Τομέας Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κβαντική Οπτική και Lasers.

Εξέταση της 22ας Ιουνίου 2023. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Θέμα 1.

Θεωρήστε τις ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του Υδρογόνου $\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\varphi) = \Phi_k(\boldsymbol{r})$, όπου $k = \{n, l, m\}$ είναι ο συλλογικός κβαντικός αριθμός. Δηλαδή, n = 1, 2, 3, ... είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός, l = 0, 1, 2, ... , n–1 είναι ο τροχιακός κβαντικός αριθμός και m = –l, –l+1, ... , l–1, l είναι ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός. Συγκεκριμένα δίνονται οι εξής:

$$\Psi_{100}(r,\theta,\varphi) = (\pi\alpha_o^3)^{-1/2}\, e^{-\frac{r}{a_0}} \qquad \Psi_{100} \equiv 1s$$

$$\Psi_{200}(r,\theta,\varphi) = (32\,\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,(2-\frac{r}{a_0})\, e^{-\frac{r}{2a_0}} \qquad \Psi_{200} \equiv 2s$$

$$\Psi_{210}(r,\theta,\varphi) = (32\,\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{r}{a_0}\cos\theta\, e^{-\frac{r}{2a_0}} \qquad \Psi_{210} \equiv 2p_z$$

$$\Psi_{310}(r,\theta,\varphi) = (6561\,\pi\alpha_o^3/2)^{-\frac{1}{2}}\,(6-\frac{r}{a_0})\,\frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}}\cos\theta \qquad \Psi_{310} \equiv 3p_z$$

Οι αντίστοιχες ιδιοενέργειες είναι $E_k = \hbar\Omega_k = -\frac{R_E}{n^2} = E_n$, δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός ως προς l,m.
R_E = 13.6 eV είναι η ενέργεια Rydberg και a_0 είναι η ακτίνα Bohr. Θεωρήστε δεδομένα ακόμα πως $h \approx 4.1\times10^{-15}$ eV s, $c \approx 3\times10^8$ m/s, $\int_0^\infty e^{-\gamma r}\, r^\kappa\, dr = \gamma^{-(\kappa+1)}\,\kappa!$ όπου κ = 1, 2, 3, . . . και $\gamma > 0$.
Δίνεται πως σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ), η αντιστροφή ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς, δηλαδή η πράξη $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ αντιστοιχεί στις αλλαγές $r' = r$, $\theta' = \pi - \theta$, $\varphi' = \pi + \varphi$.

(α′) Να ελεγχθούν οι $1s, 2s, 2p_z, 3p_z$ ως προς την ομοτιμία και να βρείτε πόσες και ποιες κομβικές επιφάνειες έχει η κάθε μία.

(β′) Να βρείτε ποιες είναι οι επιτρεπόμενες και ποιες οι απαγορευμένες μεταβάσεις στα πλαίσια της προσεγγίσεως διπόλου μεταξύ των σταθμών $1s, 2s, 2p_z, 3p_z$ και αν ισχύουν οι κανόνες επιλογής $\Delta l = \pm1, \Delta m = 0, \pm1$. Βρείτε το μήκος κύματος των επιτρεπομένων μεταβάσεων.

(γ′) Να συγκριθούν οι ισχύες όλων των επιτρεπομένων οπτικών μεταβάσεων, στα πλαίσια της προσεγγίσεως διπόλου. Για τη σύγκριση να βρείτε λόγο (πηλίκο).

Θέμα 2.

(α′) Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings ενός ΗΜ τρόπου. Υπολογίστε τα
$\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$, $\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle$, $\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$, $\langle\hat{S}_-\hat{S}_+\rangle$, $<\hat{S}_+\hat{a}>$, $<\hat{S}_-\hat{a}^\dagger>$, $<\hat{S}_+\hat{a}^\dagger>$, $<\hat{S}_-\hat{a}>$
για την κατάσταση:

$$\left|\psi(t)\right> = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\left|\downarrow 1\right> + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\left|\uparrow 0\right>$$

(β′) Χρησιμοποιώντας τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger για την παραπάνω κατάσταση, δείξτε ότι ικανοποιείται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} -\Omega\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(γ′) Ορίζοντας $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $\vec{x}(t) = \vec{v}e^{-i\lambda t}$, δείξτε ότι

$$\lambda = \frac{\omega+\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2}$$

(δ′) Βρείτε τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα $\vec{v}$ των λ, όταν ο αποσυντονισμός μηδενίζεται.

