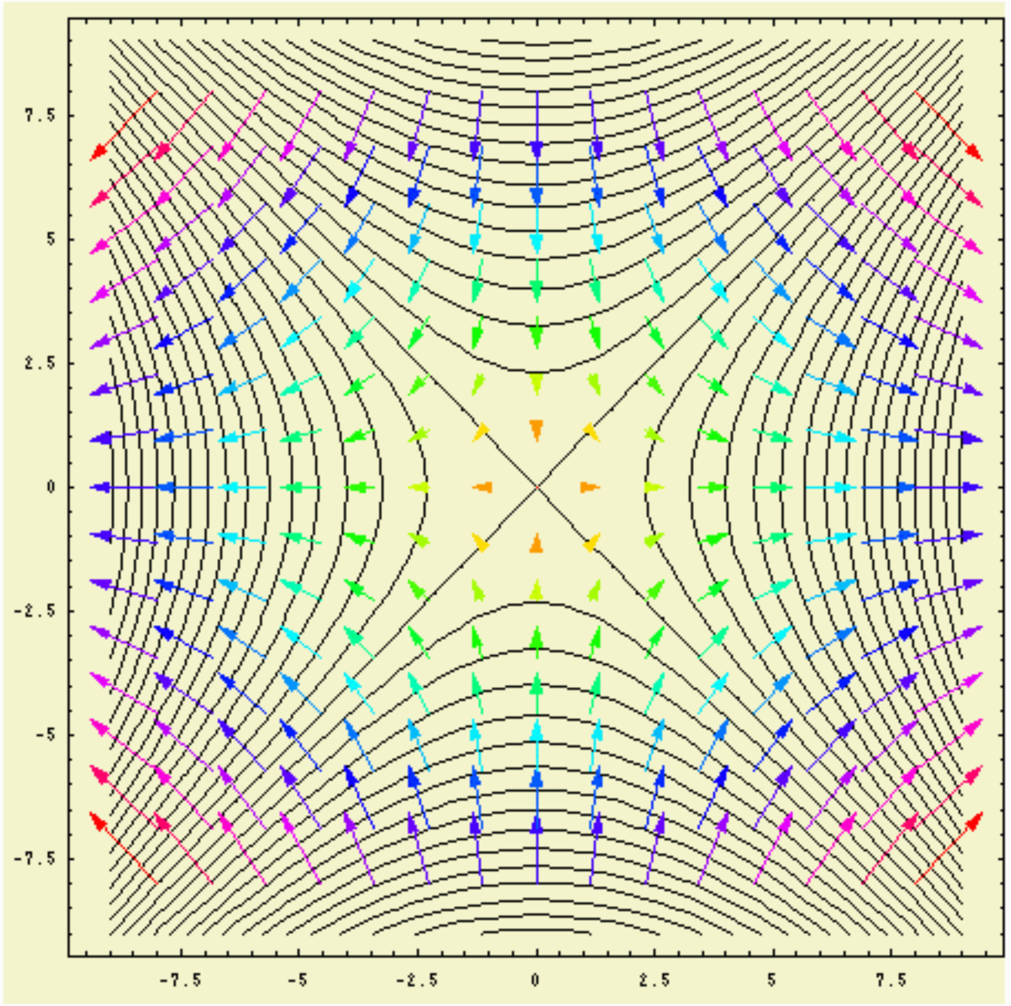
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\text{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$



$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\text{grad} f = \vec{\nabla} f = 2x\hat{i} + 2y\hat{j}$$

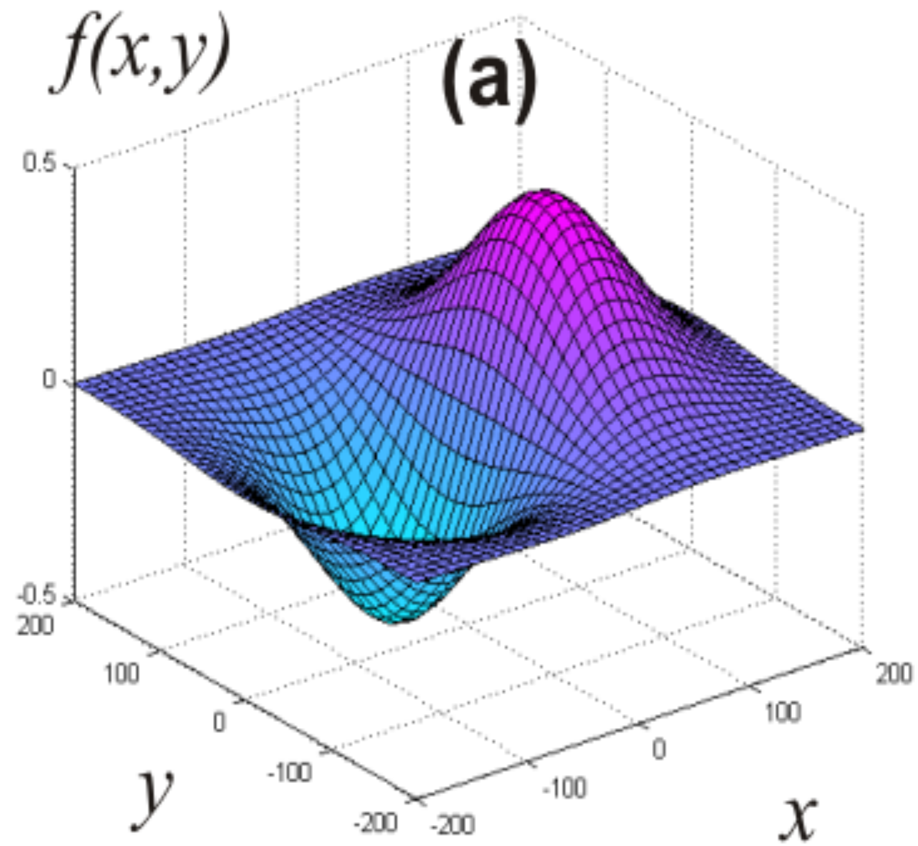


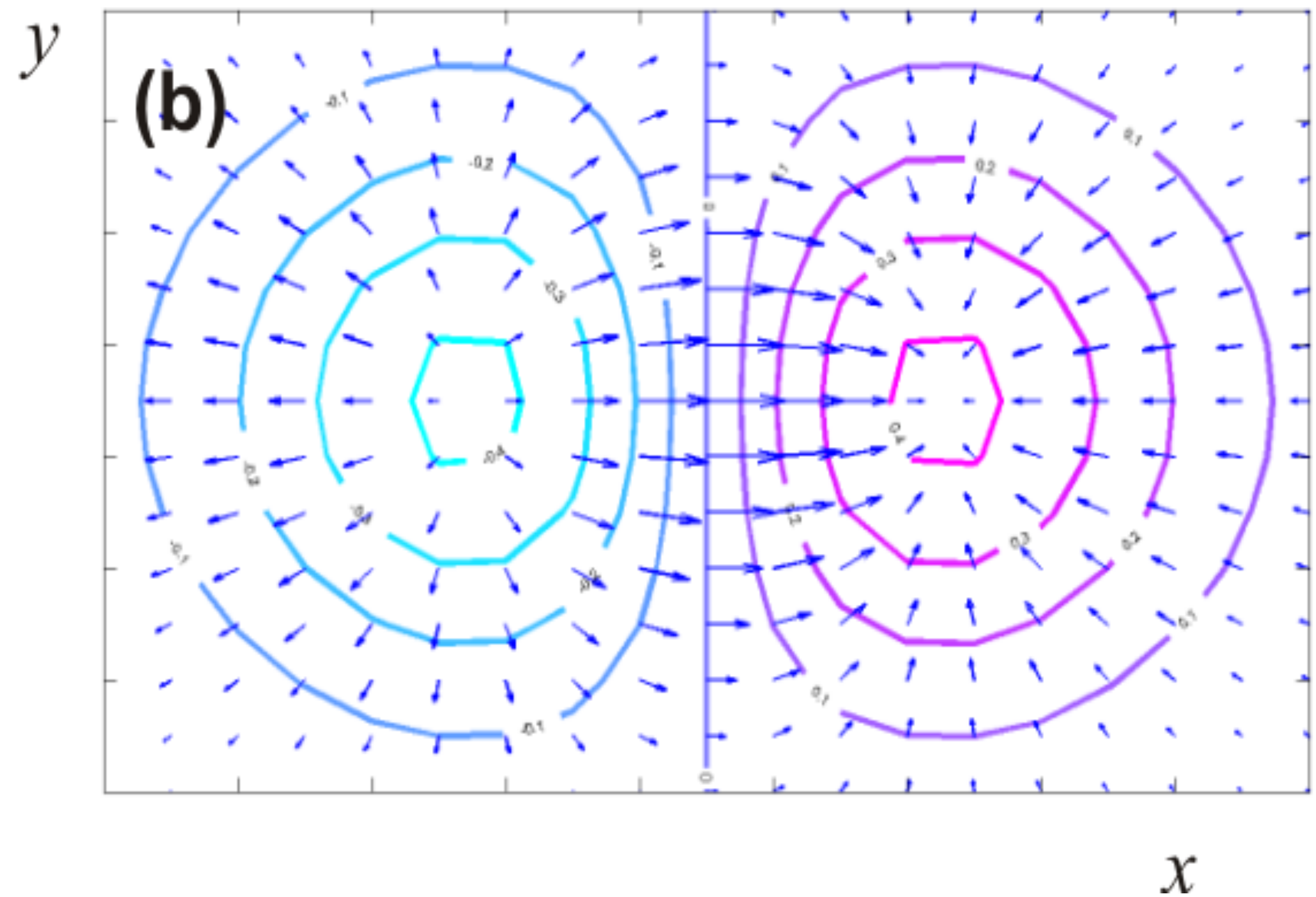
$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\text{grad} f = \vec{\nabla} f = 2x\hat{i} - 2y\hat{j}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\text{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$





