Στοιχειώδης Αριθμός Κανονικών Τρόπων ΗΜ πεδίου (dN) ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας ($d\nu$)

$$g(\nu)=\frac{dN}{d\nu}=\frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$$

$$[g(\nu)]=\frac{1}{Hz}=s$$

$$\frac{g(\nu)}{V}=\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \qquad \left[\frac{g(\nu)}{V}\right]=\frac{1}{m^3\,Hz}=\frac{s}{m^3}$$

$$\rho(\nu,T)=\frac{g(\nu)}{V}\cdot\bar{E} \qquad [\rho(\nu,T)]=\frac{J}{m^3\,Hz}=\frac{Js}{m^3}$$

$\bar{E}$: μέση ενέργεια κανονικού τρόπου

κλασικά

$$\bar{E}=\overline{E(T)}=\frac{M}{2}k_BT$$

$M=\#$ βαθμών ελευθερίας

Θεώρημα Ισοκατανομής ενέργειας

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{M}{2}k_BT \xrightarrow{\text{για } M=2} \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot k_BT}$$ ν. Rayleigh-Jeans

παλαιο-κβαντικά

$$\bar{E}=\overline{E(\nu,T)}=\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

προϋποθέσεις

- $E_n=nh\nu$ ενέργεια "ταλαντωτή", $n=0,1,2,\dots$
- $\overline{E(\nu,T)}=\sum_n E_n\cdot P_n$

(όπως είπαμε) στην αρχή του μαθήματος ο μέσος αριθμός σωματιδίων στην κατάσταση n με ενέργεια E_n είναι

$$\frac{Ne^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}}=\bar{n}_n \longleftrightarrow P_n=\frac{e^{-\beta E_n}}{Z}, \quad Z=\sum_n e^{-\beta E_n}$$

στατιστική (Maxwell-) Boltzmann (MB)

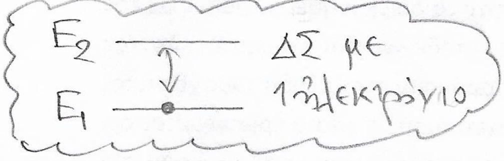
$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T)=\frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}}$$ ν. Planck

ΑΣΚΗΣΗ-Σημείωση: Αν αντί του $E_n=nh\nu$ βάλουμε $E_n=h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right)$ όπως γνωρίζουμε σήμερα για τον κβαντικό ΑΑΤ <u>ΔΕΝ</u> προκύπτει ο νόμος του Planck!

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ
ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ – ΥΛΗΣ (ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ) ↗ΔΣ

LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation
Ἐξαναγκασμένη Ἐκπομπή
ἤ Διεγερμένη

1916 – 1917 A. Einstein "Θεωρητικά θεμέλια" του LASER
επαν- εξαγωγή τοῦ ν. Planck για την ἀκτινοβολία μέλανος σώματος



Αὐτή τη φορά ἡ ἀπόδειξη στηρίζεται στους 3 μηχανισμούς ἢ διεργασίες ἀλληλεπιδράσεων ΗΜ ἀκτινοβολίας – ΔΣ ΚΑΙ στη στατιστική (Maxwell) – Boltzmann για την κατάληψη των σταθμών του ΔΣ ἀπό το ἠλεκτρόνιο.

(Stimulated) Absorption (Ἐξαναγκασμένη) Ἀπορρόφηση } "παλαιότερα
Spontaneous Emission Αὐθόρμητη Ἐκπομπή } γνωστοί"
Stimulated Emission Ἐξαναγκασμένη Ἐκπομπή ← εἰσήχθη ἀπό τον A. Einstein

$\boxed{\text{γιατί MB και ὄχι FD;}}$

Συντελεστές Einstein

ὀφείλεται στο $\rho(\nu,T)$ ⟷ Ἐξαναγκασμένο B_{ij}
ΔΕΝ ὀφείλεται στο $\rho(\nu,T)$ ⟷ Αὐθόρμητο A_{ij}
i ἀρχική στάθμη τοῦ ἠλεκτρονίου
j τελική στάθμη τοῦ ἠλεκτρονίου

πιθανότητα να συμβεῖ ἡ διεργασία

$$dW^{\epsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt$$

$$dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\epsilon\kappa\pi} = A_{21}\,dt$$

$$dW^{\epsilon\xi}_{\epsilon\kappa\pi} = B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt$$

ΕΡΩΤΗΣΗ γιατί MB κι ὄχι FD;
(μάλλον δεν υπάρχει τότε FD, σε ὑψηλές T FD → MB, ἔχουμε 1 ηλεκτρόνιο στο ΔΣ)

