==(ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ) ΔΙΠΟΛΙΚΗ ΡΟΠΗ== (electric) dipole moment

$$\vec{d} = \vec{A\Theta}$$
$$\vec{\mathscr{P}} := q \cdot \vec{d}$$

$-q<0$ at point A, $q>0$ at Θ

$\Theta \equiv \Pi$, $\Lambda \equiv H$

$-e<0$, $e>0$
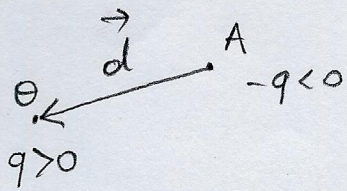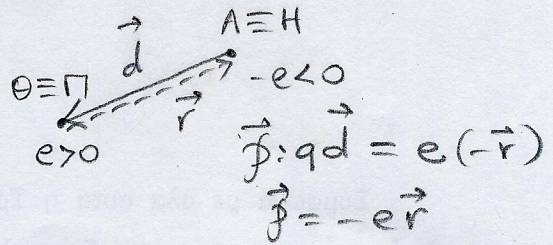
$$\vec{\mathscr{P}} := q\vec{d} = e(-\vec{r})$$
$$\vec{\mathscr{P}} = -e\vec{r}$$

$[U] = N \cdot m = J$ $\qquad$ $U = -\vec{\mathscr{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ $\qquad$ δυναμική ενέργεια (potential energy)

$[\vec{\tau}] = N \cdot m$ $\qquad$ $\vec{\tau} = \vec{\mathscr{P}} \times \vec{\mathcal{E}}$ $\qquad$ (μηχανική) ροπή (torque)

==ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΙΠΟΛΙΚΗ ΡΟΠΗ ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΣ==

transition (electric) dipole moment

κενό 0

ηλεκτρονιακό νέφος $-e<0$

ηλεκτρονιακό νέφος $-e<0$

κενό 0

$-e-0=-e$ "A"

$$\vec{A\Theta} = \vec{d}$$
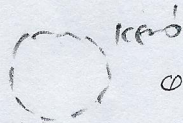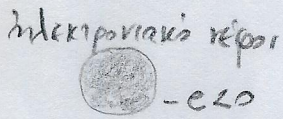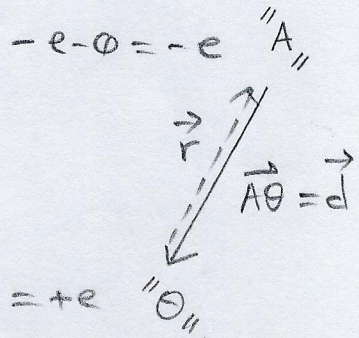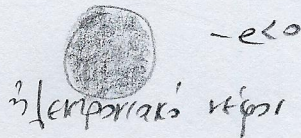
$0-(-e)=+e$ "Θ"

Αρχικώς $\qquad$ Τελικώς $\qquad$ Τελικώς − Αρχικώς

$$\vec{\mathscr{P}} = e\vec{d} = -e\vec{r}$$

Τελεστής (ηλεκτρική) διπολικής ροπής μεταβάσεων

$$\hat{\vec{d}} = \hat{\vec{P}} := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{d}_{ij} |\Phi_i\rangle\langle\Phi_j|$$

$$\vec{d}_{ij} = \vec{P}_{ij} = -e \langle\Phi_i|\hat{\vec{r}}|\Phi_j\rangle = \dots = -e \int d^3r \, \Phi_i(\vec{r})^* \, \vec{r} \, \Phi_j(\vec{r})$$

$$\hat{\vec{r}}|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle$$

$$\langle\Phi_i|\hat{\vec{r}}|\Phi_j\rangle = \sum_{|\vec{r}'\rangle}\sum_{|\vec{r}''\rangle} \langle\Phi_i|\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|\hat{\vec{r}}|\vec{r}''\rangle\langle\vec{r}''|\Phi_j\rangle$$

