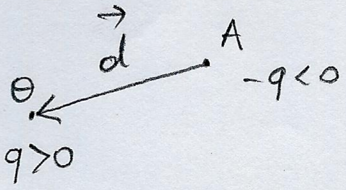
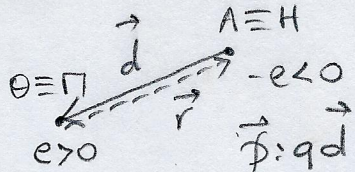
(ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ) ΔΙΠΟΛΙΚΗ ΡΟΠΗ (electric) dipole moment

Ⓐ



$\vec{d} := \vec{A\Theta}$

$\vec{p} := q \cdot \vec{d}$



$\vec{p} : q\vec{d} = e(-\vec{r})$

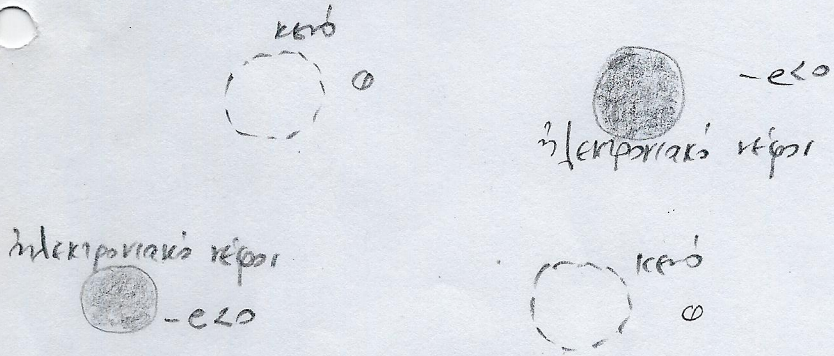
$\vec{p} = -e\vec{r}$

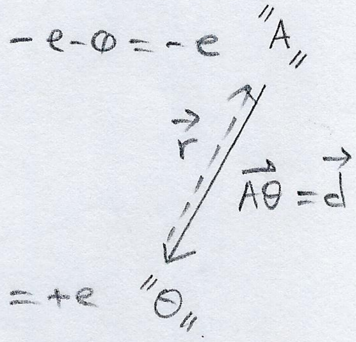
$[U] = N \cdot m = J$ $\quad U = -\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ δυναμική ενέργεια (potential energy)

$[\vec{\tau}] = N \cdot m$ $\quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{\mathcal{E}}$ (μηχανική) ροπή (torque)

ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΙΠΟΛΙΚΗ ΡΟΠΗ ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΣ

transition (electric) dipole moment





Αρχικώς $\quad$ Τελικώς $\quad$ Τελικώς − Αρχικώς

$\vec{p} = e\vec{d} = -e\vec{r}$

Τελεστής (ηλεκτρικής) διπολικής ροπής μεταβάσεων (13)

$$\hat{\vec{d}} = \hat{\vec{p}} := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{d}_{ij} |\Phi_i\rangle\langle\Phi_j|$$

$$\vec{d}_{ij} = \vec{p}_{ij} = -e \langle\Phi_i|\hat{\vec{r}}|\Phi_j\rangle = \ldots = -e \int d^3r \, \Phi_i^*(\vec{r}) \, \vec{r} \, \Phi_j(\vec{r})$$

$$\hat{\vec{r}} |\vec{r}\rangle = \vec{r} |\vec{r}\rangle$$

$$\langle\Phi_i|\hat{\vec{r}}|\Phi_j\rangle = \sum_{|\vec{r}'\rangle} \sum_{|\vec{r}''\rangle} \langle\Phi_i|\vec{r}'\rangle \langle\vec{r}'|\hat{\vec{r}}|\vec{r}''\rangle \langle\vec{r}''|\Phi_j\rangle$$

$$= \sum_{|\vec{r}'\rangle} \sum_{|\vec{r}''\rangle} \Phi_i^*(\vec{r}') \, \vec{r}'' \underbrace{\langle\vec{r}'|\vec{r}''\rangle}_{\delta_{\vec{r}'\vec{r}''}} \Phi_j(\vec{r}'')$$

$$= \sum_{|\vec{r}'\rangle} \Phi_i^*(\vec{r}') \, \vec{r}' \, \Phi_j(\vec{r}') = \sum_{|\vec{r}\rangle} \Phi_i^*(\vec{r}) \, \vec{r} \, \Phi_j(\vec{r})$$

$$= \int d^3r \, \Phi_i^*(\vec{r}) \, \vec{r} \, \Phi_j(\vec{r})$$

ΔΣ

$$\hat{\vec{p}} = \vec{d}_{11} |\Phi_1\rangle\langle\Phi_1| + \vec{d}_{12} |\Phi_1\rangle\langle\Phi_2| + \vec{d}_{21} |\Phi_2\rangle\langle\Phi_1| + \vec{d}_{22} |\Phi_2\rangle\langle\Phi_2|$$

$$\vec{d}_{11} = -e \int d^3r \, \Phi_1^*(\vec{r}) \, \vec{r} \, \Phi_1(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{d}_{12} = -e \int d^3r \, \Phi_1^*(\vec{r}) \, \vec{r} \, \Phi_2(\vec{r}) \neq 0$$