27

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Παράδειγμα: η βαθμίδα της πολικής ακτίνας

$$f(x,y,z) = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}$$

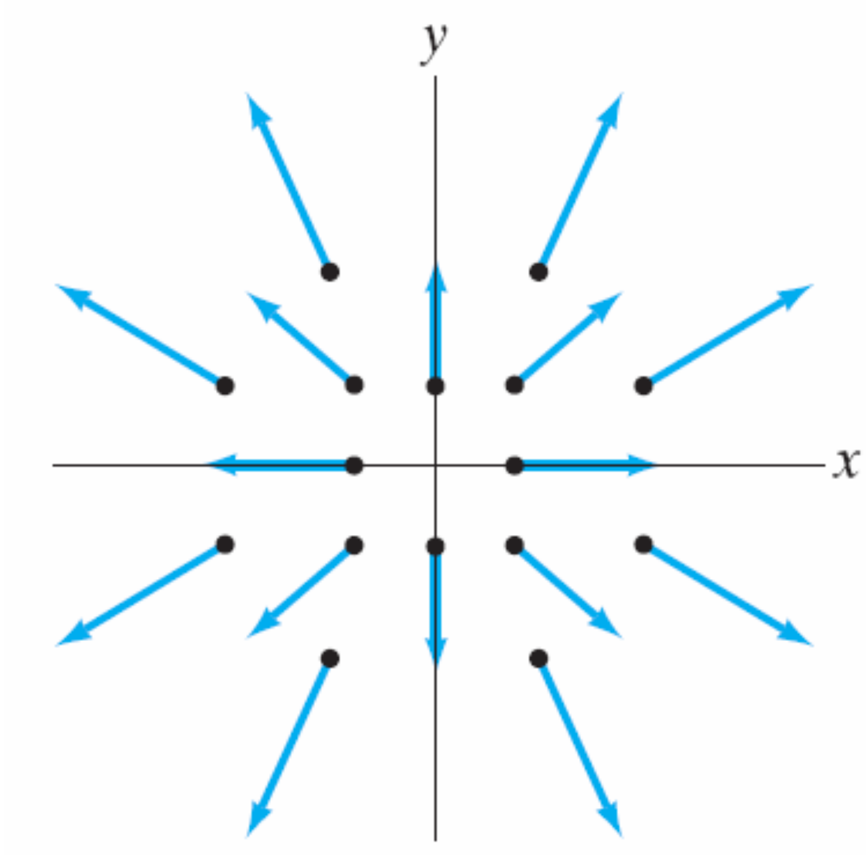
$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{i} + \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{j} + \frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{k}$$

$$= \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} r = \hat{r}}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\mathrm{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$



Παράδειγμα

$$\vec{F} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} \;\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

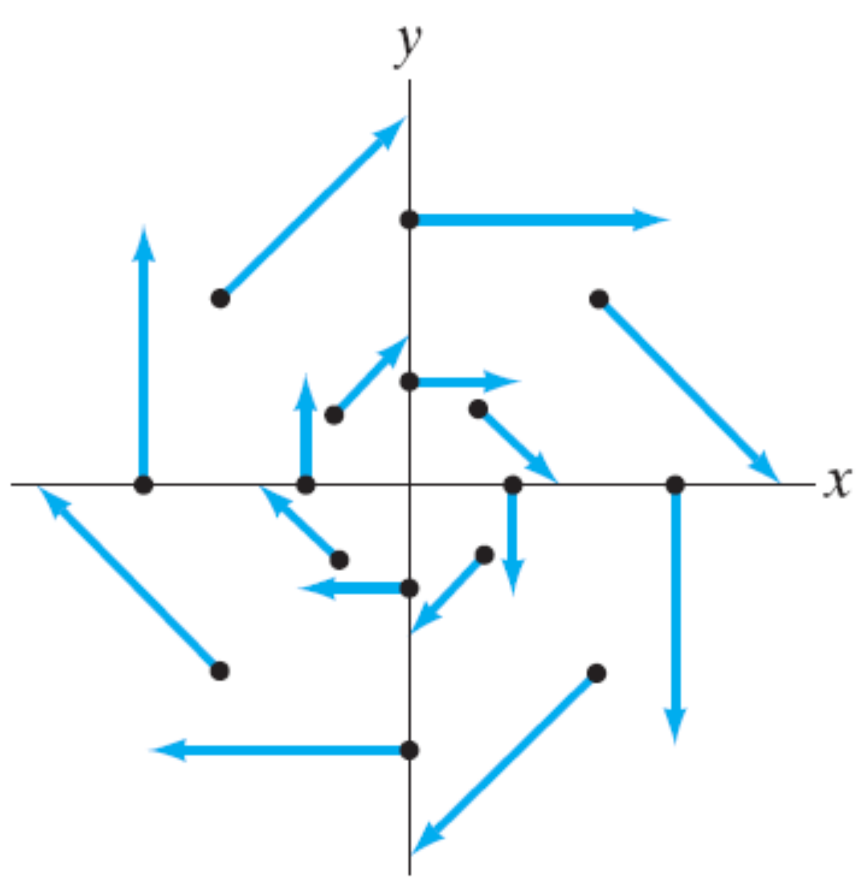
Η *απόκλιση (divergence)* ενός διανυσματικού πεδίου είναι βαθμωτό μέγεθος. Προσομοιώνει την ροή υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την ταχύτητα του ρευστού.

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε σταθερή (θετική) ροή (εκροή) σε κάθε σημείο του χώρου.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\mathrm{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$



Παράδειγμα

$$\vec{F} = y\,\hat{i} - x\,\hat{j} \;\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

Η *απόκλιση (divergence)* ενός διανυσματικού πεδίου είναι βαθμωτό μέγεθος. Προσομοιώνει την ροή υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την ταχύτητα του ρευστού.

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε μηδενική ροή σε κάθε σημείο του χώρου (το ρευστό μόνο στροβιλίζεται).

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Η *στροβιλισμός (curl)* ενός διανυσματικού πεδίου είναι διανυσματικό μέγεθος. Δείχνει τον στροβιλισμό υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την ταχύτητα του ρευστού.

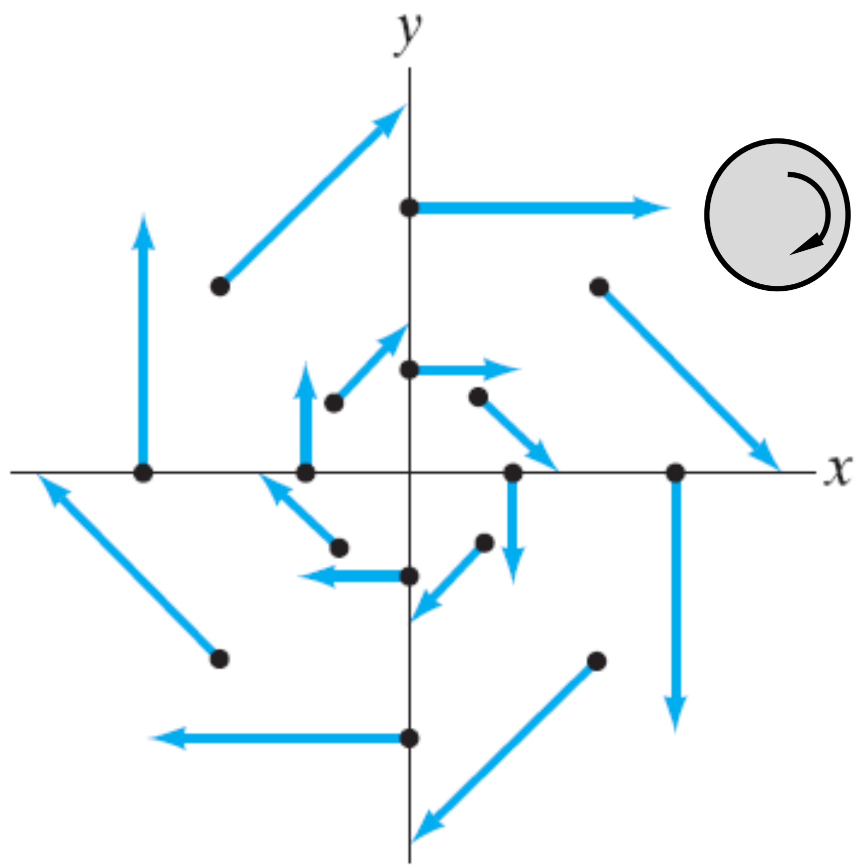
Όταν ένα διανυσματικό πεδίο έχει μηδενικό στροβιλισμό αποκαλείται αστρόβιλο πεδίο.