$$= \sum_{|\vec{r}'\rangle}\sum_{|\vec{r}''\rangle} \Phi_i(\vec{r}')^* \, \vec{r}'' \underbrace{\langle\vec{r}'|\vec{r}''\rangle}_{\delta_{\vec{r}'\vec{r}''}} \Phi_j(\vec{r}')$$

$$= \sum_{|\vec{r}'\rangle} \Phi_i(\vec{r}')^* \, \vec{r}' \, \Phi_j(\vec{r}') = \sum_{|\vec{r}\rangle} \Phi_i(\vec{r})^* \, \vec{r} \, \Phi_j(\vec{r})$$

$$= \int d^3r \, \Phi_i(\vec{r})^* \, \vec{r} \, \Phi_j(\vec{r})$$

$$\overset{\Delta}{=}\Sigma \qquad \hat{\vec{P}} = \vec{d}_{11}|\Phi_1\rangle\langle\Phi_1| + \vec{d}_{12}|\Phi_1\rangle\langle\Phi_2| + \vec{d}_{21}|\Phi_2\rangle\langle\Phi_1| + \vec{d}_{22}|\Phi_2\rangle\langle\Phi_2|$$

$$\vec{d}_{11} = -e \int d^3r \, \Phi_1(\vec{r})^* \, \vec{r} \, \Phi_1(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{d}_{12} = -e \int d^3r \, \Phi_1(\vec{r})^* \, \vec{r} \, \Phi_2(\vec{r}) \neq 0 \qquad \vec{d}_{12} = \vec{d}_{21} \text{ γο } \{\Phi_i(\vec{r})\}$$
πραγματικές

$$\vec{d}_{21} = -e \int d^3r \, \Phi_2(\vec{r})^* \, \vec{r} \, \Phi_1(\vec{r}) \neq 0$$

$$\vec{d}_{22} = -e \int d^3r \, \Phi_2(\vec{r})^* \, \vec{r} \, \Phi_2(\vec{r}) = 0$$

$$\hat{\vec{P}} = \vec{d}_{12}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + \vec{d}_{21}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\vec{P}} = \vec{d}_{12}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

δυναμική ενέργεια

δυναμική ενέργεια m τρόπου

$$U_E = - \vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$U_E^m = - \vec{p} \cdot \vec{E}^m$$

Τελεστής δυναμικής ενέργειας m τρόπου

$$\hat{U}_E^m = - \hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{E}}^m$$

$$\hat{U}_E^m = - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{d}_{ij} |\Phi_i\rangle\langle\Phi_j| \cdot \hat{E}_x^m (z,t)\,\hat{x}$$

ΔΣ $\hat{U}_E^m = - \vec{d}_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{E}_x^m (z,t)\,\hat{x} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{E}_x^m (z,t)\, \vec{d}_{12} \cdot \hat{x}$

$$\vec{d}_{12} \cdot \hat{x} = -e \int d^3 r\, \Phi_1^*(\vec{r})\, \vec{r}\, \Phi_2(\vec{r}) \cdot \hat{x} =$$

$$= -e \int d^3 r\, \Phi_1^*(\vec{r})\, x\, \Phi_2(\vec{r}) = -e\, X_{12} = p_{x12} := p$$

"Αρα $\hat{U}_E^m = e X_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{E}_x^m (z,t)$

$$\hat{E}_x^m (z,t) = \left(\frac{\hbar \omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m\right)$$

$$\hat{B}_y^m (z,t) = \left(\frac{\hbar \omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \frac{1}{c} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) i \left(\hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m\right)$$

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{U}_E^m = e X_{12} \left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right) \left(\frac{\hbar \omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m\right)$$

$$\hat{U}_E^m = e X_{12} \left(\frac{\hbar \omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right) \left(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m\right)$$

$$\hbar g^m$$

$$\hbar g^m = e X_{12} \left(\frac{\hbar \omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)$$

$$\hat{U}_{\Sigma}^{m} = \hbar g^{m} (\hat{S}_{+} + \hat{S}_{-})(\hat{a}_{m}^{+} + \hat{a}_{m})$$

χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης
ΔΣ - m τρόπου του ΗΜ πεδίου

(στην ατομική φυσική λέγεται
συχνά $\hat{H}_{AF}$

AF = atom - field)

$(g^{m}) \rightarrow \quad \hbar |g^{m}| = |\hat{\vartheta}| \left(\frac{\hbar \omega_{m}}{\varepsilon_{0} V}\right)^{1/2} \left|\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|$

$$\Omega_{R}^{m} := 2\sqrt{n}\, g^{m}$$

$\longleftarrow$ Είναι καλύτερα να ορίσουμε
τη συχνότητα Rabi ακριβώς έτσι
ώστε να υπάρχει πλήρης αναλογία
με την ημικλασική περίπτωση
(στο βιβλίο ορίζεται $\Omega_{R}^{m} = g^{m}$)
ΤΟ ΓΙΑΤΙ ΘΑ ΦΑΝΕΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ

$\dfrac{\hbar \Omega_{R}}{2\sqrt{n}} = |\hat{\vartheta}| \left(\frac{\hbar \omega_{m}}{\varepsilon_{0} V}\right)^{1/2} \left|\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|$

$\Omega_{R} = \dfrac{|\hat{\vartheta}|}{\hbar} \left(\frac{4\hbar \omega_{m} n}{\varepsilon_{0} V}\right)^{1/2} \left|\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right| := \dfrac{|\hat{\vartheta}| E_{0m}}{\hbar}$

" πλάτος "
ηλεκτρικού πεδίου $E_{0m} = \left(\dfrac{4\hbar \omega_{m} n}{\varepsilon_{0} V}\right)^{1/2} \cdot \left|\sin\left(\dfrac{m\pi z}{L}\right)\right|$ χωρικά
διαμορφωμένο

$[E_{0m}] = \left(\dfrac{J}{\frac{E}{m} \cdot m^{3}}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{C \cdot V}{\frac{C}{V} \cdot m^{2}}\right)^{1/2} = \dfrac{V}{m}$ μονάδει
ηλεκτρικού
πεδίου

● $\hat{H}_{HM,m} = \hbar\omega_m\left(\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m + \frac{1}{2}\right)$ m τρόπος ΗΜ πεδίου $\hbar\omega_m\left(\hat{N}_m + \frac{1}{2}\right)$

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}\ ,\ m\in\mathbb{N}^*$$

κι ἀγνοῶνται τον ὅρο $\frac{\hbar\omega_m}{2}$

$$\boxed{\hat{H}_{HM,m} = \hbar\omega_m\,\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m}$$
     $\hbar\omega_m\hat{N}_m$

● $\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2\hat{S}_+\hat{S}_- + E_1\hat{S}_-\hat{S}_+$ $E_2 - E_1 = \hbar\Omega$ διστάθμιό σύσσιμα

θέτονται $E_1 = \emptyset$

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\,\hat{S}_+\hat{S}_-}$$

χωρικά διαμορφωμένο "πλάτος"

$$E_{\varphi m} = \left|\left(\frac{4\hbar\omega_m\nu_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|$$

● $\boxed{\hat{U}_\varepsilon^m = \hbar g^m\left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right)\left(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m\right)} = \hat{H}_{αλλη\atop HMm-\Delta\Sigma}$ ᾿ἀλληλεπίδραση m τρόπου ΗΜ πεδίου – ΔΣ

$$\Omega_R^m := 2\sqrt{n_m}\,g_m$$
$$\Omega_R^m := \frac{|\Phi|E_{\varphi m}}{\hbar}\ \ \text{συχνότητα Rabi}$$

