

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ (a_n)

ΩΛ

$$a_{n+1} - a_n = \omega \quad n = (0), 1, 2, 3, \dots \quad \omega \text{ διαφορά}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\omega \quad \text{αναδρομικός τύπος}$$

$$\beta = \frac{a + \delta}{2} \quad \beta \text{ αριθμητικός μέσος}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{\u0391\u03b4\u03c1\u03bf\u03b9\u03c3\u03bc\u03b1 } n \text{ \u03c0\u03c1\u03c9\u03c4\u03c9\u03bd \u03b4\u03c1\u03c9\u03bd}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ (a_n)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \neq 0 \quad n = (0), 1, 2, 3, \dots \quad \lambda \text{ \u03bb\u03cc\u03b3\u03bf\u03c2}$$

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1} \quad \text{αναδρομικός τύπος}$$

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\beta}{\delta} \Leftrightarrow \beta^2 = a\delta \quad \beta \text{ γεωμετρικός μέσος}$$

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}, & \lambda \neq 1 \\ a_1 n, & \lambda = 1 \end{cases} \quad \text{\u0391\u03b4\u03c1\u03bf\u03b9\u03c3\u03bc\u03b1 } n \text{ \u03c0\u03c1\u03c9\u03c4\u03c9\u03bd \u03b4\u03c1\u03c9\u03bd}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - \lambda}$$

\u0391\u03b4\u03c1\u03bf\u03b9\u03c3\u03bc\u03b1 \u03b1\u03c0\u03b5\u03b9\u03c1\u03c9\u03bd \u03b4\u03c1\u03c9\u03bd ($|\lambda| < 1$)

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΤΡΟΠΩΝ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ (dN)
ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας (dv)

(A)

αποδεικνύεται $g(\nu) := \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$ $[g(\nu)] = \frac{1}{\text{Hz}} = s$

V ο όγκος της κοιλότητας ή του 3D καυτού περιοδικότητας με άξεις έστωσαν $a_x, a_y, a_z \Rightarrow V = a_x a_y a_z$

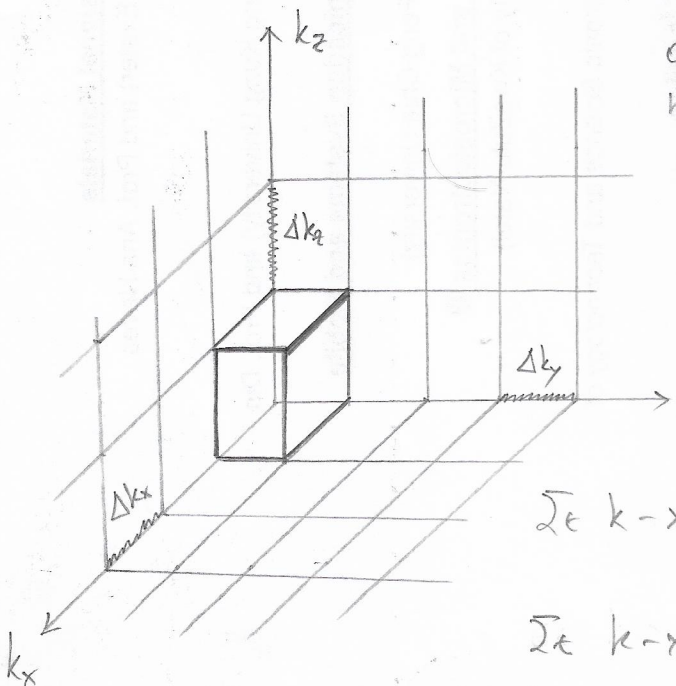
θα κάνουμε την απόδειξη για περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Στο βιβλίο Ξ και η απόδειξη για ορθογώνια κοιλότητα.