(ε′) Βρείτε τι είδους ταλάντωση κάνει το ηλεκτρόνιο υπ' αυτές τις συνθήκες.

Θέμα 3.

Οι διαφορικές εξισώσεις ρυθμών στο laser στην αδιάστατη μορφή:

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \qquad (\varepsilon_1)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \qquad (\varepsilon_2)$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \{\frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1)\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \qquad (\varepsilon_3)$$

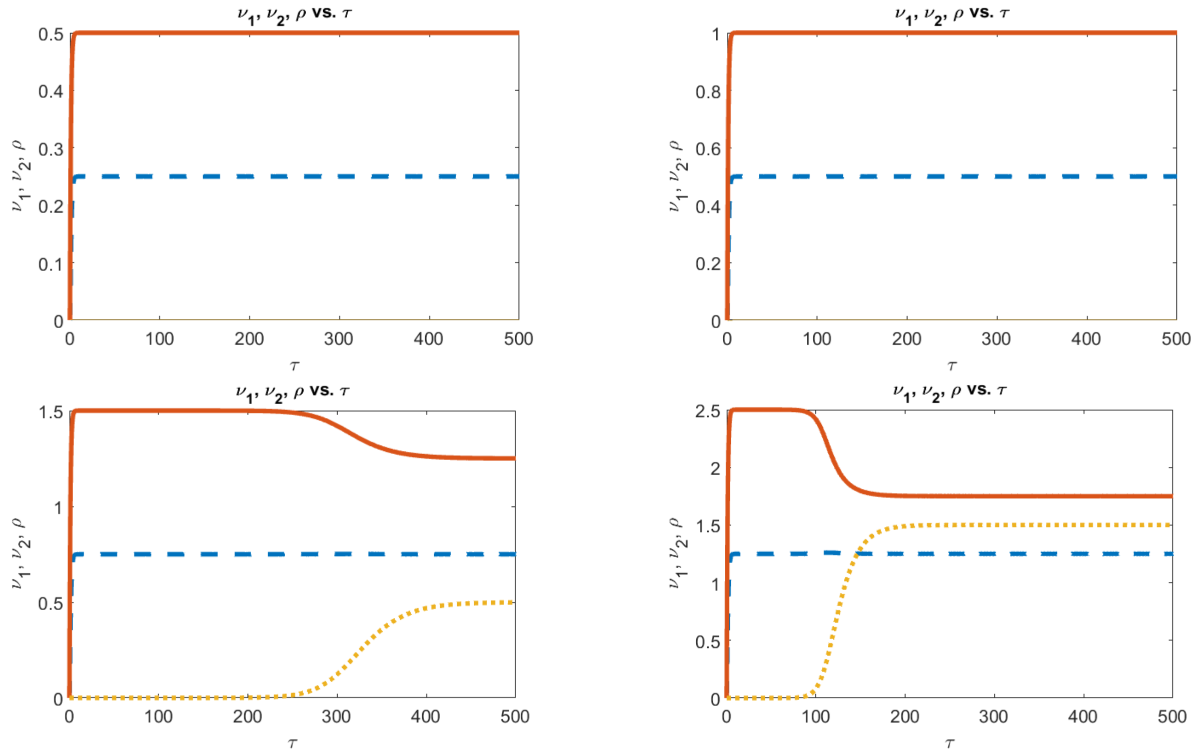
Οι λύσεις τους στη στάσιμη κατάσταση:

$$\nu_1 = \tau_1 r_N, \qquad \forall r_N \qquad (\sigma_1)$$

$$\nu_2 = \begin{cases} r_N, & \forall r_N \le 1 \\ \tau_1 r_N + (1-\tau_1), & \forall r_N \ge 1 \end{cases} \qquad (\sigma_2)$$

$$\varrho = \begin{cases} 0, & \forall r_N \le 1 \\ r_N - 1, & \forall r_N \ge 1 \end{cases} \qquad (\sigma_3)$$

Οι εικόνες παριστάνουν τη λύση τους με matlab.



