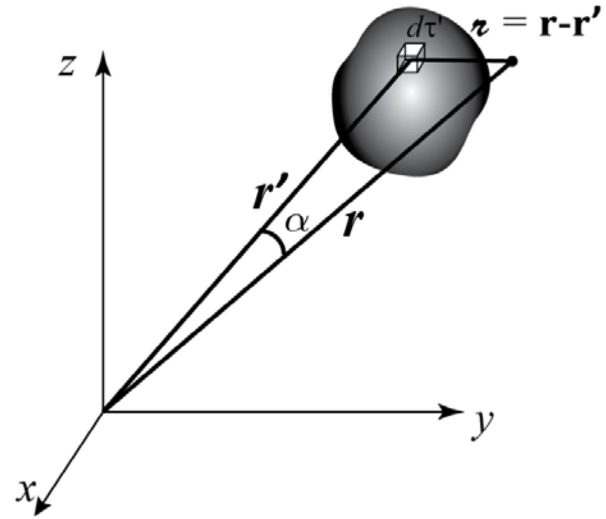
Multipole Expansion (Few comments)

$$V(\mathbf{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int \rho(\mathbf{r}')d\tau'}_{\substack{\text{Monopole potential} \\ (\,1/r \text{ dependence})}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\int r'(\cos\alpha)\rho(\mathbf{r}')d\tau'}_{\substack{\text{Dipole potential} \\ (\,1/r^2 \text{ dependence})}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\int (r')^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right)\rho(\mathbf{r}')d\tau'}_{\substack{\text{Quadrupole potential} \\ (\,1/r^3 \text{ dependence})}} + \cdots$$

- **It is an exact expression, not an approximation.**
- **A particular term in the expansion is defined by its r dependence**
- **At large r, the potential can be approximated by the first non-zero term.**
- **More terms can be added if greater accuracy is required**

Questions 1:

Q: In this following configuration, is the "large **r**" limit valid, since the source dimensions are much smaller than **r**?



Ans: No. The "large **r**" limit essentially mean $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$. In majority of the situations, the charge distribution is centered at the origin and therefore the "large **r**" limit is the same as source dimension being smaller than **r**.

Multipole Expansion (Monopole and Dipole terms)

Monopole term:

$$V_{\text{mono}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\int \rho(\mathbf{r}')d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

- $Q = \int \rho(\mathbf{r}')d\tau'$ is the total charge
- If $Q = 0$, monopole term is zero.
- For a collection of point charges

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Dipole term:

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r'(\cos\alpha)\rho(\mathbf{r}')d\tau'$$

α is the angle between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$.

So, $r'(\cos\alpha) = \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot\int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')d\tau'$$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

- $\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')d\tau'$ is called the dipole moment of a charge distribution
- If $\mathbf{p} = 0$, dipole term is zero.
- For a collection of point charges.

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i}' q_i$$

Multipole Expansion (Monopole and Dipole terms)

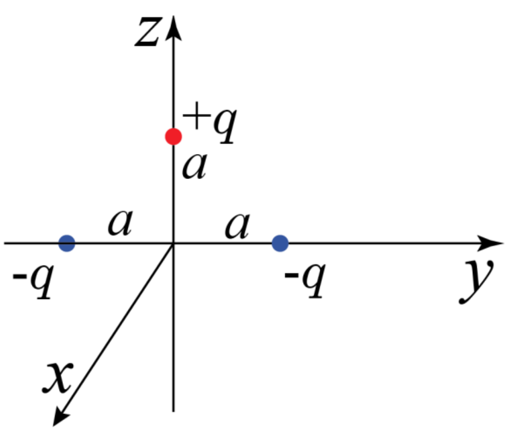
Monopole term:

$$V_{\text{mono}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\int \rho(\mathbf{r}')d\tau' \quad \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$ (for point charges) $$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Dipole term:

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r'(\cos\alpha)\rho(\mathbf{r}')d\tau' \quad \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$ (for point charges) $$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i}' q_i$$