Ένας πρακτικός τρόπος για να βρεθεί ο στροβιλισμός ενός πεδίου σε κάποιο σημείο του είναι να μελετηθεί η στροφική κίνηση υποθετικού επίπεδου δίσκου φερόμενου στο σημείο αυτό.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$



Παράδειγμα

$$\vec{F} = y\,\hat{i} - x\,\hat{j}$$

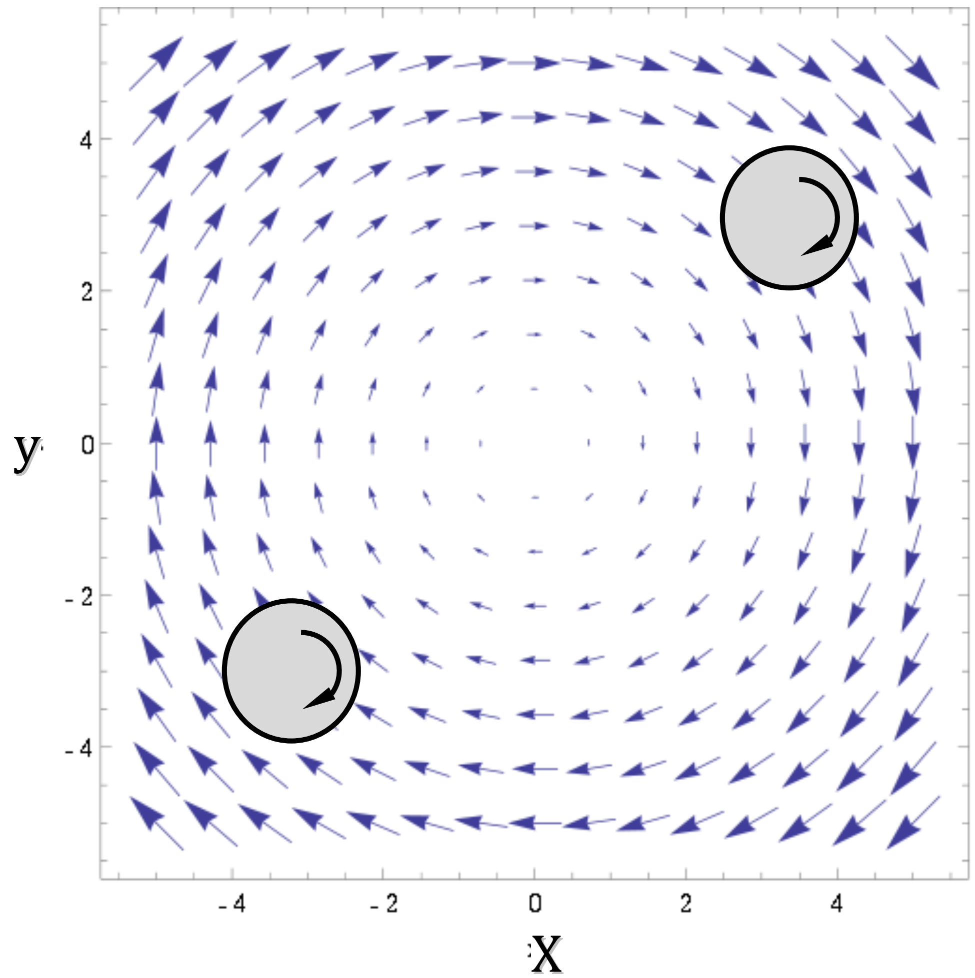
$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\hat{k}$$

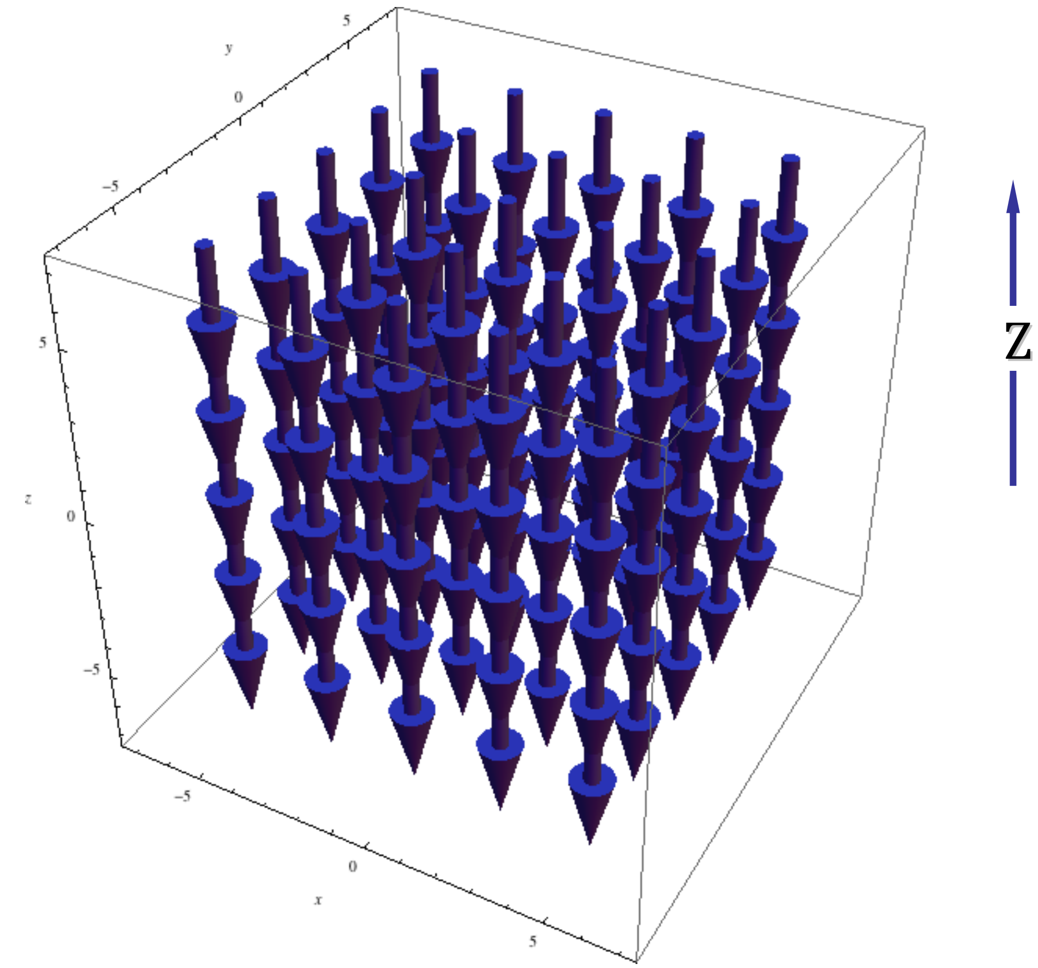
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{F} = y\,\hat{i} - x\,\hat{j}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = -2\hat{k}$$