(α΄) Μια παράμετρος από τις τ_0, τ_1 r_N, $\frac{A'}{A}$ αλλάζει σε αυτές τις εικόνες. Ποια;

(β΄) Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών 1 και 2;

(γ΄) Γιατί στις κάτω εικόνες υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η ϱ για να γίνει αισθητή;

(δ΄) Πόσο είναι το r_N σε κάθε εικόνα;

ΘΕΜΑ 1

α'

100 = 1s κ 200 = 2s δεν εξαρτώνται από τα θ,φ κι επειδή το r δεν αλλάζει όταν $\vec{r} \to -\vec{r}$, είναι άρτιες

Ο αριθμός των κομβικών επιφανειών είναι $n-1$.

Άρα, η 1s δεν έχει κομβική επιφάνεια, δεν μηδενίζεται σε καμία επιφάνεια.

Η 2s έχει μία κομβική επιφάνεια, σφαιρική όταν $\left(2-\frac{r}{a_0}\right)=0 \Rightarrow r=2a_0$

$210 = 2p_z$ είναι περιττή διότι $\vec{r} \to -\vec{r} \Rightarrow \theta \to \theta' = \pi - \theta \Rightarrow$

$$\cos\theta' = \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

μηδενίζεται για $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ στο επίπεδο xy

δηλ. η περιττή $2p_z$ έχει μία επίπεδη κομβική επιφάνεια, το επίπεδο xy.

$310 = 3p_z$ είναι περιττή και πάλι λόγω του $\cos\theta$

μηδενίζεται για $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ στο επίπεδο xy, αλλά και για

$\left(6-\frac{r}{a_0}\right)=0 \Rightarrow r=6a_0$

δηλ. η περιττή $3p_z$ έχει δύο κομβικές επιφάνειες, μία επίπεδη δηλ. το επίπεδο xy και μία σφαιρική με $r=6a_0$

β'

$1s \longleftrightarrow 2s$
A A
απαγορευμένη

$1s \longleftrightarrow 2p_z$
A Π
επιτρέπεται

$1s \longleftrightarrow 3p_z$
A Π
επιτρέπεται

$2s \longleftrightarrow 2p_z$
A Π
επιτρέπεται*

$2s \longleftrightarrow 3p_z$
A Π
επιτρέπεται

$2p_z \longleftrightarrow 3p_z$
Π Π
απαγορεύεται

Λόγω του ολοκληρώματος $\int dV\, \underbrace{\Phi_1^*(\vec{r})}_{\text{Α ή Π}}\, \underbrace{\vec{r}}_{\text{Π}}\, \underbrace{\Phi_2(\vec{r})}_{\text{Α ή Π}}$

αν A επιτρέπεται ίσως

αν Π απαγορεύεται

*Στην 2s ↔ 2p_z στο άτομο του υδρογόνου δεν αλλάζει αυτή η ενέργεια, αυτή η μετάβαση δεν έχει νόημα

1s ↔ 2s A A	$\Delta l = 0$ $\Delta m = 0$	απαγορεύεται	
1s ↔ $2p_z$ A Π	$\Delta l = 1$ $\Delta m = 0$	επιτρέπεται	
1s ↔ $3p_z$ A Π	$\Delta l = 1$ $\Delta m = 0$	επιτρέπεται	
2s ↔ $2p_z$ A Π	$\Delta l = 1$ $\Delta m = 0$	επιτρέπεται *	
2s ↔ $3p_z$ A Π	$\Delta l = 1$ $\Delta m = 0$	επιτρέπεται	
$2p_z$ ↔ $3p_z$ Π Π	$\Delta l = 0$ $\Delta m = 0$	απαγορεύεται	