$\vec{d}_{12} = \vec{d}_{21}$ για $\{\Phi_i(\vec{r})\}$ πραγματικές

$$\vec{d}_{21} = -e \int d^3r \, \Phi_2^*(\vec{r}) \, \vec{r} \, \Phi_1(\vec{r}) \neq 0$$

$$\vec{d}_{22} = -e \int d^3r \, \Phi_2^*(\vec{r}) \, \vec{r} \, \Phi_2(\vec{r}) = 0$$

$$\hat{\vec{p}} = \vec{d}_{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \vec{d}_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\vec{p}} = \vec{d}_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Γ)

δυναμική ενέργεια

$$U_{\mathcal{E}} = -\vec{\mathfrak{p}}\cdot\vec{\mathcal{E}}$$

δυναμική ενέργεια m τρόπου

$$U^{m}_{\mathcal{E}} = -\vec{\mathfrak{p}}\cdot\vec{\mathcal{E}}^{m}$$

Τελεστής δυναμικής ενέργειας m τρόπου

$$\hat{U}^{m}_{\mathcal{E}} = -\hat{\vec{\mathfrak{p}}}\cdot\hat{\vec{\mathcal{E}}}^{m}$$

$$\hat{U}^{m}_{\mathcal{E}} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{d}_{ij}\,|\Phi_i\rangle\langle\Phi_j|\cdot\hat{E}^{m}_{x}(z,t)\,\hat{x}$$

(ΔΣ) $$\hat{U}^{m}_{\mathcal{E}} = -\vec{d}_{12}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\hat{E}^{m}_{x}(z,t)\,\hat{x} = -\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\hat{E}^{m}_{x}(z,t)\;\vec{d}_{12}\cdot\hat{x}$$

$$\vec{d}_{12}\cdot\hat{x} = -e\int d^3r\,\Phi_1^{*}(\vec{r})\,\vec{r}\,\Phi_2(\vec{r})\cdot\hat{x} =$$

$$= -e\int d^3r\,\Phi_1^{*}(\vec{r})\,x\,\Phi_2(\vec{r}) = -e\,x_{12} = \mathfrak{p}_{x12} := \mathfrak{p}$$

Άρα
$$\hat{U}^{m}_{\mathcal{E}} = e x_{12}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\hat{E}^{m}_{x}(z,t)$$

$$\hat{E}^{m}_{x}(z,t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\left(\hat{a}^{+}_{m}+\hat{a}_{m}\right)$$

$$\hat{B}^{m}_{y}(z,t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\frac{1}{c}\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)i\left(\hat{a}^{+}_{m}-\hat{a}_{m}\right)$$

$$\hat{S}_{+}+\hat{S}_{-} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \implies$$

$$\hat{U}^{m}_{\mathcal{E}} = e x_{12}\left(\hat{S}_{+}+\hat{S}_{-}\right)\left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\left(\hat{a}^{+}_{m}+\hat{a}_{m}\right)$$

$$\hat{U}^{m}_{\mathcal{E}} = \underbrace{e x_{12}\left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)}_{\hbar g^{m}}\left(\hat{S}_{+}+\hat{S}_{-}\right)\left(\hat{a}^{+}_{m}+\hat{a}_{m}\right)$$

$$\hbar g^{m} = e x_{12}\left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \qquad (gm)$$

$$\boxed{\hat{U}^m_E = \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{a}^+_m + \hat{a}_m)}$$

χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως
ΔΣ – m τρόπου του ΗΜ πεδίου

(στην ατομική φυσική λέγεται
συχνά $\hat{H}_{AF}$

AF = atom – field)

$$(g_m) \Rightarrow \hbar |g^m| = |\wp| \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \left|\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|$$

$$\Omega_R^m := 2\sqrt{n}\, g^m \longleftarrow$$

είναι καλύτερα να ορίσουμε
τη συχνότητα Rabi ακριβώς έτσι
ώστε να υπάρχει πλήρης αναλογία
με την ημικλασική περίπτωση
(στο βιβλίο ορίζεται $\Omega_R^m = g^m$)
ΤΟ ΓΙΑΤΙ ΘΑ ΦΑΝΕΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ

$$\frac{\hbar\,\Omega_R}{2\sqrt{n}} = |\wp| \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \left|\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|$$

$$\Omega_R = \frac{|\wp|}{\hbar} \left(\frac{4\hbar\omega_m n}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \left|\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right| := \frac{|\wp|\, E_{om}}{\hbar}$$