έστω
$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)} \\ \vec{E}(\vec{0}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(-\omega t + \varphi)} \\ \vec{E}(a_x, 0, 0), t) &= \vec{E}_0 e^{i(k_x a_x - \omega t + \varphi)} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \Rightarrow e^{ik_x a_x} = 1 \Rightarrow \\ k_x a_x = 2\pi n_x, n_x \in \mathbb{Z} \end{array}$$

ομοίως $k_x = \frac{2\pi n_x}{a_x}, n_x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ βήμα στο k_x $\Delta k_x = \frac{2\pi}{a_x}$

$k_y = \frac{2\pi n_y}{a_y}, n_y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ βήμα στο k_y $\Delta k_y = \frac{2\pi}{a_y}$

$k_z = \frac{2\pi n_z}{a_z}, n_z \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ βήμα στο k_z $\Delta k_z = \frac{2\pi}{a_z}$



οι επιτρεπόμενες k καταστάσεις είναι στις κορυφές των μικρών ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων με άξονες

$\Delta k_x = \frac{2\pi}{a_x} \quad \Delta k_y = \frac{2\pi}{a_y} \quad \Delta k_z = \frac{2\pi}{a_z}$

Άρα οι κορυφές, όπως, διαμοιράζονται έφ' όσον σε 8 όμοια ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Άρα

Σε k-χώρο $\frac{(2\pi)^3}{a_x a_y a_z} = \frac{(2\pi)^3}{V} \exists$ 1 k-κατάσταση

Σε k-χώρο $4\pi k^2 dk \exists$ dN_k k-καταστάσεις

$\Rightarrow dN_k = \frac{4\pi k^2 dk V}{8\pi^3}$

δηλαδή από $k \rightarrow k + dk$ (σφαιρικός φλοιός)

$$dN_k = \frac{4\pi k^2 dk V}{8\pi^3}$$

$$c = \lambda \nu, \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{k} \nu \Rightarrow k = \frac{2\pi}{c} \nu \Rightarrow dk = \frac{2\pi}{c} d\nu$$

$$dN_\nu = \frac{4\pi}{8\pi^3} \frac{4\pi^2}{c^2} \nu^2 \frac{2\pi}{c} d\nu V \Rightarrow dN_\nu = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

Άλλοι, \exists 2 πιθανές πολώσεις του ηλεκτρικού πεδίου κάθετες στο \vec{k} .

ο αριθμός των εξηλεκτρονόμενων κανονικών τρόπων είναι $dN = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \Rightarrow$

$$g(\nu) := \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ του κλασικού νόμου Rayleigh-Jeans από το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας και το $g(\nu) := \frac{dN}{d\nu}$

$$g(\nu) := \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi \nu^2 V}{c^3} \quad [g(\nu)] = \frac{1}{\text{Hz}} = \text{s}$$

$$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \quad \left[\frac{g(\nu)}{V} \right] = \frac{1}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{s}}{\text{m}^3}$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{g(\nu)}{V} \cdot \overline{E} \quad [\rho(\nu, T)] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3}$$

\downarrow
 μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου

Άρα το έρωμα είναι πόση είναι η μέση ενέργεια \overline{E} κάθε κανονικού τρόπου.

Στην κλασική φυσική, αυτό το περιγράφει το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας (equipartition theorem): σε θερμική ισορροπία αποδίδουμε μέση ενέργεια $\frac{1}{2} k_B T$ σε κάθε βαθμό ελευθερίας του δομικού λίθου.

η.χ. δομικός λίθος με M βαθμούς ελευθερίας έχει $\bar{E} = \frac{M}{2} k_B T$
 και σύνολο N τέτοιων δομικών λίθων "έχει" ενέργεια $\frac{MN}{2} k_B T$

3Δ ιδανικό αέριο $M=3$ (κίνηση x, y, z) $\Rightarrow \bar{E} = \bar{E}_{KIN} = \frac{3}{2} k_B T$

1Δ ιδανικό αέριο $M=1$ (κίνηση x) $\Rightarrow \bar{E} = \bar{E}_{KIN} = \frac{1}{2} k_B T$

1Δ AAT $M=2$ (κίνηση x , ταλάντωση) $\Rightarrow \bar{E}_{KIN} = \frac{1}{2} k_B T = \bar{E}_{ΔPN}$
 $\Rightarrow \bar{E} = k_B T$

"Αν λοιπόν έχουμε μία συλλογή τέτοιων AAT με $\bar{E} = k_B T \Rightarrow$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k_B T$$

νόμος Rayleigh-Jeans
 ($\nu \rightarrow \infty \Rightarrow \rho(\nu, T) \rightarrow \infty$
 "υπεριώδης καταστροφή")

Αν δεν είχαμε $M=2$ βαθμούς ελευθερίας, αλλά άλλο αριθμό M , τότε θα καταλήγαμε στη σχέση

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{M}{2} k_B T$$

γενικότερος κλασικός νόμος,
 ο οποίος παρουσιάζει το ίδιο πρόβλημα...

