Να υπολογιστεί η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την παράπλευρη επιφάνεια ενός ορθού κυλίνδρου που έχει ύψος L και ακτίνα a και που προέρχεται από ένα σημειακό φορτίο q τοποθετημένο στον άξονα του κυλίνδρου. Οι αποστάσεις του σημειακού φορτίου από την πάνω και κάτω βάση του κυλίνδρου είναι L_1 και L_2 αντίστοιχα ($L = L_1 + L_2$).

ΛΥΣΗ: Το στοιχειώδες εμβαδό $d\mathbf{S}$ στο σημείο $\mathrm{P}(a, \varphi, z)$ της παράπλευρης επιφάνειας έχει, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, την έκφραση

$$d\mathbf{S} = a d\varphi dz \boldsymbol{\rho}_0 \tag{1}$$

όπου $\boldsymbol{\rho}_0$ το μοναδιαίο, κάθετο στην $d\mathbf{S}$, ακτινικό διάνυσμα.

Επίσης, αν $\mathbf{R}$ είναι η επιβατική ακτίνα από τη θέση του φορτίου q, μέχρι το σημείο P, η διηλεκτρική μετατόπιση $\mathbf{D}$ στο σημείο αυτό είναι

$$\mathbf{D} = \frac{q\mathbf{R}_0}{4\pi R^2} \tag{2}$$

όπου $\mathbf{R}_0$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{R}$.

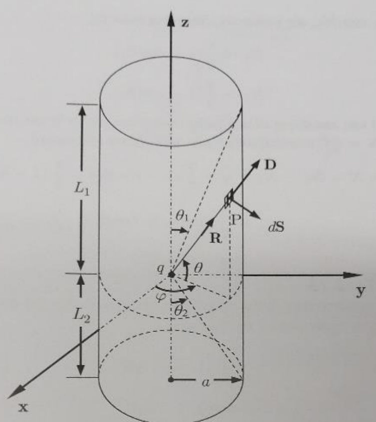
Έτσι, αν S_π είναι η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, η ζητούμενη ροή N_π είναι

$$N_\pi = \iint_{S_\pi} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{qa}{4\pi} \int_{-L_2}^{L_1} \int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{R}_0}{R^2} d\varphi dz. \tag{3}$$

Η (3), επειδή όπως εύκολα φαίνεται από τις σχέσεις

$$\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{R}_0 = \cos\theta, \tag{4}$$

$$z = a\tan\theta, \tag{5}$$



ΣΧΗΜΑ 2.20

$$dz = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta, \tag{6}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{R}, \tag{7}$$

γράφεται

$$N_\pi = \int_{-(\pi/2-\theta_2)}^{\pi/2-\theta_1} \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi} \cos\theta d\varphi d\theta = \frac{q}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)\right], \tag{8}$$

δηλαδή

$$N_\pi = \frac{q}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2). \tag{9}$$

Ένας συντομότερος τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι ο εξής:

Αν N_1 και N_2 είναι οι ροές που διέρχονται από την πάνω και κάτω βάση του κυλίνδρου, αντίστοιχα, τότε, η ολική ροή N δια της εξωτερικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι

$$N = N_1 + N_2 + N_\pi. \tag{10}$$

Οι ροές όμως N_1 και N_2, ως γνωστόν, δίνονται από τις

$$N_1 = \frac{q}{2}(1 - \cos\theta_1), \tag{11}$$

$$N_2 = \frac{q}{2}(1 - \cos\theta_2). \tag{12}$$

Από τις (10)-(12) και επειδή η ολική ροή, σύμφωνα με το νόμο του Gauss, είναι ίση με το φορτίο q ($N = q$), καταλήγουμε και πάλι στην (8), αφού

$$\begin{aligned} N_\pi = N - N_1 - N_2 &= q - \frac{q}{2}(1 - \cos\theta_1) - \frac{q}{2}(1 - \cos\theta_2) \\ &= \frac{q}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2). \end{aligned} \tag{13}$$