Example: A three-charge system



$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i \quad = -q$$

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i}' q_i = qa\,\hat{\mathbf{z}} + [-qa - q(-a)]\hat{\mathbf{y}} = qa\,\hat{\mathbf{z}}$$

Therefore the system will have both monopole and dipole contributions

The electric field of pure dipole ($Q = 0$)

$Q = 0$ And $\mathbf{p} \neq 0$ Assume $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

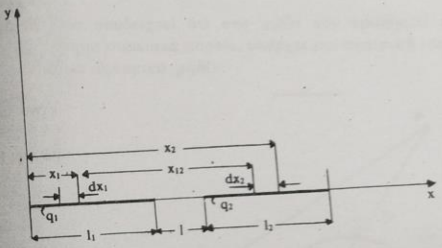
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\mathrm{V}$$

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\phi &= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\ \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\ \hat{\theta})$$

2.3 Δύο ομοιόμορφα διανεμημένα γραμμικά φορτία Q_1, Q_2 μήκους l_1 και l_2 αντίστοιχα, είναι τοποθετημένα πάνω στην ίδια ευθεία μέσα στον άπειρο κενό χώρο. Αν οι γραμμικές πυκνότητες των δύο φορτίων είναι αντίστοιχα q_1 και q_2, ζητείται να υπολογιστεί η δύναμη με την οποία αλληλεπενεργούν τα δύο φορτία. Να γίνει ειδική διερεύνηση για τις περιπτώσεις όπου: α) Το γραμμικό φορτίο Q_2 διανέμεται επί ημιευθείας ($l_2 \to \infty$) και β) Η απόσταση l είναι πολύ μεγαλύτερη από τα μήκη l_1 και l_2 των δύο γραμμικών φορτίων ($l \gg l_1,\ l_2$).

Ας θεωρήσουμε ότι τα δύο γραμμικά φορτία είναι τοποθετημένα πάνω στον άξονα των x, ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα φορτία των δύο απειροστών στοιχείων dx_1 και dx_2, θα είναι αντίστοιχα

$$dQ_1 = q_1 dx_1 \ \text{και}\ dQ_2 = q_2 dx_2$$



Σχήμα 2-3

Το μέτρο d^2F της δύναμης με την οποία αλληλεπενεργούν τα δύο στοιχειώδη φορτία dQ_1 και dQ_2, θα είναι σύμφωνα με το νόμο του Coulomb.

$$d^2F = \frac{dQ_1 \ dQ_2}{4\pi\varepsilon_0 x_{12}^2}, \tag{1}$$

ή, επειδή

$$x_{12} = x_2 - x_1, \tag{2}$$

$$d^2F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dx_1 dx_2}{(x_2 - x_1)^2} \tag{3}$$

Από την (3), με ολοκλήρωση ως προς x_1, θα προκύψει η δύναμη dF, την οποία ασκεί το στοιχειώδες φορτίο dQ_2, πάνω σ᾽ ολόκληρο το φορτίο Q_1:

$$dF = \frac{q_1 q_2 dx_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{l_1} \frac{dx_1}{(x_2 - x_1)^2} = \frac{q_1 q_2 dx_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \Bigg|_0^{l_1}$$

δηλαδή,

$$dF = \frac{q_1 q_2 l_1}{4\pi\varepsilon_0 x_2 (x_2 - l_1)} dx_2 \tag{4}$$

Η ζητούμενη δύναμη F, υπολογίζεται από την ολοκλήρωση της (4):

$$F = \frac{q_1 q_2 l_1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{l_1+l}^{l_1+l+l_2} \frac{dx_2}{x_2(x_2 - l_1)} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\ln \frac{x_2 - l_1}{x_2}\right) \Bigg|_{l_1+l}^{l_1+l+l_2}$$

ή,

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{(l_1+l)(l_2+l)}{l(l_1+l_2+l)}\right) \tag{5}$$

Είναι αυτονόητο ότι η F —που έχει τη διεύθυνση του άξονα των x— θα είναι ελκτική για $q_1 q_2 > 0$ και απωστική για $q_1 q_2 < 0$.