"Ἀρα $\hat{η}$ ὁλική Χαμιλτονιαν$\hat{η}$ τοῦ m τρόπου γράφεται

$$\boxed{\hat{H}_{Rm}^m = \hbar\omega_m\,\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m + \hbar\Omega\,\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m\left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right)\left(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m\right)}$$
ὀνομάζεται συχνά Χαμιλτονιανή Rabi

$|\uparrow, u_m\rangle$ $|\downarrow, u_m\rangle$

ΒΙΒΛΙΟ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΚΟ ΛΑΘΟΣ

~~ἰδία κατάσταση~~   σελ. 155, 159

$\hat{H}_{HMm} + \hat{H}_{\Delta\Sigma}$

ΠΡΟΣΟΧΗ $|\uparrow, u_m\rangle$ κ $|\downarrow, u_m\rangle$ ἰδιοκαταστάσεις τῆς $\left(\hbar\omega_m\,\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m + \hbar\Omega\,\hat{S}_+\hat{S}_-\right)$

και ὄχι τῆς $\hat{H}_{HM,m} + \hat{H}_{\Delta\Sigma} + \hat{H}_{αλλη\atop \Delta\Sigma-HMm}$

Άς δούμε προσεκτικότερα τη Χαμιλτονιανή Άλληλεπιδράσεως ΔΣ – ΗΜ πεδίο

ΔΣ – ένός τρόπου m τού ΗΜ πεδίο

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m) =$$

$$= \hbar g^m \left(\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m \right)$$

1ος   2ος   3ος   4ος
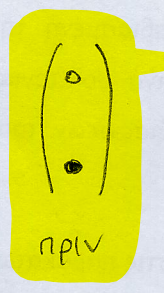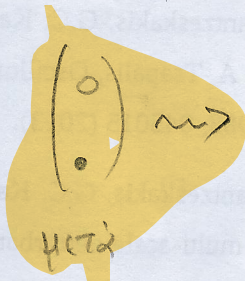
1ος $\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger$

ΔΕ > 0

$f_F < f_i$
$w_f < w_i$

άν έχω πολλούς τρόπους δεν είναι παράλογοι μηχανισμοί να τα θεωρῶ

2ος $\hat{S}_+ \hat{a}_m$

ίσως διατηρεί τήν ένέργεια

3ος $\hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger$

ίσως διατηρεί τήν ένέργεια

4ος $\hat{S}_- \hat{a}_m$

ΔΕ < 0
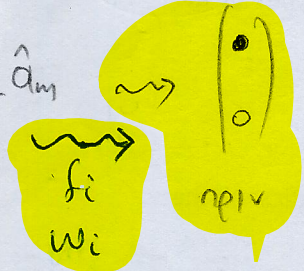
$f_f > f_i$
$w_f > w_i$

άν έχω πολλούς τρόπους δεν είναι παράλογοι μηχανισμοί

Άν άγνοήσουμε τόν 1ο καί τον 4ο όρο πού ὁ καθένας χωριστά δε διατηρεῖ τήν ένέργεια

$$\Rightarrow \hat{U}_{\mathcal{E}}^m = \hbar g^m \left(\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \right)$$

$$\boxed{\hat{H}_{JCM} = \hbar w_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar \Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g_m \left(\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \right)}$$

Jaynes – Cummings
Χαμιλτονιανή

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+ \qquad E_2 - E_1 = \hbar\Omega$$

μπορούμε να δείξουμε

$$\uparrow \; \underline{\qquad} \quad E_2 = \frac{\hbar\Omega}{2}$$
$$\hbar\Omega \; \underline{\qquad\qquad\qquad} \quad \text{μηδέν}$$
$$\downarrow \; \underline{\qquad} \quad E_1 = -\frac{\hbar\Omega}{2}$$
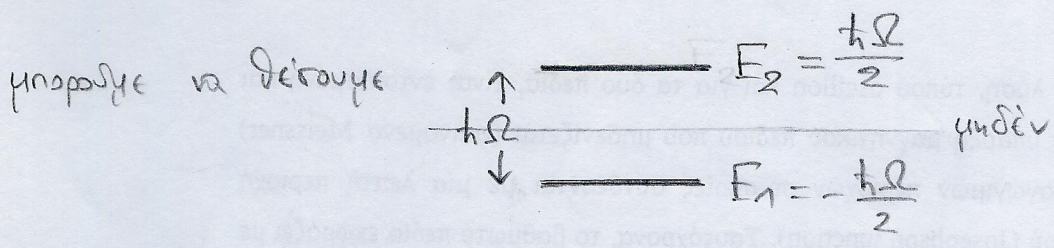
$$\hat{H}_{\Sigma\Gamma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_+ \hat{S}_- - \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_- \hat{S}_+$$