"πλάτος" ηλεκτρικού πεδίου

$$E_{om} = \left(\frac{4\hbar\omega_m n}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|}$$

χωρικά διαμορφωμένο

$$[E_{om}] = \left(\frac{J}{\frac{F}{m}\cdot m^3}\right)^{1/2} = \left(\frac{C\cdot V}{\frac{C}{V}\cdot m^2}\right)^{1/2} = \frac{V}{m}$$

μονάδες ηλεκτρικού πεδίου

ΣΥΝΟΨΗ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΩΝ

$$\hat{H}_{HM,m} = \hbar\omega_m\left(\hat{a}_m^+\hat{a}_m + \frac{1}{2}\right)$$ m τρόπος ΗΜ πεδίου $\hbar\omega_m\left(\hat{N}_m + \frac{1}{2}\right)$

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}, \quad m \in \mathbb{N}^*$$

κι αγνοώντας τον όρο $\frac{\hbar\omega_m}{2}$

$$\hat{H}_{HM,m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^+\hat{a}_m$$ $\hbar\omega_m\hat{N}_m$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2\hat{S}_+\hat{S}_- + E_1\hat{S}_-\hat{S}_+ \qquad E_2 - E_1 = \hbar\Omega$$ διστάθμικό σύστημα

θέτονται $E_1 = \emptyset$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-$$

χωρικά διαμορφωμένο "πλάτος"

$$E_{0m} = \left|\left(\frac{4\hbar\omega_m n_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|$$

$$\hat{U}_{\varepsilon m}^m = \hbar g^m\left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right)\left(\hat{a}_m^+ + \hat{a}_m\right) = \hat{H}_{\alpha\lambda\lambda,\, HMm-\Delta\Sigma}$$ αλληλεπίδραση m τρόπου ΗΜ πεδίου – ΔΣ

$$\Omega_R^m := 2\sqrt{n_m}\, g_m$$

$$\Omega_R^m := \frac{|\wp| E_{0m}}{\hbar}$$ συχνότητα Rabi

Άρα η ολική Χαμιλτονιανή του m τρόπου γράφεται

$$\hat{H}_{Rm} = \hbar\omega_m\hat{a}_m^+\hat{a}_m + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m\left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right)\left(\hat{a}_m^+ + \hat{a}_m\right)$$ ονομάζεται συχνά Χαμιλτονιανή Rabi

$|\uparrow, n_m\rangle$ η $|\downarrow, n_m\rangle$

ΒΙΒΛΙΟ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΚΟ ΛΑΘΟΣ

~~ιδιο~~ καταστάσεις σελ. 155, 159

$\hat{H}_{HMm} + \hat{H}_{\Delta\Sigma}$

ΠΡΟΣΟΧΗ $|\uparrow, n_m\rangle$ κ $|\downarrow, n_m\rangle$ ιδιοκαταστάσεις τη. $\left(\hbar\omega_m\hat{a}_m^+\hat{a}_m + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-\right)$

και όχι τη. $\hat{H}_{HM,m} + \hat{H}_{\Delta\Sigma} + \hat{H}_{\alpha\lambda\lambda,\,\Delta\Sigma-HMm}$

Ας δούμε προσεκτικότερα τη Χαμιλτονιανή Αλληλεπίδρασης ΔΣ – ΗΜ πεδίο

ΔΣ – ενός τρόπου m του ΗΜ πεδίου

$$\hat{V}^m_{\Sigma m} = \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{a}^\dagger_m + \hat{a}_m) =$$

$$= \hbar g^m \Big(\underbrace{\hat{S}_+ \hat{a}^\dagger_m}_{1\text{ος}} + \underbrace{\hat{S}_+ \hat{a}_m}_{2\text{ος}} + \underbrace{\hat{S}_- \hat{a}^\dagger_m}_{3\text{ος}} + \underbrace{\hat{S}_- \hat{a}_m}_{4\text{ος}} \Big)$$

1ος $\hat{S}_+ \hat{a}^\dagger_m$

$\rightsquigarrow$ f_i ω_i $\quad \begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix}$ πριν $\quad \begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix}$ μετά $\quad \rightsquigarrow$ $f_f < f_i$, $\omega_f < \omega_i$

$\Delta E > 0$

αν έχω πολλούς τρόπους δεν είναι παράλογος μηχανισμός

2ος $\hat{S}_+ \hat{a}_m$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix}$ πριν $\quad \begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix}$ μετά