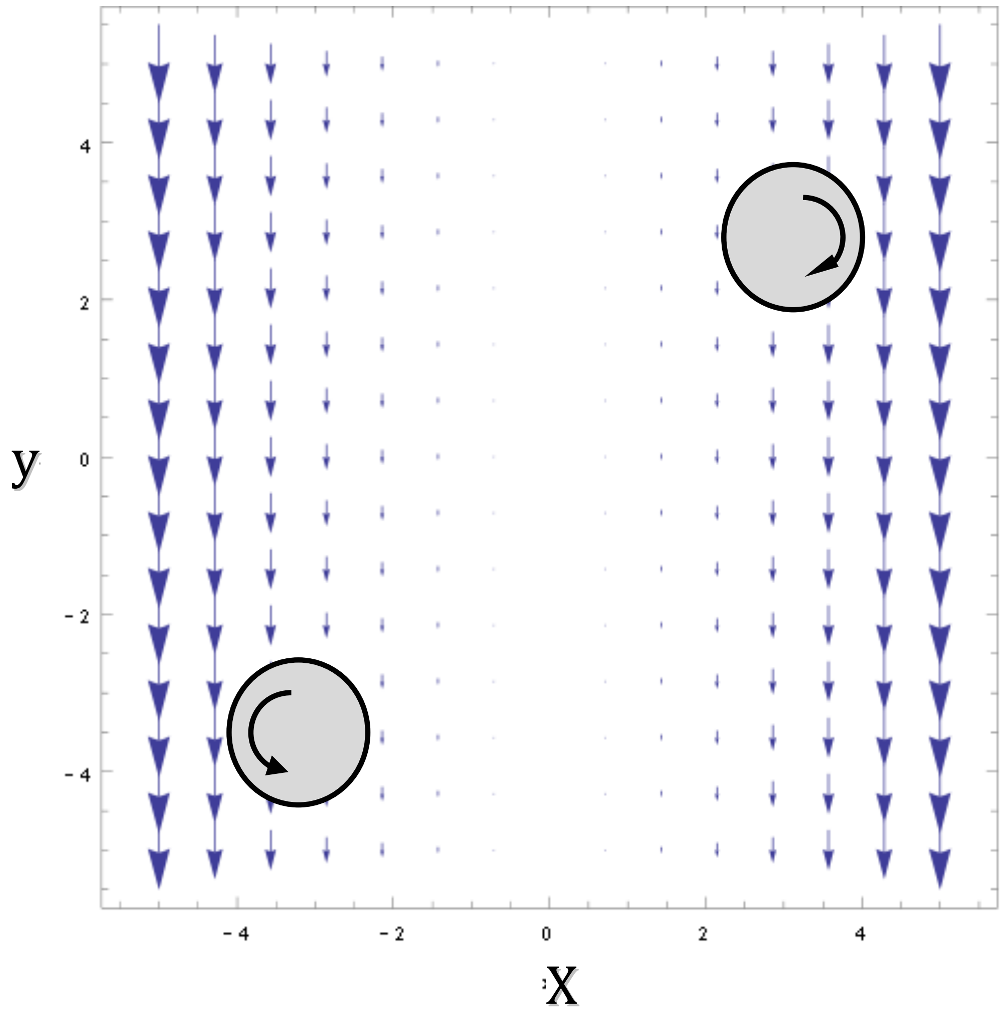


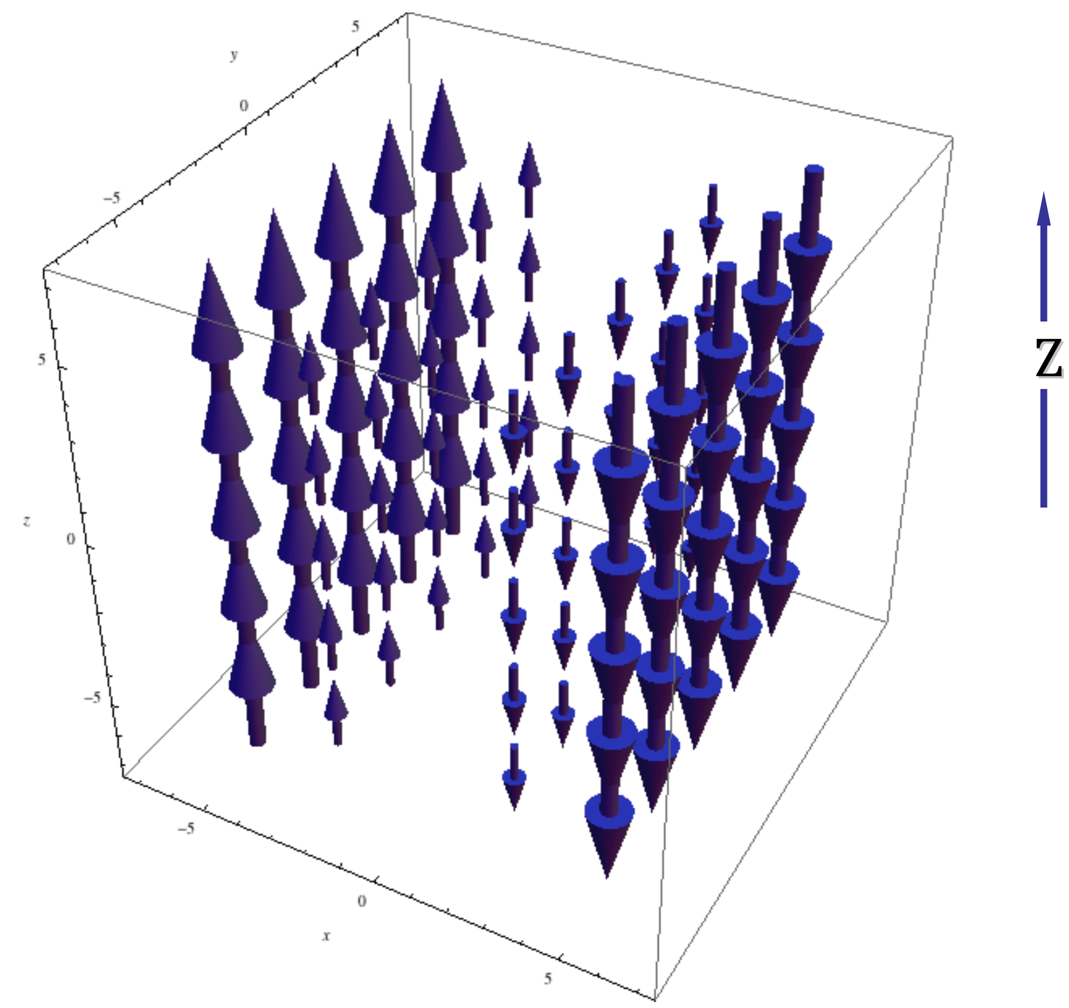
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{F} = -x^2\,\hat{j}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = -2x\,\hat{k}$$





ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}}$$

$$\boxed{\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}}$$

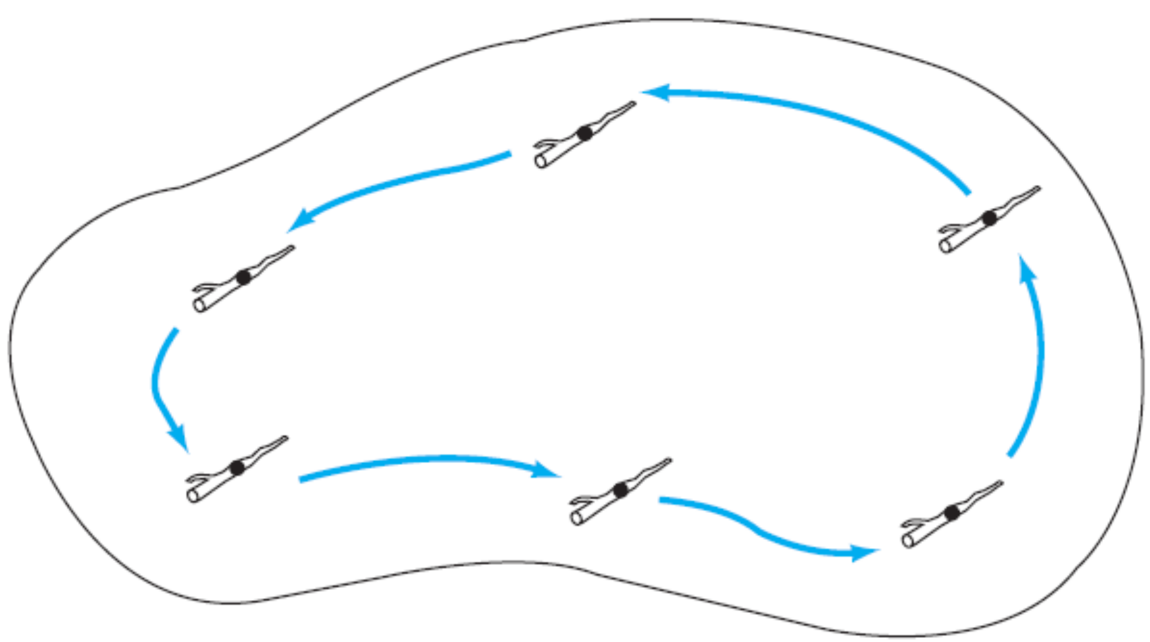
Αριθμητικό Παράδειγμα

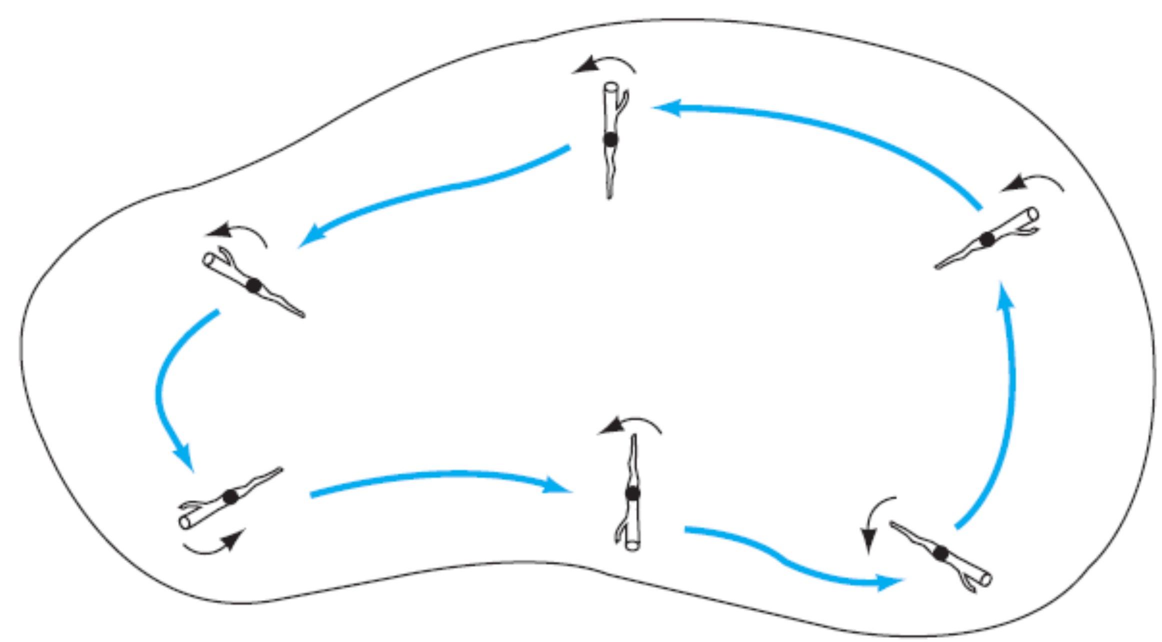
$$\vec{F} = x^2 y\,\hat{i} - 2xz\,\hat{j} + (x + y - z)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & -2xz & x + y - z \end{vmatrix} = (2x+1)\hat{i} - \hat{j} - (x^2 + 2z)\hat{k}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Σχηματικό παράδειγμα κίνησης ενός κλαδιού δέντρου στο υδάτινο ρεύμα μιας λίμνης. Το κλαδί ακολουθεί την πορεία που καθορίζει το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού στην επιφάνεια της λίμνης. Εάν ο προσανατολισμός του κλαδιού δεν αλλάζει (αριστερά), τότε δεν υπάρχει στροβιλισμός στο πεδίο των ταχυτήτων (curl**F**=**0**). Στην αντίθετη περίπτωση ύπαρξης στροβιλισμού (δεξιά), το κλαδί πέραν από την μεταφορική εκτελεί και περιστροφική κίνηση.





