Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

**Κβαντική Οπτική και Lasers.**

Εξέταση της 12ης Ιουνίου 2019. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

**Θέμα 1.** Ημικλασική προσέγγιση. Δίνεται η εξίσωση $\dot{C}_{k'}(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_k C_k(t)\, e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t} U_{\mathcal{E}k'k}(t)$.
Έστω τρισταθμικό σύστημα το οποίο δημιουργείται από τριδιάστατο κβαντικό φρέαρ, ώστε:
στον άξονα $y$ έχουμε μόνο μία στάθμη $E_{0y}$ με άρτια, εννοείται, ιδιοσυνάρτηση,
στον άξονα $z$ έχουμε μόνο μία στάθμη $E_{0z}$ με άρτια , εννοείται, ιδιοσυνάρτηση, ενώ
στον άξονα $x$ έχουμε απλό αρμονικό ταλαντωτή (ΑΑΤ) με τις τρεις κατώτερες στάθμες του μόνο, κι ενεργειακό φάσμα $E_n = \hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right), n = 0, 1, 2$. Δίνεται η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων του ΑΑΤ
$\varphi_n(x) = u_n(x)\, e^{-\frac{m\Omega x^2}{2\hbar}}, u_0(x) = \sqrt{\frac{1}{a\sqrt{\pi}}}, u_1(x) = \sqrt{\frac{1}{a\sqrt{\pi}}}2\left(\frac{x}{a}\right), u_2(x) = \sqrt{\frac{1}{8a\sqrt{\pi}}}\left[2-4\left(\frac{x}{a}\right)^2\right], a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}}$.
Οι μεταβλητές $x, y, z$ χωρίζονται. Παίρνουμε ως επίπεδο αναφοράς το $E_{0y} + E_{0z}$. Η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου γράφεται $E_n = \hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right), n = 0, 1, 2$. Μπορούμε να θεωρήσουμε και το δείκτη $k = n + 1$. Η δυναμική ενέργεια της διαταραχής $U(\vec{r}, t) = e\vec{\mathcal{E}}(t)\cdot\vec{r} = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}(t), \vec{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0\hat{z}\cos\omega t$.

**(α΄)** Αποδείξτε πως ικανοποιούνται οι εξισώσεις

$$\dot{C}_1(t) = \frac{i}{\hbar}C_2(t)e^{-i\Omega t}p\mathcal{E}_0\cos\omega t$$
$$\dot{C}_2(t) = \frac{i}{\hbar}C_1(t)e^{i\Omega t}p\mathcal{E}_0\cos\omega t + \frac{i}{\hbar}C_3(t)e^{-i\Omega t}p'\mathcal{E}_0\cos\omega t$$
$$\dot{C}_3(t) = \frac{i}{\hbar}C_2(t)e^{i\Omega t}p'\mathcal{E}_0\cos\omega t$$

όπου $p = p_{z12} = -ez_{12} = -ez_{21} = p_{z21}$ και $p' = p_{z23} = -ez_{23} = -ez_{32} = p_{z32}$.

**(β΄)** Τι είναι η προσέγγιση περιστρεφόμενου ανύσματος (rotating wave approximation, RWA) ; Εφαρμόστε την στις εξισώσεις του προηγουμένου βήματος και αποδείξτε πως

$$\dot{C}_1(t) = \frac{i}{2}\,\Omega_R\, C_2(t)\, e^{i\Delta t}$$
$$\dot{C}_2(t) = \frac{i}{2}\,\Omega_R\, C_1(t)\, e^{-i\Delta t} + \frac{i}{2}\,\Omega_{R'}\, C_3(t)\, e^{i\Delta t}$$
$$\dot{C}_3(t) = \frac{i}{2}\,\Omega_{R'} C_2(t)\, e^{-i\Delta t}$$

**(γ΄)** Κάντε το μετασχηματισμό

$$C_1(t) = \mathbb{C}_1(t)e^{i\Delta t/2}$$
$$C_2(t) = \mathbb{C}_2(t)e^{-i\Delta t/2}$$
$$C_3(t) = \mathbb{C}_3(t)e^{-3i\Delta t/2}$$