Το πρόβλημα "έγκειται" στο ότι με το θεώρημα Ρεσκατανομής ενέργειας
 η μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου $\bar{E} = \bar{E}(T)$,
 δηλαδή εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία T .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΝΟΜΟΥ PLANCK (~ όπως την έκανε ο Planck)

1900

πρόβλημα ακτινοβολίας μέλανος σώματος

τουλάχιστον από το 1859
Kirchhoff

ο Planck ασχολήθηκε με αυτό > 1894
η απόδειξη που παρατίθεται εδώ έγινε το 1900

πειραματικός ταλρασμα σε υψηλές συχνότητες Wien 1896

νόμος Rayleigh-Jeans 1900 (συμπίπτει με πείραμα μόνο σε πολύ χαμηλές συχνότητες)

ο Planck χρησιμοποιεί

ΥΠΟΘΕΣΗ στατιστική κατανομή Boltzmann

ΥΠΟΘΕΣΗ η ΗΜ ενέργεια μπορεί να είναι μόνο διακριτό

("κβαντισμένο") πολλαπλασιασμού της ποσότητας $h\nu$, όπου

h είναι αυτό που λέγεται σήμερα σταθερά του Planck και ν η συχνότητα

για τις υποθέσεις αυτές δεν ήταν και πολύ χαρούμενος...

1905 Einstein

έξηλθε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

υποδέχονται ότι υπάρχουν αυτές τα «κβάντα» φωτός

1926 πρωτογράφτηκε η λέξη «φωτόνια» Gilbert Newton Lewis

ο Planck εισήγαγε την έννοια resonator (ἀπηχέτιο, ταλαντωτής)

ο οποίος έχει διακεκριμένες, δηλαδή όχι συνεχείς αλλά εξαρτημένες από ένα φυσικό αριθμό n , «κβαντισμένες», επιτρεπόμενες τιμές ενέργειας E_n για δεδομένη συχνότητα

$$E_n = nh\nu, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Σημείωση ότι η μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου \bar{E}

σε δεδομένη συχνότητα ν και θερμοκρασία T είναι στην πραγματικότητα μια μέση τιμή $\overline{E(\nu, T)}$

των ενεργειών ενός μεγάλου αριθμού resonators που ο κάθε ένας βρίσκεται σε διαφορετική στάθμη E_n

έτσι η πιθανότητα κατάληψης της στάθμης E_n δίνεται από τη στατιστική Boltzmann

ένω λοιπόν κλασικά είχαμε $\overline{E(T)} = m \cdot \frac{1}{2} k_B T$

Τώρα έχουμε $\overline{E(\nu, T)} = \sum_n E_n p_n$

$\beta := k_B T$

$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$

πιθανότητα κατάληψης της στάθμης n

$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$

συνάρτηση επιμερισμού (partition function)

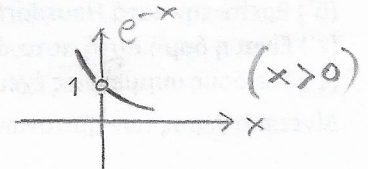
$x := \frac{h\nu}{k_B T} = \beta h\nu > 0$

* $\overline{E(\nu, T)} = \sum_n n h\nu \frac{e^{-\beta n h\nu}}{Z} = \frac{x}{Z \beta} \sum_n n e^{-n x}$

$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\beta n h\nu} = \sum_n e^{-n x}$

$a_n = e^{-n x}$ ο.κ. $a_0 = 1, a_1 = e^{-x}, a_2 = e^{-2x}$

$a_{n+1} = e^{-(n+1)x} \Rightarrow \lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-x} < 1$



λόγος γεωμετρικής πρόδου

δείτε η συνάρτηση επιμερισμού είναι το άθροισμα ∞ όρων γεωμετρικής πρόδου με πρώτο όρο $a_0 = 1$ και λόγο $\lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-x} < 1$ $S_{\infty} = \frac{πρ. \acute{o}ρου}{1 - \lambda}$

$Z = \frac{1}{1 - e^{-x}}$

$$Z = \sum_n e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = - \underbrace{\sum_n n e^{-nx}}_A = \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} \Rightarrow A = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

