$$E_m = \frac{M_m \omega_m^2}{2} q_m^2 + \frac{M_m}{2} \dot{q}_m^2 = \frac{M_m \omega_m^2}{2} q_m^2 + \frac{p_m^2}{2M_m}$$ ενέργεια m τρόπου

q_m γεν. θέση

$\dot{q}_m$ γεν. ταχύτητα

p_m γεν. ορμή

$$\boxed{\hat{H}_{HM,m} = \frac{M_m \omega_m^2}{2} \hat{q}_m^2 + \frac{\hat{p}_m^2}{2M_m}}$$ Χαμιλτονιανή m τρόπου

$$\boxed{E_{m,n_m} = \hbar \omega_m \left(n_m + \frac{1}{2}\right)}$$ Ιδιοενέργειες m τρόπου

$m \in \mathbb{N}^*$ $\quad n_m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\hat{q}_m = q_m} \qquad \boxed{\hat{p}_m = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_m}} \qquad \boxed{[\hat{q}_m, \hat{p}_m] = i\hbar}$$

Εισάγουμε τους τελεστές

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m \hbar \omega_m}} \left(M_m \omega_m \hat{q}_m + i\hat{p}_m\right)$$ "καταστροφής"

$$\hat{a}_m^+ = \frac{1}{\sqrt{2M_m \hbar \omega_m}} \left(M_m \omega_m \hat{q}_m - i\hat{p}_m\right)$$ "δημιουργίας"

Ισχύει η ιδιότητα

$$\boxed{[\hat{a}_m, \hat{a}_m^+] = \hat{a}_m \hat{a}_m^+ - \hat{a}_m^+ \hat{a}_m = 1}$$

Απόδ.

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{2M\hbar\omega}(M\omega\hat{q} + i\hat{p})(M\omega\hat{q} - i\hat{p}) - \frac{1}{2M\hbar\omega}(M\omega\hat{q} - i\hat{p})(M\omega\hat{q} + i\hat{p}) =$$

$$= \frac{1}{2M\hbar\omega}\Big(\cancel{M^2\omega^2\hat{q}^2} + \cancel{\hat{p}^2} - M\omega\hat{q}i\hat{p} + i\hat{p}M\omega\hat{q} - \cancel{M^2\omega^2\hat{q}^2} - \cancel{\hat{p}^2} - M\omega\hat{q}i\hat{p} + i\hat{p}M\omega\hat{q}\Big)$$

(β)

$$= \frac{1}{2M\hbar\omega}\left(-2M\omega i\,\hat q\hat p + 2i\hat p M\omega\hat q\right) = \frac{1}{\hbar}\left(-i\hat q\hat p + i\hat p\hat q\right)$$

$$= \frac{1}{\hbar}(-i)\left(\hat q\hat p - \hat p\hat q\right) = \frac{-i}{\hbar}[\hat q,\hat p] = \frac{-i}{\hbar}\,i\hbar = 1 \Rightarrow [\hat a,\hat a^\dagger]=1$$

$$\hat a_m^\dagger + \hat a_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}\,2M_m\omega_m\hat q_m = \sqrt{\frac{2M_m\omega_m}{\hbar}}\,\hat q_m \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat q_m = \sqrt{\frac{\hbar}{2M_m\omega_m}}\left(\hat a_m^\dagger + \hat a_m\right)}$$

$$\hat a_m^\dagger - \hat a_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}(-2i)\hat p_m = (-i)\sqrt{\frac{2}{M_m\hbar\omega_m}}\,\hat p_m \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat p_m = i\sqrt{\frac{M_m\hbar\omega_m}{2}}\left(\hat a_m^\dagger - \hat a_m\right)}$$