ίσως διατηρεί την ενέργεια

3ος $\hat{S}_- \hat{a}^\dagger_m$

$\begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix}$ πριν $\quad \begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix}$ μετά $\rightsquigarrow$

ίσως διατηρεί την ενέργεια

4ος $\hat{S}_- \hat{a}_m$

$\rightsquigarrow$ f_i ω_i $\quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix}$ πριν $\quad \begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix}$ $\quad \rightsquigarrow$ $f_f > f_i$, $\omega_f > \omega_i$

$\Delta E < 0$

αν έχω πολλούς τρόπους δεν είναι παράλογος μηχανισμός

Αν αγνοήσουμε τον 1ο και τον 4ο όρο που ο καθένας μόνος του δε διατηρεί την ενέργεια

$$\Rightarrow \hat{V}^m_{\Sigma m} = \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}^\dagger_m)$$

$$\boxed{\hat{H}_{JCm} = \hbar \omega_m \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m + \hbar \Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g_m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}^\dagger_m)}$$

Jaynes – Cummings Χαμιλτονιανή

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+ \qquad E_2 - E_1 = \hbar\Omega$$

μπορούμε να θέσουμε

$$E_2 = \frac{\hbar\Omega}{2}$$

$\hbar\Omega$ μηδέν

$$E_1 = -\frac{\hbar\Omega}{2}$$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{S}_+\hat{S}_- - \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{S}_-\hat{S}_+$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- - \hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_z$$

Άρα $\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_z$ η μορφή του $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$ στο άρθρο των Jaynes–Cummings

$\hat{a}^{+}|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad \hat{a}\,|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$

ΑΣΚΗΣΗ

Να ἀποδειχτοῦν οἱ σχέσεις

α′ $[\hat{a},\hat{a}]=0$ β′ $[\hat{a}^{+},\hat{a}^{+}]=0$ γ′ $[\hat{a},\hat{a}^{+}]=1$ δ′ $\hat{N}|n\rangle=n|n\rangle$

ε′ $[\hat{N},\hat{a}]=-\hat{a}$ ς′ $[\hat{N},\hat{a}^{+}]=\hat{a}^{+}$ ζ′ $\hat{N}(\hat{a}|n\rangle)=(n-1)(\hat{a}|n\rangle)$

η′ $\hat{N}(\hat{a}^{+}|n\rangle)=(n+1)(\hat{a}^{+}|n\rangle)$

α′ $[\hat{a},\hat{a}]=\hat{a}\hat{a}-\hat{a}\hat{a}=0$ β′ $[\hat{a}^{+},\hat{a}^{+}]=\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}-\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}=0$

γ′ $$[\hat{a},\hat{a}^{+}]|n\rangle=\hat{a}\hat{a}^{+}|n\rangle-\hat{a}^{+}\hat{a}|n\rangle=\hat{a}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle-\hat{a}^{+}\sqrt{n}\,|n-1\rangle=$$

$$=\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\,|n\rangle-\sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle=(n+1)|n\rangle-n|n\rangle=1\cdot|n\rangle$$

$$\Rightarrow [\hat{a},\hat{a}^{+}]=1$$

ε′ $$[\hat{N},\hat{a}]=[\hat{a}^{+}\hat{a},\hat{a}]=\hat{a}^{+}\underbrace{\cancel{[\hat{a},\hat{a}]}}_{0}+\underbrace{\cancel{[\hat{a}^{+},\hat{a}]}}_{-1}\hat{a}=-\hat{a}$$

ς′ $$[\hat{N},\hat{a}^{+}]=[\hat{a}^{+}\hat{a},\hat{a}^{+}]=\hat{a}^{+}\underbrace{\cancel{[\hat{a},\hat{a}^{+}]}}_{1}+\underbrace{\cancel{[\hat{a}^{+},\hat{a}^{+}]}}_{0}\hat{a}=\hat{a}^{+}$$

δ′ $$\hat{N}|n\rangle=\hat{a}^{+}\hat{a}|n\rangle=\hat{a}^{+}\sqrt{n}\,|n-1\rangle=\sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle=n|n\rangle\Rightarrow \hat{N}|n\rangle=n|n\rangle$$

ζ′ $$\hat{N}(\hat{a}|n\rangle)=\hat{N}\sqrt{n}\,|n-1\rangle=\sqrt{n}\,(n-1)\,|n-1\rangle=(n-1)\sqrt{n}\,|n-1\rangle=(n-1)(\hat{a}|n\rangle)$$

η′ $$\hat{N}(\hat{a}^{+}|n\rangle)=\hat{N}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle=\sqrt{n+1}\,\hat{N}\,|n+1\rangle=\sqrt{n+1}\,(n+1)\,|n+1\rangle=$$

$$(n+1)\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$(n+1)(\hat{a}^{+}|n\rangle)$$