$\boxed{\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{0}}$

$\boxed{\mathrm{curl}\vec{F} \neq \vec{0}}$

ΔΕΥΤΕΡΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Απόκλιση βαθμίδας (**λαπλασιανή**):

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{v} = \left(\nabla^2 v_x\right)\hat{i} + \left(\nabla^2 v_y\right)\hat{j} + \left(\nabla^2 v_z\right)\hat{k}}$$

Στροβιλισμός βαθμίδας :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \equiv \vec{0}}$$

Βαθμίδα απόκλισης :

$$\boxed{\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right) \neq \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} = \nabla^2 \vec{v}}$$

Απόκλιση στροβιλισμού :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) \equiv 0}$$

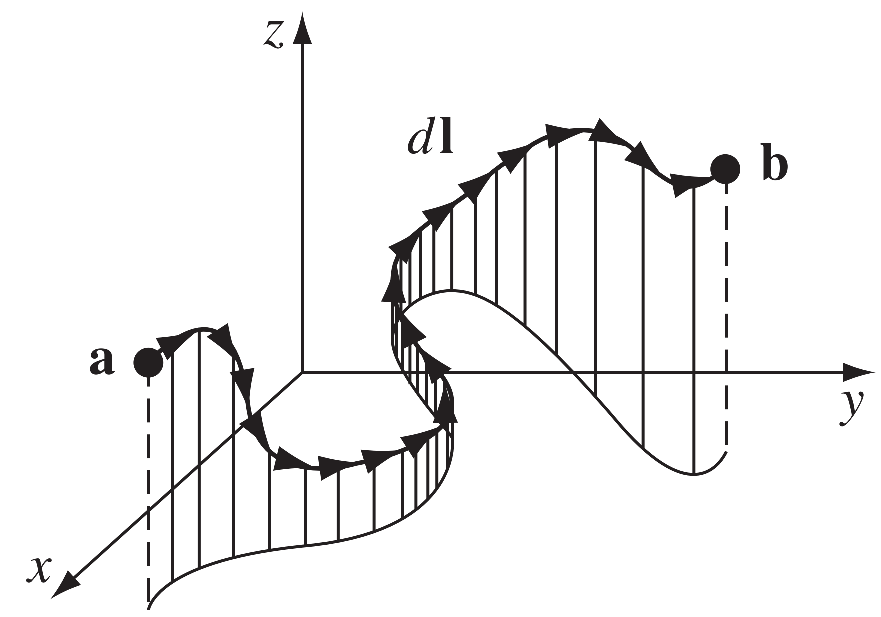
Στροβιλισμός στροβιλισμού :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right) - \nabla^2 \vec{v}}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{v}(\vec{r}) = v_x(x, y, z)\hat{i} + v_y(x, y, z)\hat{j} + v_z(x, y, z)\hat{k}$ είναι ένας **αριθμός** :

$$\boxed{\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{v} \cdot d\vec{l}}$$



Όταν τα όρια της ολοκλήρωσης, με διανύσματα θέσης $\vec{a}$ και $\vec{b}$, συμπίπτουν ενώ η διαδρομή ολοκλήρωσης C παραμένει πεπερασμένη, το ολοκλήρωμα λέγεται ‘κλειστό’ ή ‘ολοκλήρωμα βρόχου’ που λέγεται ***κυκλοφορία*** του πεδίου πάνω στην κλειστή καμπύλη C

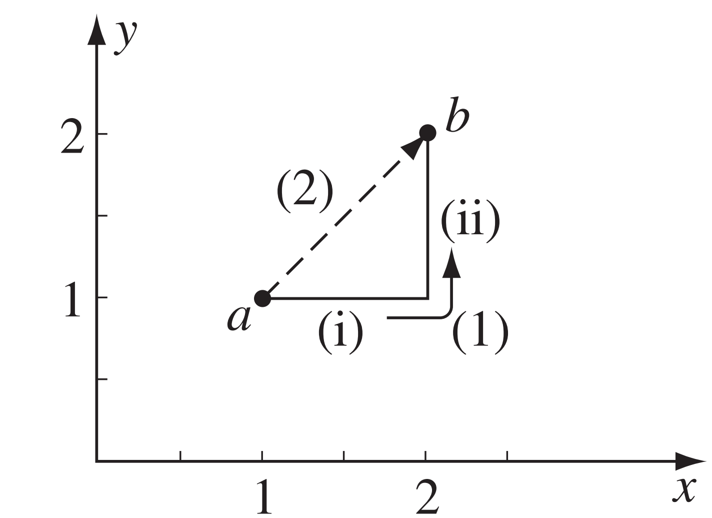
$$\boxed{\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}}$$

$$\boxed{d\vec{l} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Παράδειγμα: επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σε δύο διαφορετικές διαδρομές

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα του πεδίου $\vec{v} = y^2\hat{i} + 2x(y+1)\hat{j}$ από το σημείο $\vec{a} = (1,1,0)$ μέχρι το $\vec{b} = (2,2,0)$ κατά μήκος των διαδρομών (1) και (2) του σχήματος



Χωρίζουμε τη διαδρομή (1) σε δύο τμήματα (i) και (ii) :

(i) $\left.\begin{array}{l} d\vec{l} = dx\,\hat{i} \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}\cdot d\vec{l} = y^2 dx = dx \Rightarrow \int_{(i)} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_1^2 dx = 1$

(ii) $\left.\begin{array}{l} d\vec{l} = dy\,\hat{j} \\ x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}\cdot d\vec{l} = 4(y+1)dy \Rightarrow \int_{(ii)} \vec{v}\cdot d\vec{l} = 4\int_1^2 (y+1)dy = 10$

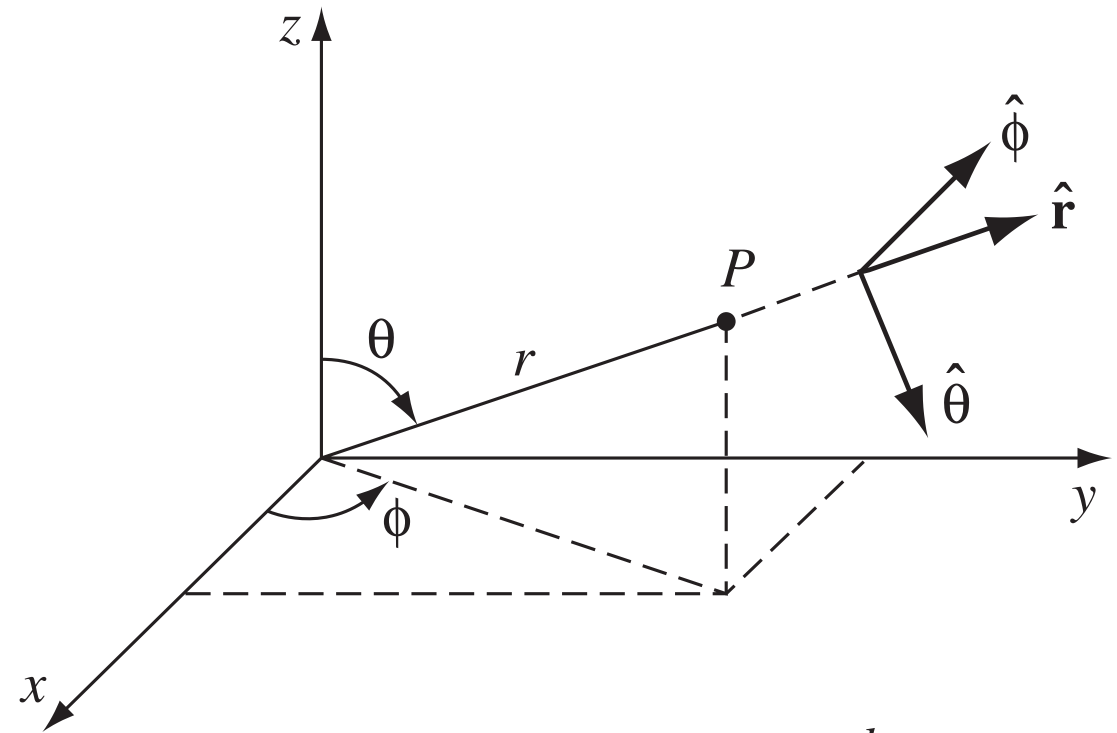
$$\Rightarrow \int_{(1)} \vec{v}\cdot d\vec{l} = 11$$

Στη διαδρομή (2) $x = y \Rightarrow dx = dy \Rightarrow d\vec{l} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} \Rightarrow$