όπότε, υπακούν στούς κανόνες επιλογής

$\Delta l = \pm 1$

$\Delta m = 0, \pm 1$

$$\lambda_{32} = \frac{12.3 \cdot 10^{-7}\, eVm}{1.9\, eV} = 6.47 \cdot 10^{-7} m \Rightarrow$$

$\lambda_{32} \simeq 647\, nm$ ΟΡΑΤΟ

$$E_i = \frac{-R_E}{i^2} \qquad E_j = \frac{-R_E}{j^2} \qquad |\Delta E| = R_E \cdot \left| \frac{1}{j^2} - \frac{1}{i^2} \right|$$

$$E = hf \qquad c = \lambda f \qquad E = h\frac{c}{\lambda}$$

$E_1 = -13.6\, eV$

$E_2 = -\frac{13.6\, eV}{4} = -3.4\, eV$

$E_3 = -\frac{13.6\, eV}{9} \simeq -1.5\, eV$

$E_2 - E_1 = 10.2\, eV$

$E_3 - E_1 = 12.1\, eV$

$E_3 - E_2 = 1.9\, eV$

$\lambda = \frac{hc}{E}$

$$\lambda = \frac{hc}{E} \qquad hc = 4.1 \cdot 10^{-15}\, eV \cdot s \; 3 \cdot 10^{8}\, m\, s^{-1} = 12.3 \cdot 10^{-7}\, eV \cdot m$$

$$\lambda_{12} = \frac{12.3 \cdot 10^{-7}\, eVm}{10.2\, eV} = 1.20 \cdot 10^{-7} m \simeq 120\, nm$$

$$\lambda_{13} = \frac{12.3 \cdot 10^{-7}\, eVm}{12.1\, eV} \simeq 1.01 \cdot 10^{-7} m \simeq 101\, nm$$

1.3

(γ) $\vec{r}_{kk'} = \int d^3r\, \Phi_k(\vec{r})^* \vec{r}\, \Phi_{k'}(\vec{r})$ $\hat{e}_r$ εξαρτάται από τα θ,φ

$$\vec{r}_{1s\,2p_z} = \int d^3r\, (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \vec{r}\, (32\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{a_0} \cos\theta\, e^{-\frac{r}{2a_0}} =$$

$$(32\pi^2 a_0^6)^{-1/2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} r^2 dr\, e^{-\frac{r}{a_0}}\, r\hat{e}_r \frac{r}{a_0} \cos\theta\, e^{-\frac{r}{2a_0}} =$$

$$\frac{a_0^4}{4\sqrt{2}\pi a_0^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cos\theta\, \hat{e}_r}_{I'} \underbrace{\int_0^{\infty} d\left(\frac{r}{a_0}\right) \frac{r^2}{a_0^2} e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{r}{a_0} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}}}_{I_1} =$$

$\mu := \frac{r}{a_0}$

$$\boxed{\vec{r}_{1s2p_z} \simeq \frac{a_0}{4\pi\sqrt{2}} I'\, 3.16}$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} d\mu\, \mu^4 e^{-\frac{3\mu}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} \cdot 4! = \frac{2^5}{3^5} \cdot 2^3 \cdot 3$$

$\gamma = 3/2 \quad k = 4 \qquad \Rightarrow I_1 = \frac{2^8}{3^4} = \frac{256}{81} \simeq 3.16$

$$\vec{r}_{1s3p_z} = \int d^3r\, (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-\frac{r}{a_0}} \vec{r} \left(\frac{6561\pi a_0^3}{2}\right)^{-1/2} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}} \cos\theta =$$