και δείξτε ότι προκύπτει το σύστημα

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbb{C}}_1(t)\\ \dot{\mathbb{C}}_2(t)\\ \dot{\mathbb{C}}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\frac{\Delta}{2} & i\frac{\Omega_R}{2} & 0 \\ i\frac{\Omega_R}{2} & i\frac{\Delta}{2} & i\frac{\Omega_R{}'}{2} \\ 0 & i\frac{\Omega_R{}'}{2} & i\frac{3\Delta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{C}_1(t)\\ \mathbb{C}_2(t)\\ \mathbb{C}_3(t)\end{bmatrix}$$

ή $\dot{\vec{\chi}}(t) = \tilde{A}\vec{\chi}(t)$.

**(δ΄)** Δοκιμάστε λύσεις της μορφής $\vec{\chi}(t) = \vec{v}e^{\tilde{\lambda}t}$ και δείξτε ότι προκύπτει η εξίσωση ιδιοτιμών $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\tilde{A} = -iA$, $\tilde{\lambda} = -i\lambda$. Ποιός είναι ο πίνακας $A$;

**(ε΄)** Λύστε την εξίσωση ιδιοτιμών για $\Delta = 0$, δηλαδή βρείτε ιδιοτιμές και ιδιοανύσματα.

**(ς΄)** Αφού η γενική λύση θα είναι της μορφής

$$\vec{\chi}(t) = \sum_{k=1}^{3}\sigma_k\vec{v}_k e^{-i\lambda_k t}$$

βρείτε τα $\sigma_k$ για αρχικές συνθήκες $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0, C_3(0) = 0$.

**(ζ΄)** Αποδείξτε πως $|C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Omega_{R'}^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\Lambda t)}{2}\right)$, όπου $2\Lambda = \sqrt{\Omega_R^2 + \Omega_{R'}^2}$ .

**(η΄)** Βρείτε την περίοδο της πιθανότητας παρουσίας του ηλεκτρονίου στη στάθμη 2, το αντίστοιχο μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως και τη μέση πιθανότητα παρουσίας του ηλεκτρονίου στη στάθμη 2.

**Θέμα 2.**

Οι διαφορικές εξισώσεις ρυθμών στο laser στην αδιάστατη μορφή:

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \qquad (\varepsilon_1)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \qquad (\varepsilon_2)$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \{\frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1)\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \qquad (\varepsilon_3)$$

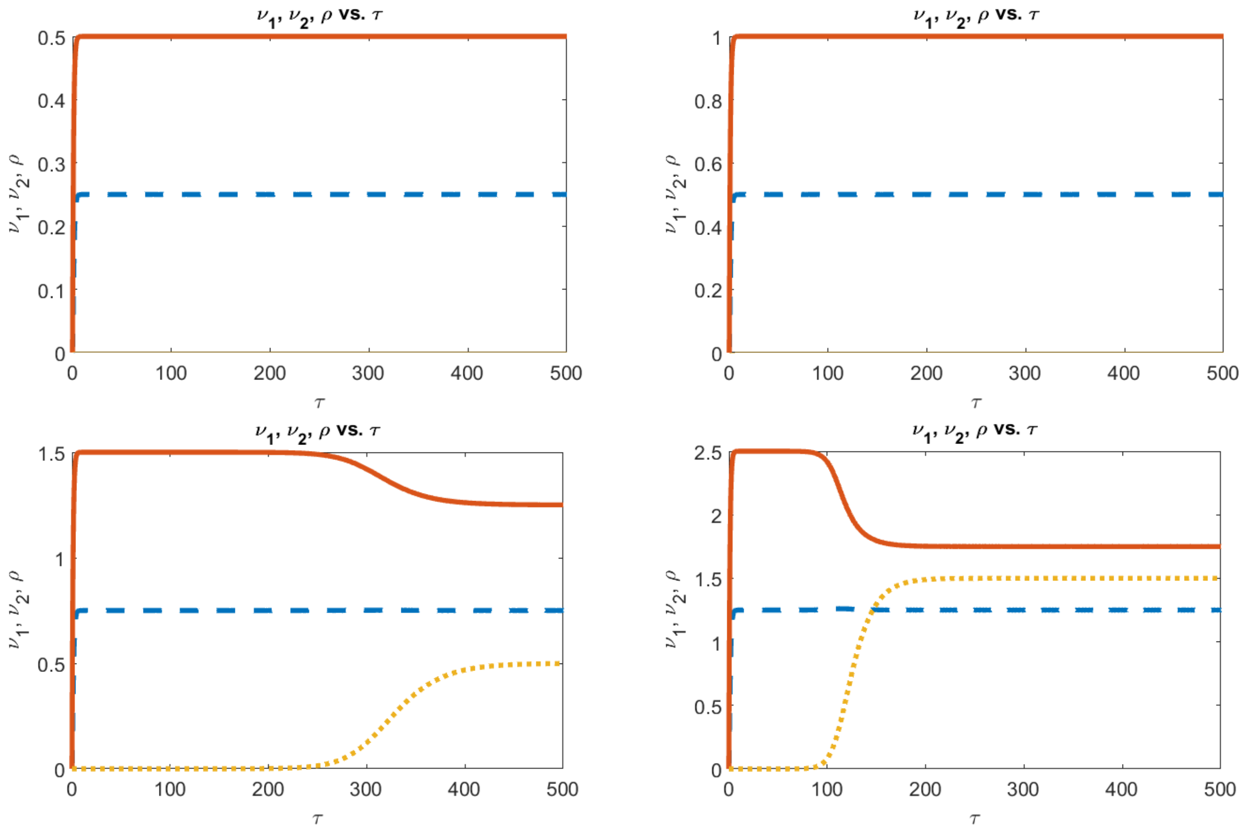
Οι λύσεις τους στη στάσιμη κατάσταση:

$$\nu_1 = \tau_1 r_N, \qquad \forall r_N \qquad (\sigma_1)$$

$$\nu_2 = \begin{cases} r_N, & \forall r_N \leq 1 \\ \tau_1 r_N + (1-\tau_1), & \forall r_N \geq 1 \end{cases} \qquad (\sigma_2)$$

$$\varrho = \begin{cases} 0, & \forall r_N \leq 1 \\ r_N - 1, & \forall r_N \geq 1 \end{cases} \qquad (\sigma_3)$$

Οι εικόνες παριστάνουν τη λύση τους με matlab.




**(α΄)** Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών 1 και 2;

**(β΄)** Μια παράμετρος από τις $\tau_0$, $\tau_1$ $r_N$, $\frac{A'}{A}$ αλλάζει σε αυτές τις εικόνες. Ποιά;

**(γ΄)** Γιατί στις κάτω εικόνες υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η $\varrho$ για να γίνει αισθητή;

**(δ΄)** Πόσο είναι το $r_N$ σε κάθε εικόνα;

**Θέμα 3. (Εναλλακτικά, αντί για δύο ερωτήματα του θέματος 1)**

**(α΄)** Θεωρήστε δισταθμικό σύστημα με $E_2 - E_1 = \hbar\Omega$. Υπολογίστε τα $\langle\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m\rangle$, $\langle\hat{a}_m \hat{a}_m^\dagger\rangle$, $\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$, $\langle\hat{S}_-\hat{S}_+\rangle$, $< \hat{S}_+\hat{a}_m >$, $< \hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger >$, $< \hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger >$, $< \hat{S}_-\hat{a}_m >$ για την κατάσταση:

$$|\psi(t)> = \cos\Omega t\,|\downarrow,1> + \sin\Omega t\,|\uparrow,0>$$

**(β΄)** Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Rabi ενός ΗΜ τρόπου.

$$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_-\hat{a}_m)\,.$$

Εξηγήστε όλα τα σύμβολα και συνοπτικά τι περιγράφει κάθε προσθετέος. Στον τελευταίο προσθετέο $\hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_-\hat{a}_m)$ υπάρχουν 4 «υποπροσθετέοι». Εξηγήστε ποια διαδικασία περιγράφει ο καθένας από αυτούς και με ποια δικαιολογία αγνοούμε 2 από τους 4 υποπροσθετέους στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings. Ισχύει η ίδια δικαιολογία όταν έχουμε πολλούς τρόπους $m$;