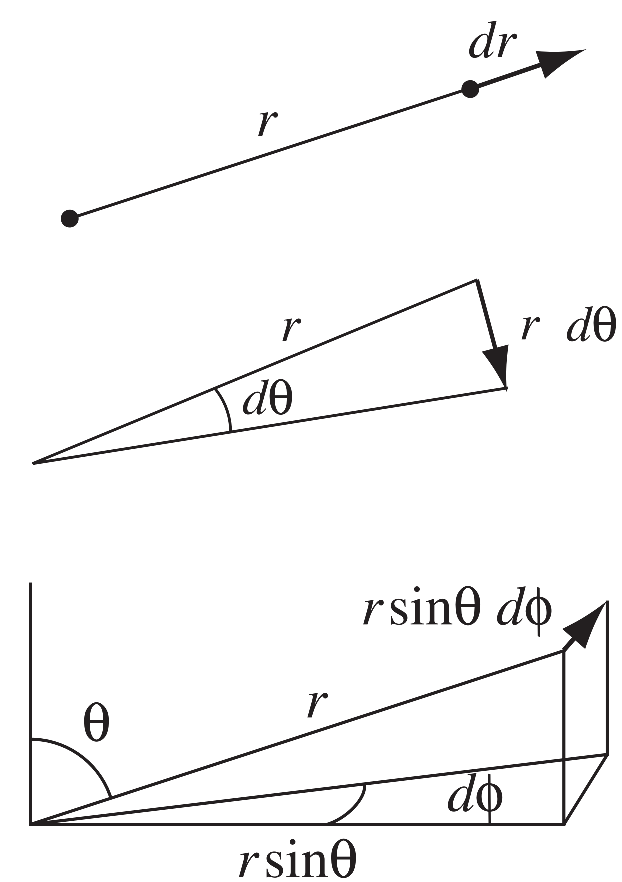
$$\Rightarrow \int_{(2)} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_1^2 (3x^2 + 2x)dx = (x^3 + x^2)\Big|_1^2 = 10 \Rightarrow \boxed{\oint_{(1)+(-2)} \vec{v}\cdot d\vec{l} = 11 - 10 = 1 \neq 0}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ορίζουμε ορθογώνια μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα εφαπτόμενα στις διευθύνσεις κατά τις οποίες μεταβάλλονται οι αντίστοιχες συντεταγμένες. Αντίθετα με το καρτεσιανό σύστημα μοναδιαίων διανυσμάτων, το καμπυλόγραμμο αλλάζει από σημείο σε σημείο του χώρου

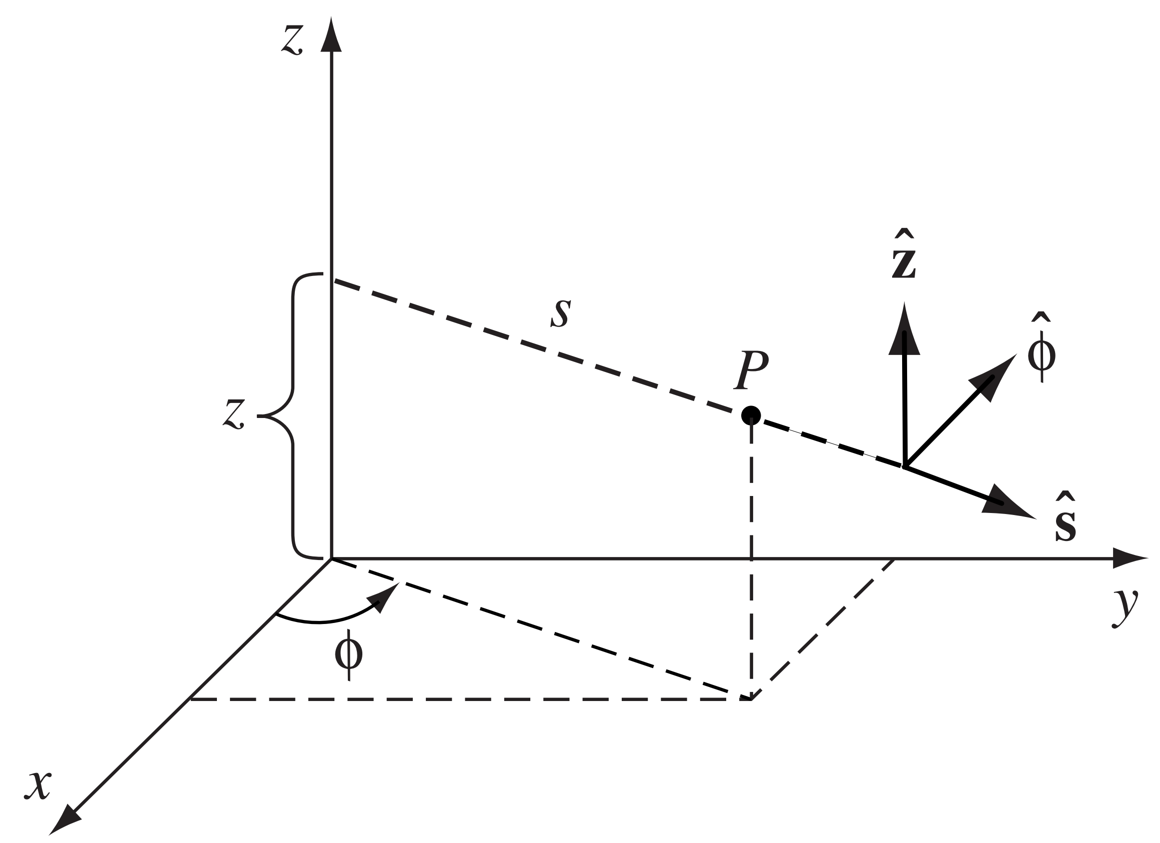


Το στοιχείο επικαμπύλιας ολοκλήρωσης $\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}}$ μπορεί τότε να εκφραστεί σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες αναλύοντάς το στα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα, π.χ. σε σφαιρικές :



$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}} = \mathrm{dl_r}\hat{\mathrm{r}} + \mathrm{dl}_\theta\hat{\theta} + \mathrm{dl}_\phi\hat{\phi} = \mathrm{dr}\,\hat{\mathrm{r}} + \mathrm{rd}\theta\,\hat{\theta} + \mathrm{r}\sin\theta\mathrm{d}\phi\,\hat{\phi}}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

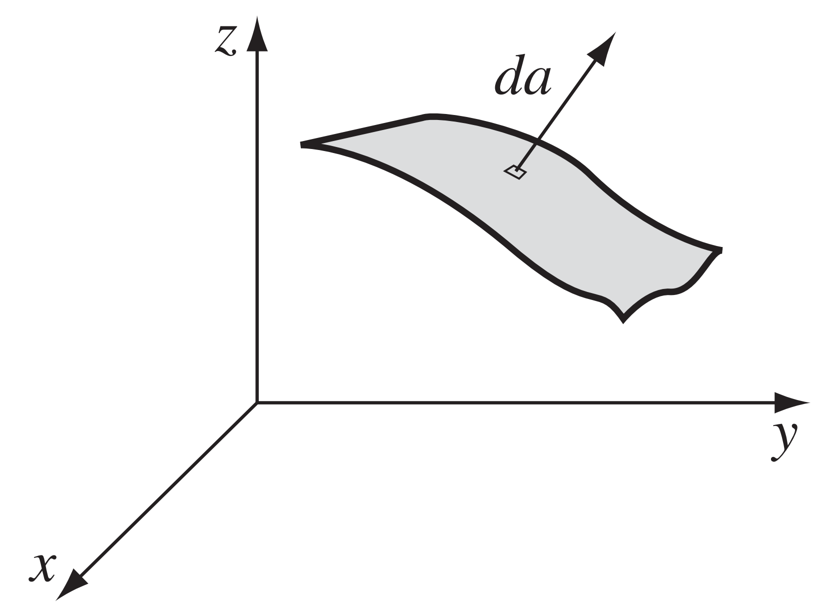


Στοιχείο επικαμπύλιας ολοκλήρωσης $d\vec{l}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες :

$$\boxed{d\vec{l} = dl_s\hat{s} + dl_\phi\hat{\phi} + dl_z\hat{z} = ds\,\hat{s} + s d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Στο επιφανειακό ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου τα όρια ολοκλήρωσης είναι όλα τα σημεία του συνόρου της επιφάνειας ολοκλήρωσης S και το αποτέλεσμα είναι ένας **αριθμός** που λέγεται ***ροή*** του πεδίου μέσα από την S:



$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int_S v_x da_x + \int_S v_y da_y + \int_S v_z da_z$$