ΑΡΑ

$$\hat H_{HM,m} = \frac{M_m\omega_m^2}{2}\hat q_m^2 + \frac{\hat p_m^2}{2M_m} = \frac{\cancel{M_m}\omega_m^{\cancel{2}}}{2}\,\frac{\hbar}{2\cancel{M_m}\cancel{\omega_m}}\left(\hat a_m^\dagger+\hat a_m\right)\left(\hat a_m^\dagger+\hat a_m\right)$$

$$+ \frac{1}{2\cancel{M_m}}(-1)\frac{\cancel{M_m}\hbar\omega_m}{2}\left(\hat a_m^\dagger-\hat a_m\right)\left(\hat a_m^\dagger-\hat a_m\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega_m}{4}\left(\cancel{\hat a_m^\dagger\hat a_m^\dagger} + \hat a_m^\dagger\hat a_m + \hat a_m\hat a_m^\dagger + \cancel{\hat a_m\hat a_m} - \cancel{\hat a_m^\dagger\hat a_m^\dagger} + \hat a_m^\dagger\hat a_m + \hat a_m\hat a_m^\dagger - \cancel{\hat a_m\hat a_m}\right)$$

$$\hat H_{HM,m} = \frac{\hbar\omega_m}{4}\left(2\hat a_m^\dagger\hat a_m + 2\hat a_m\hat a_m^\dagger\right) = \frac{\hbar\omega_m}{2}\left(\hat a_m^\dagger\hat a_m + \hat a_m\hat a_m^\dagger\right)$$

Αλλά $[\hat a_m,\hat a_m^\dagger] = \hat a_m\hat a_m^\dagger - \hat a_m^\dagger\hat a_m = 1 \Rightarrow \hat a_m\hat a_m^\dagger = 1 + \hat a_m^\dagger\hat a_m$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\hat H_{HM,m} = \frac{\hbar\omega_m}{2}\left(2\hat a_m^\dagger\hat a_m + 1\right) \Rightarrow \boxed{\hat H_{HM,m} = \hbar\omega_m\left(\hat a_m^\dagger\hat a_m + \frac{1}{2}\right)}$$

όπως $\boxed{E_{m,n_m} = \hbar\omega_m\left(n_m + \frac{1}{2}\right)}$

Αν ονομάσουμε $|n_m\rangle$ την κατάσταση του ΗΜ πεδίου με n_m αριθμό φωτονίων στον ΗΜ τρόπο m

$$\hat H_{HM,m}\,|n_m\rangle = E_{m,n_m}\,|n_m\rangle$$

$$\hbar\omega_m\left(\hat a_m^{+}\hat a_m + \frac{1}{2}\right)|n_m\rangle = \hbar\omega_m\left(n_m + \frac{1}{2}\right)|n_m\rangle$$

$$\hat a_m^{+}\hat a_m\,|n_m\rangle = n_m\,|n_m\rangle$$

Άρα ο τελεστής $\hat N_m = \hat a_m^{+}\hat a_m$ μετρά τον αριθμό των φωτονίων στον ΗΜ τρόπο m.

$$[A+B, C] = [A,C] + [B,C]$$
$$[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$$

$$\hat H = \kappa\hat q^2 + \lambda\hat p^2$$
$$\hat a = \mu\hat q + \nu\hat p$$
$$\hat a^{+} = \mu\hat q - \nu\hat p$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$[\hat H, \hat a] = -\hbar\omega\,\hat a \qquad [\hat H, \hat a^{+}] = \hbar\omega\,\hat a^{+}$$

$$\hat H\hat a|n\rangle - \hat a\hat H|n\rangle = -\hbar\omega\,\hat a|n\rangle$$
$$\hat H\hat a|n\rangle - E_n\hat a|n\rangle = -\hbar\omega\,\hat a|n\rangle$$
$$\hat H\,\hat a|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\,\hat a|n\rangle$$

Ιδιοκατάσταση με ενέργεια κατεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο λιγότερο)

$$\Rightarrow \hat a|n\rangle = \xi\,|n-1\rangle$$

$$\hat H\hat a^{+}|n\rangle - \hat a^{+}\hat H|n\rangle = \hbar\omega\,\hat a^{+}|n\rangle$$
$$\hat H\hat a^{+}|n\rangle - E_n\hat a^{+}|n\rangle = \hbar\omega\,\hat a^{+}|n\rangle$$
$$\hat H\,\hat a^{+}|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\,\hat a^{+}|n\rangle$$