? Εργαίεως * $\overline{E(\nu, T)} = \frac{x(1-e^{-x})}{\beta} \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$

$$= \frac{x}{\beta} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{\beta} \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\overline{E(\nu, T)} = \frac{h\nu \cancel{k_B T}}{\cancel{k_B T}} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$\overline{E(\nu, T)} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$$

$$[g(\nu)] = \frac{1}{\text{Hz}} = s$$

$$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

$$\left[\frac{g(\nu)}{V} \right] = \frac{1}{\text{m}^3 \cdot \text{Hz}} = \frac{s}{\text{m}^3}$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{g(\nu)}{V} \cdot \overline{E(\nu, T)}$$

$$[\rho(\nu, T)] = \frac{J}{\text{m}^3 \cdot \text{Hz}} = \frac{J \cdot s}{\text{m}^3}$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \Rightarrow$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β Για θερμοκρασία (α') 300K (β') 6000K, (γ') 6K

Υπολογίστε το μήκος κύματος λ_{Δ} στο οποίο η πρόβλεψη του νόμου Rayleigh-Jeans ρ_{RJ} είναι διπλάσια από την πειραματική τιμή ρ την οποία έβγαζε ο νόμος Planck.

ΛΥΣΗ

$$\text{Θέλουμε } \rho_{RJ} = 2\rho \Rightarrow \rho_0 x^2 = 2\rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow e^x - 1 = 2x \Rightarrow$$

$$e^x = 1 + 2x$$

γραφικά, π.χ. $x_{\Delta} \approx 1.25645 \approx \frac{5}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{hc}{k_B T \lambda} \\ c = \lambda \nu \end{array} \right\} \lambda = \frac{hc}{k_B T x} \Rightarrow \lambda_{\Delta} = \frac{hc}{k_B T x_{\Delta}} \rightarrow$$

$$\frac{hc}{k_B} \approx 14.404 \cdot 10^{-3} \text{ Km}$$

(α') $T = 300\text{K} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_{\Delta} \approx 38.2 \mu\text{m}$ (FIR $25 \mu\text{m} < \lambda < 1000 \mu\text{m}$)

(β') $T = 6000\text{K} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_{\Delta} \approx 1.91 \mu\text{m}$ (MIR $2.5 \mu\text{m} < \lambda < 25 \mu\text{m}$)

(γ') $T = 6\text{K} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_{\Delta} \approx 1.91 \text{ mm} \sim \text{μικροκύματα}$ (NIR $0.8 < \lambda < 2.5 \mu\text{m}$)

ISO 20473

NIR $0.78 \mu\text{m} < \lambda < 3 \mu\text{m}$

MIR $3 \mu\text{m} < \lambda < 50 \mu\text{m}$

FIR $50 \mu\text{m} < \lambda < 1000 \mu\text{m}$

ΑΣΚΗΣΗ Πότε $\rho_{RJ} = \rho$

$$\rho_{RJ} = \rho \Rightarrow \rho_0 x^2 = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow x = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + x \Rightarrow x = 0$$

πρέπει $x \neq 0$

"Αρα ποτέ $\rho_{RJ} = \rho$.

ΑΣΚΗΣΗ $T = ?$; $\rho_{RJ} = 2\rho$ με $\lambda = 400 \text{ nm}$
 (στα όρια του υπεριώδους)

$$\rho_{RJ} = 2\rho \Rightarrow \rho_0 x^2 = 2\rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow e^x - 1 = 2x \Rightarrow e^x = 1 + 2x$$

$x \neq 0$

γραφικά, پیدا $x \approx 1.25645$
 $\approx \frac{5}{4}$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{h\nu}{k_B T} \\ c &= \lambda \nu \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{k_B T x}$$

$$\frac{hc}{k_B} \approx 14.404 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m} \approx 14.4 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$$

$$T = \frac{hc}{k_B \lambda x}$$

$$T = \frac{14.4 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}}{4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 5} = 2.88 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-7}} \text{ K} \Rightarrow T \approx 28800 \text{ K}$$

μόνο μερικοί άστρες
 πολύ μεγαλύτεροι
 π.χ. 30 $M_{\text{ΗΛΙΟΥ}}$

δείτε το "UV catastrophe",
 "υπεριώδης καταστροφή",
 είναι μια λανθασμένη διορασία...