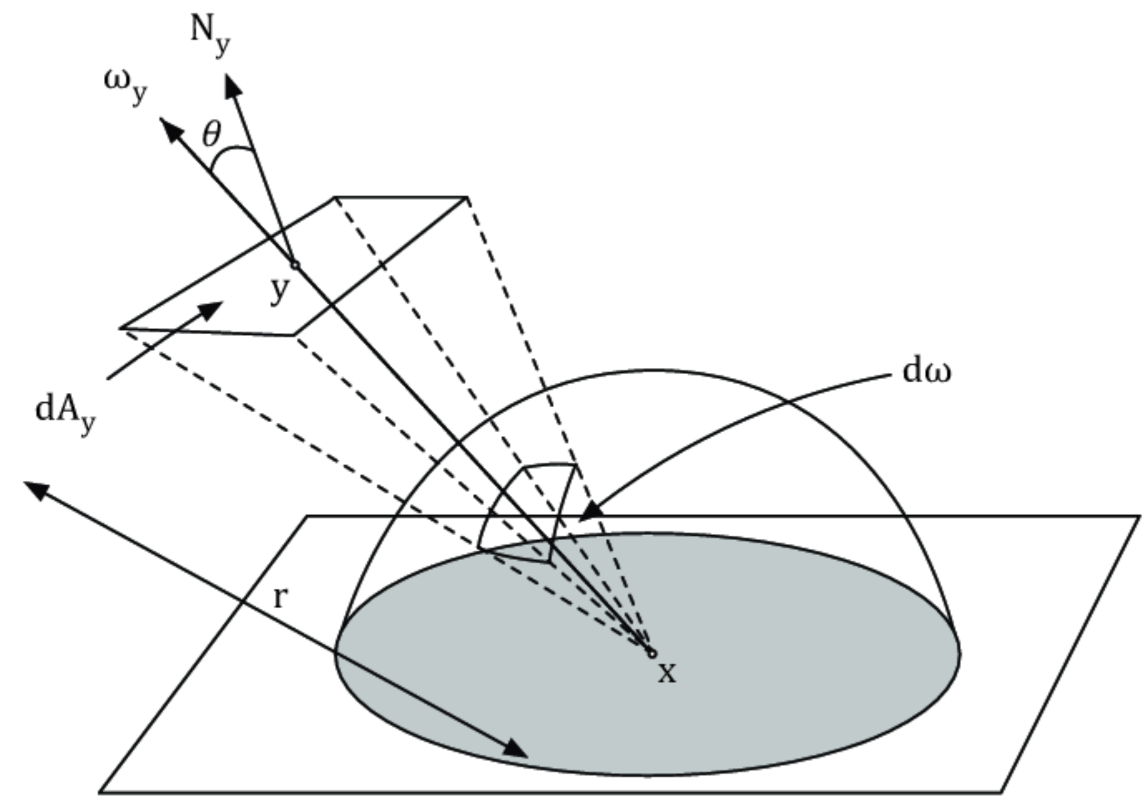
Όταν η επιφάνεια S της ολοκλήρωσης είναι κλειστή, το ολοκλήρωμα λέγεται 'κλειστό'

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Ορισμός στερεάς γωνίας :

$$\boxed{d\Omega \equiv \frac{\hat{r}\cdot d\vec{a}}{r^2} = \frac{\cos\theta\, da}{r^2}}$$



Παίρνοντας το στοιχείο επιφάνειας πάνω σε μια σφαίρα ακτίνας r :

$$d\Omega = \frac{da}{r^2} = \frac{dl_\theta \cdot dl_\phi}{r^2} = \frac{r d\theta \cdot r\sin\theta d\phi}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi}$$

dω : διαφορική στερεά γωνία με κορυφή το σημείο x

dA_y : διαφορική επιφάνεια στο σημείο y

r : απόσταση του y από το x

ω_y : διάνυσμα κατεύθυνσης από το x στο y

N_y : διάνυσμα κατεύθυνσης κάθετο στην επιφάνεια dA_y

$$\Omega = \int \frac{da}{r^2} = \frac{1}{r^2}4\pi r^2 = 4\pi \quad \textit{στερακτίνια}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Στο χωρικό ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου τα όρια ολοκλήρωσης είναι όλα τα σημεία της επιφάνειας που περικλείνει τον όγκο ολοκλήρωσης V και το αποτέλεσμα είναι ένα **διάνυσμα** :

$$\boxed{\int_V \vec{v}\,d\tau = \int_V \left(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}\right) d\tau = \int_V v_x d\tau\ \hat{i} + \int_V v_y d\tau\ \hat{j} + \int_V v_z d\tau\ \hat{k}}$$

όπου $\boxed{d\tau = dx\,dy\,dz}$

Το ολοκλήρωμα μιας συνιστώσας, π.χ. $\boxed{\int_V v_x d\tau = \iiint\limits_V v_x(x,y,z)dxdydz}$ είναι το τριπλό ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης στον τρισδιάστατο χώρο

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Στοιχείο όγκου σε σφαιρικές συντεταγμένες : $d\tau = dl_r dl_\theta dl_\phi = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

Στοιχείο όγκου σε κυλινδρικές συντεταγμένες : $d\tau = dl_r dl_\phi dl_z = r \, dr \, d\phi \, dz$

Παράδειγμα: υπολογισμός του όγκου σφαίρας ακτίνας R σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$V = \int d\tau = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

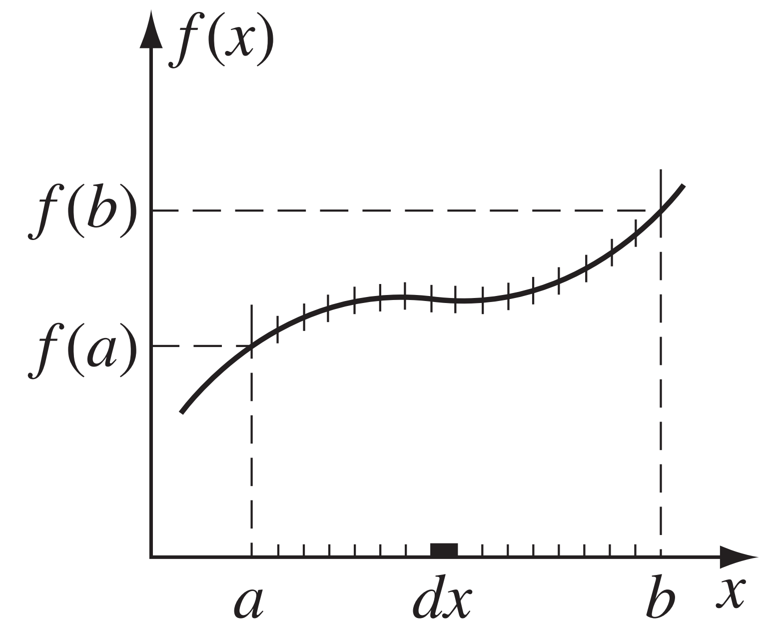
$$= \left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right)$$

$$= \left(\frac{R^3}{3} \right) (2) \, (2\pi) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

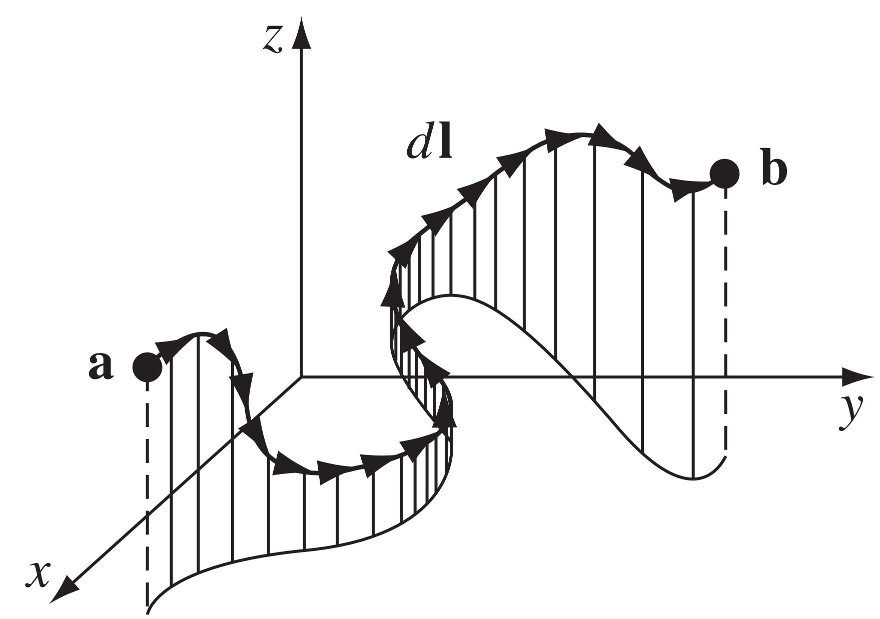
Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού σε μία και σε τρεις διαστάσεις

Όταν ολοκληρώνουμε την παράγωγο μιας απλής συνάρτησης f(x), προσθέτουμε απειροστές μεταβολές της df που προκύπτουν από απειροστές μεταβολές dx της ανεξάρτητης μεταβλητής, οπότε το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι απλά η συνολική μεταβολή της f(x) από το κάτω στο επάνω όριο :



$$\int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a)$$

Το ίδιο ισχύει και όταν ολοκληρώνουμε την παράγωγο (βαθμίδα) μιας βαθμωτής συνάρτησης F(x, y, z) στο χώρο:



$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{\nabla} F \cdot d\vec{l} = F(\vec{b}) - F(\vec{a})$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

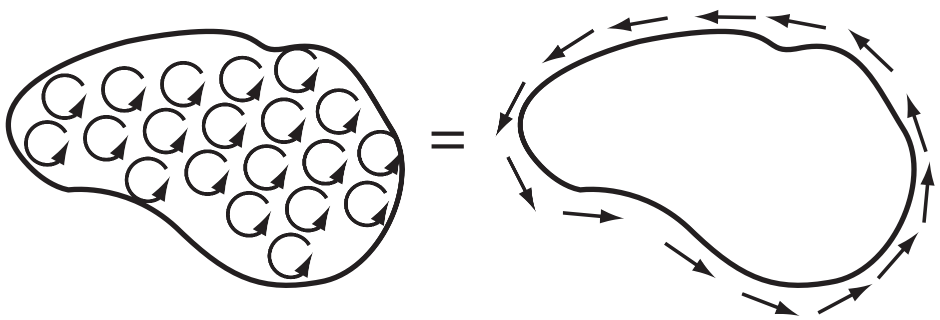
Γενίκευση του θεμελιώδους θεωρήματος σε διανυσματικά πεδία