ιδιοκατάσταση με ενέργεια ανεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο περισσότερο)

$$\Rightarrow \hat a^{+}|n\rangle = \rho\,|n+1\rangle$$

... πράξεις

(γ)

$$[\hat{H},\hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a}$$

$$[\hat{H},\hat{a}]|n\rangle = -\hbar\omega\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - \hat{a}\hat{H}|n\rangle = -\hbar\omega\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - \hat{a}E_n|n\rangle = -\hbar\omega\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\,\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\,\hat{a}|n\rangle$$

ιδιοκατάσταση με ενέργεια κατεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο λιγότερο)

$$\hat{a}|n\rangle = \xi\,|n-1\rangle$$

$$[\hat{H},\hat{a}^{+}] = \hbar\omega\hat{a}^{+}$$

$$[\hat{H},\hat{a}^{+}]|n\rangle = \hbar\omega\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^{+}|n\rangle - \hat{a}^{+}\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^{+}|n\rangle - \hat{a}^{+}E_n|n\rangle = \hbar\omega\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\hat{H}\,\hat{a}^{+}|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\,\hat{a}^{+}|n\rangle$$

ιδιοκατάσταση με ενέργεια ανεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο περισσότερο)

$$\hat{a}^{+}|n\rangle = \rho\,|n+1\rangle$$

Δ ΙΔΙΟ

$$[\hat{H}, \hat{a}] = [\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a} + \tfrac{1}{2}), a] = \hbar\omega\,[\hat{a}^{+}\hat{a} + \tfrac{1}{2}, \hat{a}] =$$

$$= \hbar\omega\left([\hat{a}^{+}\hat{a}, \hat{a}] + [\tfrac{1}{2}, \hat{a}]\right) = \hbar\omega\,[\hat{a}^{+}\hat{a}, \hat{a}] =$$

$$= \hbar\omega\left(\underbrace{[\hat{a}^{+}, \hat{a}]}_{-1}\hat{a} + \hat{a}^{+}\underbrace{[\hat{a}, \hat{a}]}_{0}\right) = -\hbar\omega\hat{a}$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^{+}] = [\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a} + \tfrac{1}{2}), \hat{a}^{+}] = \hbar\omega\left[\hat{a}^{+}\hat{a} + \tfrac{1}{2}, \hat{a}^{+}\right] =$$

$$= \hbar\omega\left([\hat{a}^{+}\hat{a}, \hat{a}^{+}] + [\tfrac{1}{2}, \hat{a}^{+}]\right) = \hbar\omega\,[\hat{a}^{+}\hat{a}, \hat{a}^{+}]$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^{+}]}_{1} + \underbrace{[\hat{a}^{+}, \hat{a}^{+}]}_{0}\hat{a}\right) = \hbar\omega\hat{a}^{+}$$

ε

$$\left.\begin{array}{l} \hat{a}|n\rangle = \xi|n-1\rangle \\ \langle n|\hat{a}^{\dagger} = \xi^{*}\langle n-1| \end{array}\right\} \Rightarrow \langle n|a^{\dagger}a|n\rangle = |\xi|^2 \langle n-1|n-1\rangle \Rightarrow$$

$$n\langle n|n\rangle = |\xi|^2\langle n-1|n-1\rangle \Rightarrow |\xi|^2 = n \Rightarrow \overset{\pi.\chi.}{\xi = \sqrt{n}}$$

$$\boxed{\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle}$$

$$[a, a^{\dagger}] = 1 \Rightarrow aa^{\dagger} = 1 + a^{\dagger}a$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \rho|n+1\rangle \\ \langle n|a = \rho^{*}\langle n+1| \end{array}\right\} \Rightarrow \langle n|aa^{\dagger}|n\rangle = |\rho|^2\langle n+1|n+1\rangle$$