1905 A. Einstein ἐξήγησε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ὑποθέτοντας ὅτι ∃ κβάντα φωτός με ἐνέργεια $h\nu$

1926 μάλλον ἀπό τον Gilbert Newton Lewis «φωτόνιο» = κβάντο φωτός

1950 – 1960 κατασκευάστηκαν τα πρῶτα MASER κι LASER
↑ microwaves

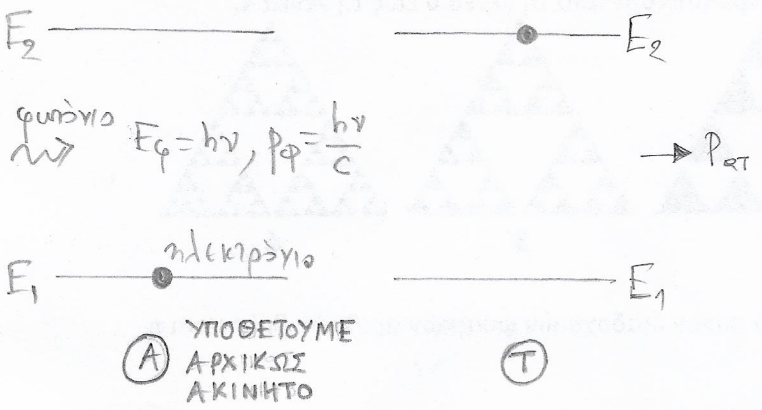
ΣΗΜΕΡΑ …

1964 Charles Townes, Nikolay Basov, Aleksandr Prokhorov Νόμπελ Φυσικής

(ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (ή διεγερμένη)) ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ
(STIMULATED) ABSORPTION

εδώ
ΔΣ = δύο στάθμες ενός ατόμου

$$dW^{εξ}_{απορ} = B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt$$



Διατήρηση Ενέργειας

$$E_1 + h\nu = E_2 + \cancel{\frac{p_{ατ}^2}{2m_{ατ}}}$$

υποθέτουμε αμελητέα $\Rightarrow h\nu \simeq E_2 - E_1$

Διατήρηση Ορμής

$$p_φ = p_{ατ} \Rightarrow \frac{h\nu}{c} = p_{ατ} \Rightarrow p_{ατ} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$c = \lambda\nu \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Ας ελέγξουμε αν πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου $\frac{p_{ατ}^2}{2m_{ατ}}$ μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου $E_φ$.

$$Λ := \frac{\frac{p_{ατ}^2}{2m_{ατ}}}{E_φ} = \frac{h^{\cancel{2}}\,\cancel{\lambda}}{\lambda^{\cancel{2}}\, 2m_{ατ}\,\cancel{h}c} = \frac{h}{2m_{ατ}\lambda c}$$

Για να μεγαλώσει το Λ θα πρέπει η $m_{ατ}$ να μικρύνει.
Ας πάρουμε λοιπόν το μικρότερο δυνατό άτομο, το άτομο του Υδρογόνου.

$$\left.\begin{array}{l} m_e \simeq 9.109\;10^{-31}\,kg \\ m_p \simeq 1.673\;10^{-27}\,kg \\ m_{ατ} \approx m_p + m_e \end{array}\right\} \quad m_{ατ} \simeq 1.673\cdot 10^{-27}\,kg$$

↑ υπάρχει κι ένα μικρό έλλειμμα μάζας, δηλαδή η ενέργεια συνδέσεως του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου στο άτομο.

Ας πάρουμε ένα τυπικό πράσινο φωτόνιο με $\lambda \simeq 500\,nm$

$$Λ = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,\cancel{J}s}{2\cdot 1.673\cdot 10^{-27}\,\cancel{kg}\;500\cdot 10^{-9}\,\cancel{m}\;3\cdot 10^{8}\,\cancel{m}/\cancel{s}} \simeq 1.320\cdot 10^{-9}$$

Οπότε, πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου.