Θεώρημα Gauss : Το ολοκλήρωμα της απόκλισης ενός διανυσματικού πεδίου πάνω σε έναν όγκο ισούται με τη ροή του πεδίου μέσα από την επιφάνεια που περικλείνει τον όγκο

$$\boxed{\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) d\tau = \oint_S \vec{v}\cdot d\vec{a}}$$

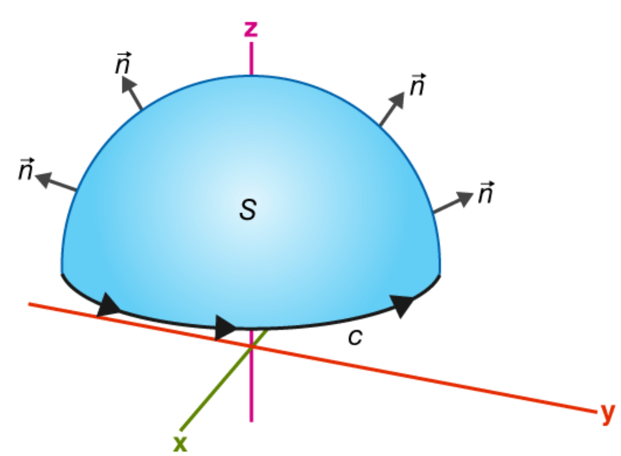
Θεώρημα Stokes : Η ροή του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου μέσα από μια επιφάνεια ισούται με την κυκλοφορία του πεδίου πάνω στο σύνορο της επιφάνειας

$$\boxed{\int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{v}\cdot d\vec{l}}$$



Πορίσματα :

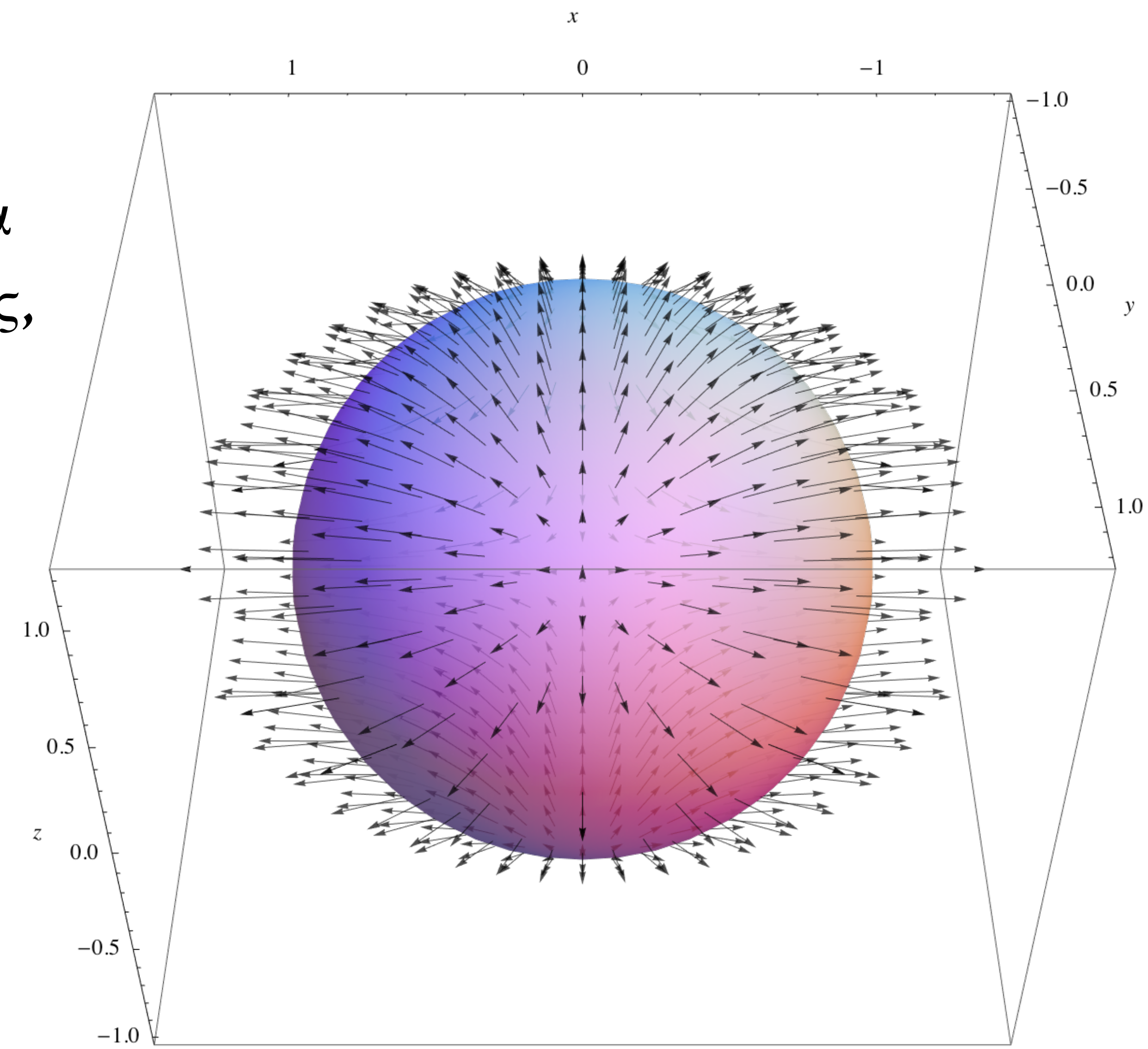
1. Η ροή του στροβιλισμού δεν εξαρτάται από την επιφάνεια ροής αλλά μόνο από το σύνορό της
2. Η ροή του στροβιλισμού μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι πάντα μηδέν



ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Παράδειγμα: εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss

Το ολοκλήρωμα $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{a}$ του πεδίου $\vec{F} = 2x\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ πάνω στη μοναδιαία σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ υπολογίζεται δύσκολα απευθείας, εύκολα εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss :



$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) d\tau = 2\int_V (1 + y + z)\, d\tau$$

$$= 2\int_V d\tau + 2\underbrace{\int_V y d\tau}_{0} + 2\underbrace{\int_V z d\tau}_{0}$$

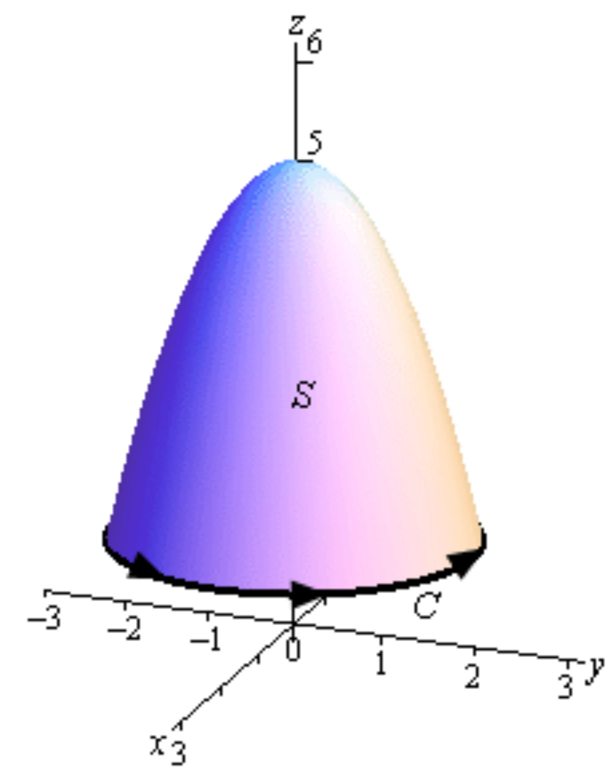
$$= 2\frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

επειδή το y και το z παίρνουν θετικές και αρνητικές τιμές μέσα στη σφαίρα συμμετρικά στα ημισφαίρια $y > 0,\ y < 0$ και $z > 0,\ z < 0$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Παράδειγμα: εφαρμογή του θεωρήματος του Stokes

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_S \mathrm{curl}\,\vec{F}\cdot d\vec{a}$ του πεδίου $\vec{F} = z^2\hat{i} - 3xy\hat{j} + x^3y^3\hat{k}$ πάνω στην επιφάνεια S που ορίζεται από τη σχέση $z = 5 - x^2 - y^2,\ \ z > 1$ εφαρμόζοντας το θεώρημα του Stokes στο σύνορο της S, που είναι η τομή του παραβολοειδούς $z = 5 - x^2 - y^2$ με το επίπεδο $z = 1$, δηλαδή ο κύκλος C με εξίσωση $1 = 5 - x^2 - y^2 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 4$.
Χρησιμοποιούμε την παραμετρική εξίσωση αυτού του κύκλου:



$$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\hat{i} + 2\sin t\,\hat{j} + \hat{k},\quad 0 \le t < 2\pi$$

$$\Rightarrow\quad d\vec{r}(t) = 2(-\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j})dt$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = 1^2\hat{i} - 3(2\cos t)(2\sin t)\hat{j} + (2\cos t)^3(2\sin t)^3\hat{k} = \hat{i} - 12\cos t\sin t\,\hat{j} + 64(\cos t\sin t)^3\hat{k}$$

$$\int_S \mathrm{curl}\,\vec{F}\cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\Big(-2\sin t\,dt - 24\cos^2 t\,\underbrace{\sin t\,dt}_{-d(\cos t)}\Big) = \left(2\cos t + 8\cos^3 t\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$