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg\} \quad \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg\} \quad \hat{S}_+ \hat{S}_- - \hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_z$$

"Άρα $\qquad \hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{\sigma}_z \qquad$ η μορφή του $\hat{H}_{\Sigma\Gamma}$ στο άρθρο των Jaynes–Cummings

ΑΣΚΗΣΗ

Να αποδειχτούν οι σχέσεις

α') $[\hat{a},\hat{a}]=0$ β') $[\hat{a}^+,\hat{a}^+]=0$ γ') $[\hat{a},\hat{a}^+]=1$ δ') $\hat{N}|n\rangle=n|n\rangle$

ε') $[\hat{N},\hat{a}]=-\hat{a}$ ς') $[\hat{N},\hat{a}^+]=\hat{a}^+$ ζ') $\hat{N}(\hat{a}|n\rangle)=(n-1)(\hat{a}|n\rangle)$

η') $\hat{N}(\hat{a}^+|n\rangle)=(n+1)(\hat{a}^+|n\rangle)$

α') $[\hat{a},\hat{a}]=\hat{a}\hat{a}-\hat{a}\hat{a}=0$ β') $[\hat{a}^+,\hat{a}^+]=\hat{a}^+\hat{a}^+-\hat{a}^+\hat{a}^+=0$

γ') $[\hat{a},\hat{a}^+]|n\rangle=\hat{a}\hat{a}^+|n\rangle-\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle=\hat{a}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle-\hat{a}^+\sqrt{n}\,|n-1\rangle=$
$$=\sqrt{n+1}\,\sqrt{n+1}\,|n\rangle-\sqrt{n}\,\sqrt{n}\,|n\rangle=(n+1)|n\rangle-n|n\rangle=1\cdot|n\rangle=$$

$$\Rightarrow\ [\hat{a},\hat{a}^+]=1$$

ε') $[\hat{N},\hat{a}]=[\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}]=\hat{a}^+\underbrace{[\hat{a},\hat{a}]}_{0}+\underbrace{[\hat{a}^+,\hat{a}]}_{-1}\hat{a}=-\hat{a}$

ς') $[\hat{N},\hat{a}^+]=[\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}^+]=\hat{a}^+\underbrace{[\hat{a},\hat{a}^+]}_{1}+\underbrace{[\hat{a}^+,\hat{a}^+]}_{0}\hat{a}=\hat{a}^+$

δ') $\hat{N}|n\rangle=\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle=\hat{a}^+\sqrt{n}\,|n-1\rangle=\sqrt{n}\,\sqrt{n}\,|n\rangle=n|n\rangle\ \Rightarrow\ \hat{N}|n\rangle=n|n\rangle$

ζ') $\hat{N}(\hat{a}|n\rangle)=\hat{N}\sqrt{n}\,|n-1\rangle=\sqrt{n}\,(n-1)|n-1\rangle=(n-1)\sqrt{n}\,|n-1\rangle=(n-1)(\hat{a}|n\rangle)$

η') $\hat{N}(\hat{a}^+|n\rangle)=\hat{N}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle=\sqrt{n+1}\,\hat{N}|n+1\rangle=\sqrt{n+1}\,(n+1)|n+1\rangle=$
$$(n+1)\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$
$$(n+1)(\hat{a}^+|n\rangle)$$