Επίσης, η (5), θα μπορούσε να προκύψει κατ᾽ ευθείαν από την (3), με εκτέλεση της διπλής ολοκλήρωσης.

Στη συνέχεια εξετάζουμε τις δυο ειδικές περιπτώσεις:

α) $l_2 \to \infty$

Επειδή η (5) μπορεί επίσης να γραφεί και με τη μορφή:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{l_1+l}{l} \cdot \frac{\left(1 + \frac{l}{l_2}\right)}{\left(1 + \frac{l_1+l}{l_2}\right)}\right)$$

Είναι φανερό ότι για $l_2 \to \infty$ προκύπτει:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{l_1 + l}{l} \tag{6}$$

β) $l \gg l_1,\ l_2$

Στην περίπτωση αυτή από την (5) έχουμε:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{l^2 + l(l_1 + l_2) + l_1 l_2}{l^2 + l(l_1 + l_2)}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(1 + \frac{l_1 l_2}{l^2 + l(l_1 + l_2)}\right)$$

ή,

$$F \cong \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(1 + \frac{l_1 l_2}{l^2}\right) \cong \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{l_1 l_2}{l^2} \tag{7}$$

Η (7) γράφεται τελικά και με τη μορφή:

$$F \cong \frac{Q_1 \ Q_2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} \tag{8}$$

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι στην περίπτωση αυτή, τα δύο γραμμικά φορτία συμπεριφέρονται σαν δύο σημειακά φορτία Q_1, Q_2 τοποθετημένα σε μια απόσταση l.

2.13 Η συνάρτηση δυναμικού φ ενός πεδίου δίνεται από τη σχέση

$$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}$$

όπου **r** η επιβατική ακτίνα, α σταθερή απόσταση και q_0 θετική ποσότητα με διαστάσεις φορτίου. Ζητείται:

α) Να υπολογιστεί η ηλεκτρική πεδιακή ένταση **E** και η ηλεκτρική ροή N που περνάει από την επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r. Ποιες είναι οι εκφράσεις των **E** και N όταν η απόσταση r τείνει στο μηδέν;

β) Να υπολογιστεί η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ καθώς επίσης και το συνολικό φορτίο Q_t που περιέχεται στη σφαίρα με ακτίνα r. Ποια είναι η έκφραση του Q_t όταν η απόσταση r τείνει στο άπειρο;

α) Η ένταση **E** του πεδίου θα υπολογιστεί από την

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \qquad (1)$$

Επειδή η συνάρτηση φ έχει σφαιρική συμμετρία, χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες, και από την (1), έχουμε:

$$\mathbf{E}_{(r)} = E_r \mathbf{r}_0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{r}_0$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2r^2+\alpha^2}{\alpha^2 r^2} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}\mathbf{r}_0 \qquad (2)$$

Η ροή $N_{(r)}$ που περνάει από την επιφάνεια της σφαίρας είναι:

$$N_{(r)} = \oint\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{dS} = \varepsilon_0 \oint\!\!\oint_S \mathbf{E}_{(r)}\mathbf{dS}$$

$$= \int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{q_0}{4\pi}\cdot\frac{2r^2+\alpha^2}{\alpha^2 r^2}\cdot e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}\cdot r^2\sin\theta d\theta d\varphi\,\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r}_0$$

$$= 4\pi r^2\varepsilon_0 E_{(r)},$$

ή,

$$N_{(r)} = q_0\,\frac{2r^2+\alpha^2}{\alpha^2}\,e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) βλέπουμε ότι η ένταση του πεδίου απειρίζεται όταν η απόσταση r τείνει στο μηδέν $\left(\underset{r\to 0}{E(r)\to\infty}\right)$, ενώ η ροή N γίνεται ίση με $q_0\left(\underset{r\to 0}{N(r)\to q_0}\right)$. Δηλαδή στην αρχή του συστήματος των συντεταγμένων είναι τοποθετημένο ένα σημειακό φορτίο q_0.