Για ποιό μήκος κύματος λ, στο άτομο του υδρογόνου, θα μπορούσε ο λόγος Λ να γίνει ίσος με 0.05; -2-

$$\Lambda = \frac{h}{2\lambda c\, m_{at}} = 0.05 \Rightarrow \lambda = \frac{h}{2 c\, m_{at}\, 0.05} = \frac{6.626\ 10^{-34}\ Jss}{2\cdot 3\cdot 10^{8}\, m\ \ 1.673\cdot 10^{-27}\, kg\ \ 0.05}$$

$$\Rightarrow \lambda \simeq 13.2\cdot 10^{-15}\, m = 13.2\ fm$$

Αυτό είναι ένα εξαιρετικά μικρότερο μήκος κύματος

π.χ. ακτίνες γ $\quad \lambda_\gamma \lesssim 10\ pm = 10.10^{-12}\, m = 10^{-11}\, m$

ενώ εδώ βρήκαμε $\ 13.2\ 10^{-15}\, m = 13.2\ fm$

Διάμετρος πυρήνα Υδρογόνου $\quad$ 1.75 fm

Ουράνιο $\quad$ 15 fm

Άρα, η υπόθεσή μας, να θεωρήσουμε αμελητέα
την κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου

$$\frac{P_{at}^2}{2 m_{at}}$$

σε σχέση με
την ενέργεια του απορροφούμενου φωτονίου E_φ
είναι σωστή
σχεδόν σε όλο το ΗΜ φάσμα.

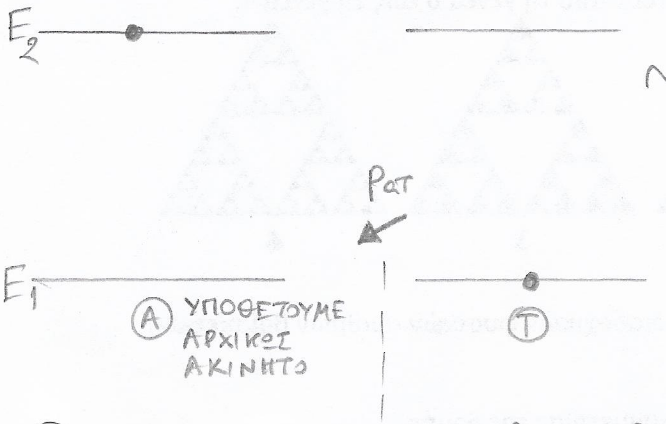
ΑΥΘΟΡΜΗΤΗ ΕΚΠΟΜΠΗ
SPONTANEOUS EMISSION

$$dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\varepsilon\kappa\pi} = A_{21} \cdot dt$$

energy level lifetime (τ_2 ή τ)

χρόνος ζωής της στάθμης 2

(το ηλεκτρόνιο από τη στάθμη 2 αποδιεγείρεται στη στάθμη 1)



$E_\varphi = h\nu$

$P_\varphi = \frac{h\nu}{c}$

$$1 := A_{21} \cdot \tau_2 \text{ ή } A_{21} \cdot \tau$$

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{A_{21}}$$

απλοϊκός ορισμός...

Το άτομο θα κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση με το φωτόνιο

Διατήρηση Ενέργειας $\quad E_2 = E_1 + E_\varphi + \underbrace{\frac{P_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}}_{\text{αμελητέα}} \Rightarrow h\nu \simeq E_2 - E_1$

Διατήρηση Ορμής $\quad 0 = P_{\alpha\tau} + P_\varphi \Rightarrow P_{\alpha\tau} = -P_\varphi$

Τα φωτόνια εκπέμπονται σε τυχαία κατεύθυνση, δηλαδή χωρίς κατευθυντικότητα (without directionality)

με τυχαία φάση, δηλαδή χωρίς συνοχή (incoherence)

συνοχή (coherence) ή συμφωνία, συμφασικότητα

= σταθερή σχέση μεταξύ των φάσεων των κυμάτων

coherent — συνεκτικός → π.χ. laser

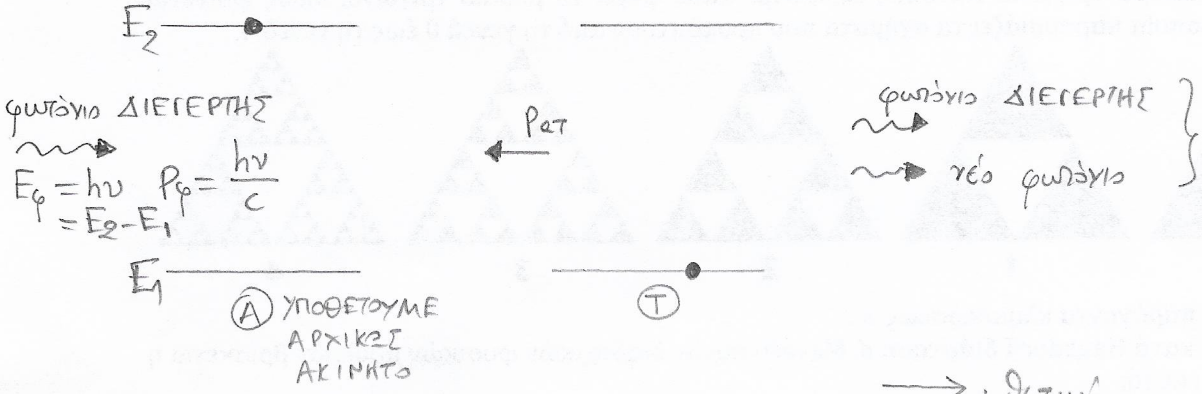
incoherent — μη συνεκτικός — π.χ. φωτεινή πηγή πυρακτώσεως (incandescent light source) ή LED Light Emitting Diode