$$\langle n|(1+a^{\dagger}a)|n\rangle = |\rho|^2\langle n+1|n+1\rangle$$

$$(1+n) = |\rho|^2 \quad \Rightarrow \pi.\chi. \ \rho = \sqrt{n+1}$$

$$\boxed{\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1}$$

$$\hat{a}_m^{\dagger}\,|n_m\rangle = \sqrt{n_m+1}\;|n_m+1\rangle$$

$$\hat{a}_m\,|n_m\rangle = \sqrt{n_m}\;|n_m-1\rangle$$

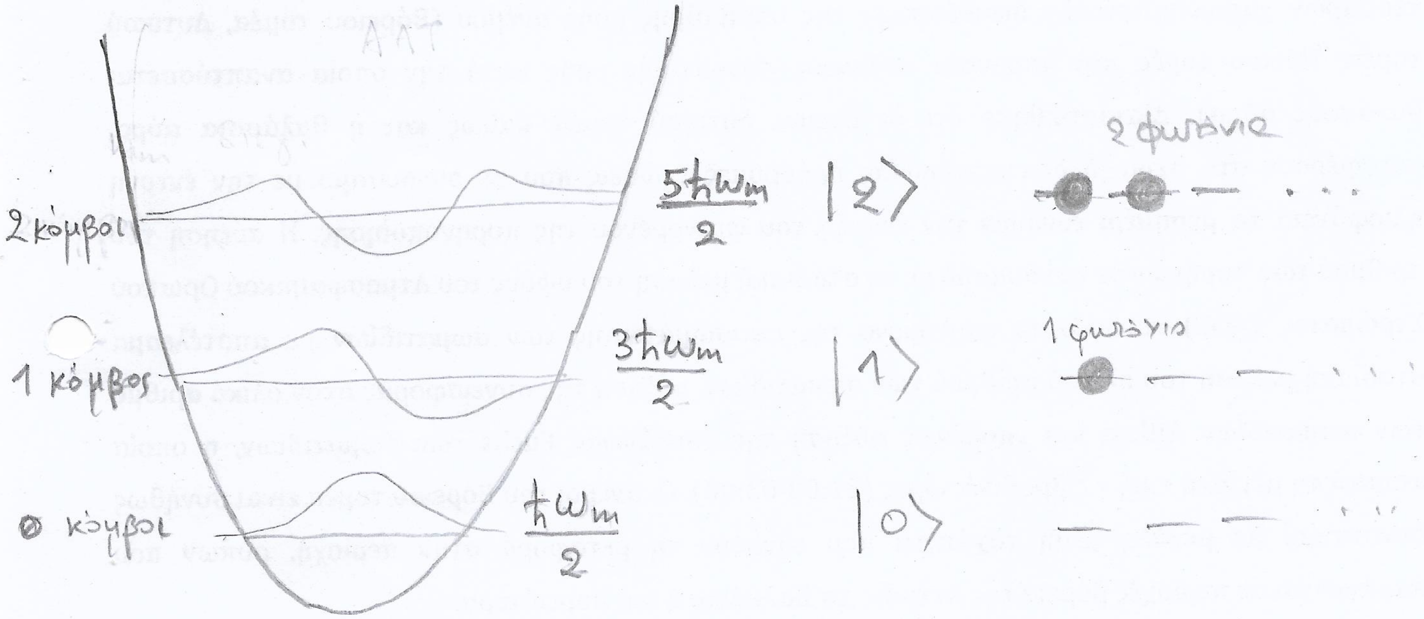
$$\hat{a}_m\,|0\rangle = 0$$

$$\langle n_m|l_m\rangle = \delta_{nl}$$

Η θεμελιώδης κατάσταση $|0\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί στο κενό κανένα μποζόνιο (φωτόνιο)

Η 1η διεγερμένη κατάσταση $|1\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{3\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί σε 1 μποζόνιο (φωτόνιο)

Η 2η διεγερμένη κατάσταση $|2\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{5\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί σε 2 μποζόνια (φωτόνια)



φωτονίων = # κόμβων της ιδιοσυναρτήσεως του ΑΑΤ

Με τη βοήθεια των τελεστών καταστροφής κ δημιουργίας μπορούμε να γράψουμε

$$\hat{E}_x^m(z,t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left(\hat{a}_m^+ + \hat{a}_m\right)$$

$$\hat{B}_y^m(z,t) = \frac{i}{c} \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left(\hat{a}_m^+ - \hat{a}_m\right)$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΜΠΟΖΟΝΙΩΝ

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_\ell] = 0$$

$$[\hat{a}_m^+, \hat{a}_\ell^+] = 0$$

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_\ell^+] = \delta_{m\ell}$$