$$= \left(\frac{6561\pi^2 a_0^6}{2}\right)^{-1/2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cos\theta\, \hat{e}_r \int_0^{\infty} dr\, r^2 e^{-\frac{r}{a_0}} r \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, a_0^4}{\sqrt{6561}\, \pi a_0^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cos\theta\, \hat{e}_r}_{I'} \underbrace{\int_0^{\infty} d\left(\frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{r}{a_0} \left(6 - \frac{r}{a_0}\right) \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}}}_{I_2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, a_0}{\sqrt{6561}\, \pi} \cdot I' \cdot I_2$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} d\mu\, \mu^4 (6 - \mu)\, e^{-\frac{4\mu}{3}}$$

$$= 6 \int_0^{\infty} d\mu\, \mu^4 \cdot e^{-\frac{4\mu}{3}} - \int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu^5 \cdot e^{-\frac{4\mu}{3}}$$

$$= 6 \left(\frac{4}{3}\right)^{-5} \cdot 4! - \left(\frac{4}{3}\right)^{-6} \cdot 5! =$$

$$= 2 \cdot 3\, \frac{3^5}{2^{10}}\, 2 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{3^6}{2^{12}}\, 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$$

$$= \frac{3^7}{2^6} - \frac{3^7 \cdot 5}{2^9} = \frac{2187}{64} - \frac{10935}{512} \simeq 12.81$$

$$\boxed{r_{1s3p_z} = \frac{\sqrt{2}\, a_0}{\sqrt{6561}\, \pi} \cdot I' \cdot 12.81}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\vec{r}_{1s2p_z}}{\vec{r}_{1s3p_z}} &= \frac{\sqrt{6561}\, \cancel{\pi}}{4\cancel{\pi}\sqrt{2}\sqrt{2}} \frac{3.16}{12.81} \\ &= \sqrt{\frac{6561}{16 \cdot 4}} \cdot \frac{3.16}{12.81} \\ &= \frac{81}{8} \cdot \frac{3.16}{12.81} \simeq 2.5 \end{aligned}}$$

$$\vec{r}_{2s3p_z} = \int d^3r \,(32\pi a_0^3)^{-1/2}\left(2-\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} r\hat{e}_r \left(\frac{6561\pi a_0^3}{2}\right)^{-1/2}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}}\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi a_0^3\sqrt{6561}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cos\theta\, \hat{e}_r}_{I'} \int_0^{\infty} dr\, r^2 \left(2-\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} r \left(6-\frac{r}{a_0}\right)\frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$= \frac{a_0}{4\pi\sqrt{6561}} \cdot I' \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} d\mu\, \mu^4 (2-\mu)(6-\mu)\, e^{-\frac{5\mu}{6}}}_{I_3}$$

$$I_3 = 12\int_0^{\infty} d\mu\, \mu^4 e^{-\frac{5\mu}{6}} + \int_0^{\infty} d\mu\, \mu^6 e^{-\frac{5\mu}{6}} - 8\int_0^{\infty} d\mu\, \mu^5 e^{-\frac{5\mu}{6}}$$

$$= 12\left(\frac{5}{6}\right)^{-5} 4! + \left(\frac{5}{6}\right)^{-7} 6! - 8\left(\frac{5}{6}\right)^{-6} 5!$$

$$= 12\left(\frac{6}{5}\right)^{5} \cdot 4! + \left(\frac{6}{5}\right)^{7} 6! - 8\left(\frac{6}{5}\right)^{6} 5!$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot 2\cdot 2^5\cdot 3^5\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5^5} + \frac{2^7\cdot 3^7\cdot 2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 5\cdot 2\cdot 3}{5^7} - 2^3\,\frac{2^6\cdot 3^6\cdot 2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 5}{5^6}$$

$$= \frac{2^{10}\cdot 3^7}{5^5} + \frac{2^{11}\cdot 3^9}{5^6} - \frac{2^{12}\cdot 3^7}{5^5}$$