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (ή διεγερμένη) ΕΚΠΟΜΠΗ
STIMULATED EMISSION

A. Einstein
"Zur Quantentheorie der Strahlung"
1916, 1917

4

$$dW^{εξ}_{εκπ} = B_{21}\, \rho(\nu T)\, dt$$



"ΚΛΩΝΟΙ"
δύο φωτόνια με ίδια
- ενέργεια
- ορμή (κατεύθυνση)
- φάση
- πόλωση

→ + θετική φορά

ίδια ενέργεια ⇒ μονοχρωματικότητα (monochromaticity)
ίδια ορμή (κατεύθυνση) ⇒ κατευθυντικότητα (directionality)
* ίδια φάση ⇒ συνοχή (coherence)
ίδια πόλωση ⇒ πολωμένο φως (polarized light) *

* υπάρχουν και οι άλλοι μηχανισμοί στο παιχνίδι...

→ Τα περί φάσεως κ πολώσεως ∄ στο άρθρο του Einstein

→ τα φωτόνια είναι μποζόνια και άρα μπορούν να έχουν ίδια ενέργεια, ορμή (κατεύθυνση), φάση, πόλωση

→ χρειάζεται η υπόθεση ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ ενέργειας $E_φ = E_2 - E_1 = h\nu$ δεν παθαίνει τίποτε κατά τη διάρκεια της εξαναγκασμένης εκπομπής

→ θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ καθορίζει τη φάση, την πόλωση κ τη διεύθυνση του νέου εκπεμπόμενου φωτονίου όπως σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης καθορίζει τη φάση, την πόλωση κ τη διεύθυνση της εξαναγκασμένης ταλαντώσεως

Διατήρηση Ενέργειας $E_2 + \cancel{E_\varphi} = E_1 + \cancel{E_\varphi} + E_\varphi' + \cancel{\frac{P_{ατ}^2}{2M_{ατ}}}$ αμελητέο

(5)

$\Rightarrow E_\varphi' = E_2 - E_1 = E_\varphi \Rightarrow$

τα φωτόνια έχουν ίδια ενέργεια → μονοχρωματικότητα

Διατήρηση Ορμής $\cancel{P_\varphi} = \cancel{P_\varphi} + P_\varphi' + P_{ατ} \Rightarrow P_\varphi' = -P_{ατ}$

έχουμε ήδη θεωρήσει πως το νέο φωτόνιο θα κινηθεί στην κατεύθυνση του φωτονίου ΔΙΕΓΕΡΤΗ

$\Rightarrow P_\varphi' > 0$ (θετική αλγεβρική τιμή) ίδια κατεύθυνση

(μέτρο) $P_\varphi' = \frac{E_\varphi'}{c} = \frac{E_\varphi}{c} = P_\varphi$ ίδιο μέτρο

$\Rightarrow$ τα φωτόνια έχουν ίδια ορμή

ΕΞΑΓΩΓΗ του νόμου Planck
από τους μηχανισμούς αλληλεπιδράσεων ΗΜ ακτινοβολίας – ΔΣ
και τη στατιστική (Maxwell) – Boltzmann.

Σχέση συντελεστών Einstein A και B

Μελετάμε την αλληλεπίδραση συλλογής ΔΣ – ΗΜ ακτινοβολίας σε θερμοδυναμική ισορροπία.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
(Maxwell) – Boltzmann

① χωρίς διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$N_i = N_{ολ} \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$$