$\sqrt{6561} = 81$
$= 9^2 = 3^4$

$$= \frac{2^{10}\cdot 3^7(1-4)}{5^5} + \frac{2^{11}\cdot 3^9}{5^6} = \frac{2^{10}\cdot 3^7}{5^5}\left(-3 + \frac{2\cdot 9}{5}\right) =$$

$$= \frac{2^{10}\cdot 3^8}{5^5}\left(\frac{6}{5} - 1\right) = \frac{2^{10}\cdot 3^8}{5^5}\,\frac{1}{5} = \frac{2^{10}\cdot 3^8}{5^6}$$

$$\boxed{\frac{\vec{r}_{1s2p_z}}{\vec{r}_{2s3p_z}} = \frac{a_0\, I'\, 2^8}{4\pi\sqrt{2}\; 3^4} \cdot \frac{4\pi\sqrt{6561}\cdot 5^6}{a_0\, I'\, 2^{10}\cdot 3^8} = \frac{5^6}{2^2\sqrt{2}\cdot 3^8} = \frac{15625}{6561\cdot 4\sqrt{2}} \simeq 0.42}$$

$$\boxed{\frac{\vec{r}_{1s3p_z}}{\vec{r}_{2s3p_z}} = \frac{\sqrt{2}\, a_0\, I' \cdot 12.81\; 4\pi \cdot 3^4\; 5^6}{3^4 \cdot \pi\, a_0\, I'\; 2^{10}\cdot 3^8} = \frac{\sqrt{2}\; 12.81}{2^8\cdot 3^8}\cdot 5^6 = \frac{\sqrt{2}\cdot 12.81\cdot 15625}{256\cdot 6561} \simeq 0.168}$$

ΘΕΜΑ 2

α΄

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega \hat{a}^{+}\hat{a} + \hbar\Omega \hat{S}_{+}\hat{S}_{-} + \hbar g(\hat{S}_{+}\hat{a} + \hat{S}_{-}\hat{a}^{+})$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle$$

$$\langle \hat{a}^{+}\hat{a}\rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\hat{a}^{+}\hat{a}\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}1|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\cdot 0\cdot|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \frac{e^{-i\Omega t}\cdot e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\cdot 1\cdot\langle\downarrow 1|\downarrow 1\rangle + \text{μηδενικά} = \frac{1}{2}$$

$$\langle \hat{a}\hat{a}^{+}\rangle = \langle 1 + \hat{a}^{+}\hat{a}\rangle = \langle 1\rangle + \langle \hat{a}^{+}\hat{a}\rangle = \frac{3}{2}$$

$$[\hat{a},\hat{a}^{+}] = 1 \Rightarrow$$
$$\hat{a}\hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{a} = 1 \Rightarrow$$
$$\hat{a}\hat{a}^{+} = 1 + \hat{a}^{+}\hat{a}$$

ή

$$\langle \hat{a}\hat{a}^{+}\rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\hat{a}\hat{a}^{+}\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}2|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}1|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\cdot 2\langle\downarrow 1|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\cdot 1\langle\uparrow 0|\uparrow 0\rangle + \text{μηδενικά}$$

$$= \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\langle \hat{S}_{+}\hat{S}_{-}\rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\hat{S}_{+}\hat{S}_{-}\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\phi 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\cdot 1|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\uparrow 0\rangle + \text{μηδενικά} = \frac{1}{2}$$

$$\langle \hat{S}_{-}\hat{S}_{+}\rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\hat{S}_{-}\hat{S}_{+}\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\phi 0\rangle\right)$$

$$= \frac{e^{-i\Omega t}\cdot e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\langle\downarrow 1|\downarrow 1\rangle + \text{μηδενικά} = \frac{1}{2}$$

2.2

$$\langle \hat{S}_+ \hat{a} \rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0| \right) \hat{S}_+ \hat{a} \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\uparrow 0\rangle \right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0| \right) \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{1} |\uparrow 0\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\phi\, 0\rangle \right)$$

$$= \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0 | \uparrow 0 \rangle = \frac{e^{2i\Omega t}}{2}$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0| \right) \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\uparrow 0\rangle \right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0| \right) \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{2} |\phi\, 2\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{1} |\downarrow 1\rangle \right)$$

$$= \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1 | \downarrow 1 \rangle + \text{μηδενικά} = \frac{e^{-2i\Omega t}}{2}$$