N_i: πληθυσμός ΔΣ με ηλεκτρόνιο στη στάθμη i

$N_{ολ}$: ολικός πληθυσμός ΔΣ

P_i πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη στάθμη i στο ΔΣ

② με διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$N_i = N_{ολ} \frac{g_i e^{-\beta E_i}}{Z}$$

g_i στατιστικό βάρος της E_i

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$$

συνάρτηση επιμερισμού
partition function

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i}$$

Θερμοδυναμική Ισορροπία $\Rightarrow$ σε χρόνο dt $\quad dN_{1\to 2} = dN_{2\to 1} \Rightarrow$

$$N_1 \, dW_{1\to 2} = N_2 \, dW_{2\to 1} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{N_{ολ}} e^{-\beta E_1} g_1}{\cancel{Z}} dW^{εξ}_{απορ} = \frac{\cancel{N_{ολ}} \cdot e^{-\beta E_2} g_2}{\cancel{Z}} \left(dW^{εξ}_{εκπ} + dW^{εκπ}_{αυθ} \right) \Rightarrow$$

$$g_1 e^{-\beta E_1} B_{12}\, \rho(\nu,T)\, \cancel{dt} = e^{-\beta E_2} g_2 \left(B_{21}\, \rho(\nu,T)\, \cancel{dt} + A_{21}\, \cancel{dt} \right) \Rightarrow$$

$$g_1 e^{-\beta E_1} B_{12}\, \rho(\nu,T) - e^{-\beta E_2} g_2 B_{21}\, \rho(\nu,T) = e^{-\beta E_2} g_2 A_{21} \Rightarrow$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{g_2 A_{21} e^{-\beta E_2}}{g_1 B_{12} e^{-\beta E_1} - g_2 B_{21} e^{-\beta E_2}} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} e^{\beta(E_2-E_1)} - 1}$$

Όμως,

$$\lim_{T\to\infty} \rho(\nu,T) = \infty$$

π.χ. από το πείραμα

Αν γνωρίζουμε την πειραματική συμπεριφορά, την οποία εξηγεί ο νόμος Planck

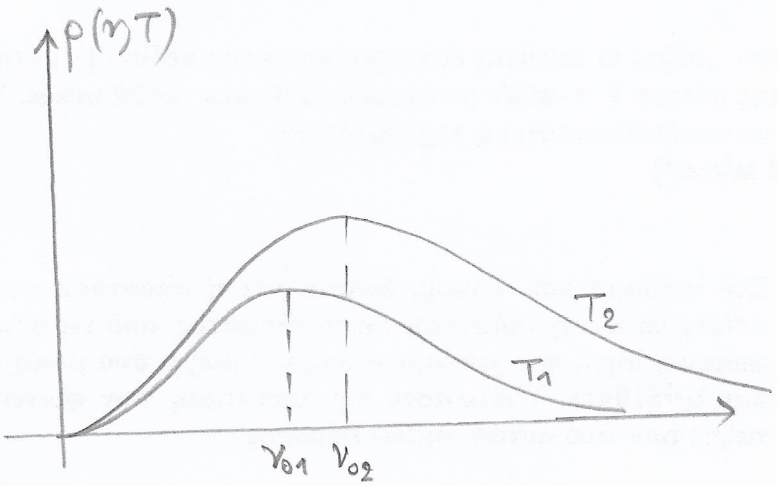
$$\boxed{\rho(\nu T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}}$$

$$\frac{\rho(\nu,T_2)}{\rho(\nu,T_1)} = \frac{\overbrace{e^{\frac{h\nu}{k_BT_1}}-1}^{\text{θετικό}}}{\underbrace{e^{\frac{h\nu}{k_BT_2}}-1}_{\text{θετικό}}} > 1$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_BT_1}} - 1 > e^{\frac{h\nu}{k_BT_2}} - 1 \Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_BT_1}} > e^{\frac{h\nu}{k_BT_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T_1} > \frac{1}{T_2} \Leftrightarrow T_2 > T_1$$

δηλαδή μεγαλύτερη θερμοκρασία οδηγεί σε μεγαλύτερο $\rho(\nu T)$, $\forall \nu$.



Ακόμα, από το νόμο μετατοπίσεως Wien στη μορφή

$$\nu_0 = (\sigma\tau\alpha\theta)\cdot T$$

$$\nu_0 \simeq 58.789 \frac{GHz}{K} \cdot T$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \{T\uparrow \Rightarrow \nu_0 \uparrow\}$ όπως δείχνουμε και στο σχήμα

$T \to \infty \Rightarrow \beta \to 0$

$$\rho \to \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} - 1} = \infty$$

Άρα, $\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} = 1 \Rightarrow \boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}}$

Αν $g_2 = g_1$ ή χωρίς στατιστικά βάρη $\Rightarrow B_{12} = B_{21} := B$

$A_{21} := A$

$$\left.\begin{aligned} \rho(\nu,T) &= \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} \cdot e^{\beta(E_2-E_1)} - 1} \\ \rho(\nu,T) &= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT} - 1} \end{aligned}\right\} \text{σύγκριση} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}} \qquad \boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}} \qquad \boxed{h\nu = E_2 - E_1}$$