$$\langle \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0| \right) \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\uparrow 0\rangle \right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0| \right) \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{2} |\uparrow 2\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{1} |\phi\, 1\rangle \right)$$

$$= \text{όλα μηδενικά} = 0$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{a} \rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0| \right) \hat{S}_- \hat{a} \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\uparrow 0\rangle \right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0| \right) \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} 1 |\phi\, 0\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\downarrow 0\rangle \right)$$

$$= \text{όλα μηδενικά} = 0$$

(β') $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}_{JC}|\psi(t)\rangle \Rightarrow$

$$i\hbar\, i\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + i\hbar(-i\Omega)\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle =$$

$$\hbar\omega \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right) +$$

$$\hbar\Omega \hat{S}_{+}\hat{S}\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right) +$$

$$\left(\hbar g \hat{S}_{+}\hat{a} + \hbar g \hat{S}_{-}\hat{a}^{\dagger}\right)\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right) \Rightarrow$$

$$-\hbar\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \hbar\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle =$$

$$\hbar\omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\, 1\, |\downarrow 1\rangle + \hbar g \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\, 0\, |\uparrow 0\rangle +$$

$$\hbar\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\phi 1\rangle + \hbar\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle +$$

$$\hbar g \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle + \hbar g \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 0\rangle$$

$$\hbar g \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\sqrt{2}|\phi 2\rangle + \hbar g \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\, 1\, |\downarrow 1\rangle$$

* επί $\langle \downarrow 1| \Rightarrow -\cancel{\hbar}\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} = \hbar\omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} + \hbar g \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}$

* επί $\langle \uparrow 0| \Rightarrow \cancel{\hbar}\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} = \cancel{\hbar}\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} + \cancel{\hbar} g \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}$

ή συνοπτικώς

$$\underset{i\dot{\vec{x}}(t)}{\begin{bmatrix} -\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{bmatrix}} \underset{\vec{x}(t)}{\begin{pmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

2.4

(γ') $\vec{x}(t) := \begin{bmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} i\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ -i\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = -i \begin{bmatrix} -\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Άρα, το σύστημα γίνεται

$i\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$

Δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής $\vec{x}(t) = \vec{u}\, e^{-i\lambda t}$

$\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \vec{u}(-i\lambda)e^{-i\lambda t}$

$i\vec{u}(-i\lambda)e^{-i\lambda t} = A\vec{u}e^{-i\lambda t} \Rightarrow \boxed{A\vec{u} = \lambda\vec{u}}$

δηλ. καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοανυσμάτων - ιδιοτιμών του πίνακα A

$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Rightarrow A\vec{u} = \lambda I\vec{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} \omega-\lambda & g \\ g & \Omega-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

για μη τετριμμένη λύση, πρέπει $\det = 0 \Rightarrow$

$(\omega-\lambda)(\Omega-\lambda) - g^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (\omega+\Omega)\lambda + \omega\Omega - g^2 = 0$

Διακρίνουσα $\Delta' = (\omega+\Omega)^2 - 4\cdot 1(\omega\Omega - g^2) = \omega^2 + \Omega^2 + 2\omega\Omega - 4\Omega\omega + 4g^2$

$\Delta' = (\omega-\Omega)^2 + 4g^2$

$\lambda_{1,2} = \frac{(\omega+\Omega) \pm \sqrt{(\omega-\Omega)^2 + 4g^2}}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{\omega+\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2} = \frac{\Sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2}}$$

για αποσυντονισμό $\Delta = 0 \Rightarrow \omega = \Omega \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = \omega \pm g}$

(δ) $\lambda_1 = \omega - g$

$$\begin{bmatrix} \omega & g \\ g & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = (\omega - g) \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \cancel{\omega u_{11}} + g u_{21} &= \cancel{\omega u_{11}} - g u_{11} \\ g u_{11} + \cancel{\omega u_{21}} &= \cancel{\omega u_{21}} - g u_{21} \end{aligned}$$

$$u_{21} = -u_{11}$$

$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix}$ κανονικοποίηση $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1 \Rightarrow 2|c|^2 = 1 \Rightarrow |c|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

π.χ. $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = \omega + g$

$$\begin{bmatrix} \omega & g \\ g & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = (\omega + g) \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \cancel{\omega u_{12}} + g u_{22} &= \cancel{\omega u_{12}} + g u_{12} \\ g u_{12} + \cancel{\omega u_{22}} &= \cancel{\omega u_{22}} + g u_{22} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_{22} = u_{12}$$

$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$ κανονικοποίηση $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1 \Rightarrow 2|c|^2 = 1 \Rightarrow |c|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

π.χ. $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(ε) $c_1(t) = \dfrac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}$ $\quad c_2(t) = \dfrac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}$

$$|c_1(t)|^2 = \frac{1}{2} = |c_2(t)|^2$$

Η πιθανότητα μοιράζεται εξ ίσου, συνεχώς, ∄ ταλάντωση

ΘΕΜΑ 3

(α') Στις δύο πρώτες εικόνες $\theta = 0$, ενώ στις επόμενες $\theta \neq 0$.
Από τις εξισώσεις για τη στάσιμη κατάσταση, φαίνεται πως θα πρέπει να αλλάζει το r_N, αφού το εάν το $r_N \geq 1$ ή $r_N < 1$ καθορίζει το αν θα υπάρχει $\theta \neq 0$ ή όχι.

(β') Επί παραδείγματι, στην 1η εικόνα (όπου $\theta = 0 \Leftrightarrow r_N \leq 1$) στη στάσιμη κατάσταση,
(δ')

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \tau_1 r_N = 0.25 \\ v_2 &= \boxed{r_N = 0.5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{0.25}{0.5} = \tau_1 \Rightarrow \boxed{\tau_1 = 0.5} \Rightarrow \boxed{\frac{t_1}{t_2} = 0.5}$$

Στη 2η εικόνα (όπου $\theta = 0 \Leftrightarrow r_N < 1$)

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \tau_1 r_N = 0.5 \\ v_2 &= \boxed{r_N = 1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_1 = \frac{0.5}{1} \Rightarrow \boxed{\tau_1 = 0.5}$$

Στην 3η εικόνα (όπου $\theta \neq 0 \Leftrightarrow r_N \geq 1$)

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \tau_1 r_N = 0.75 \\ v_2 &= \tau_1 r_N + (1-\tau_1) = 1.25 \end{aligned}\right\} \quad 1 - \tau_1 = 0.5 \Rightarrow \boxed{\tau_1 = 0.5}$$

κ π.χ. $v_1 = \tau_1 r_N \Rightarrow 0.75 = 0.5 \cdot r_N \Rightarrow \boxed{r_N = 1.5}$

κ π.χ. $v_2 = \tau_1 r_N + (1-\tau_1) \Rightarrow 1.25 = 0.5 r_N + 0.5 \Rightarrow r_N = \frac{0.75}{0.5}$

Στην 4η εικόνα (όπου $\theta \neq 0 \Leftrightarrow r_N \geq 1$)

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \tau_1 r_N = 1.25 \\ v_2 &= \tau_1 r_N + (1-\tau_1) = 1.75 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1-\tau_1) = 0.5 \Rightarrow \boxed{\tau_1 = 0.5}$$

κ π.χ. $v_1 = \tau_1 r_N \Rightarrow 1.25 = 0.5 r_N \Rightarrow \boxed{r_N = 2.5}$

κ π.χ. $v_2 = \tau_1 r_N + (1-\tau_1) \Rightarrow 1.75 = 0.5 r_N + 0.5 \Rightarrow \boxed{r_N = 2.5}$

(γ') $r_N \uparrow \Rightarrow \frac{dv_2}{d\tau} \uparrow \Rightarrow \frac{A'}{A} v_2 \uparrow \Rightarrow \frac{d\theta}{d\tau} \uparrow$ οπότε,

αυξάνοντας το r_N οδηγούμαστε σε πιο γρήγορη αύξηση του θ