

γεωμετρικός μέσος  $\beta$

με άλλη διαίρεση

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \frac{\kappa + \mu}{\mu} = \frac{\mu}{\kappa}$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 - \alpha\beta - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

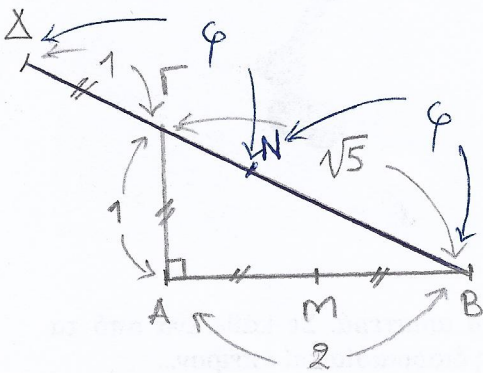
$$\Delta = 1 - 4(-1) = 5$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} := \varphi \quad \text{χρυσή τομή}$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{ή} \quad \text{δεν κτλ}$$

γεωμετρική κατασκευή της  $\varphi$



## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ ( $a_n$ )

$$a_{n+1} - a_n = \omega \quad n = (0), 1, 2, 3, \dots \quad \omega \text{ διαφορά}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\omega \quad \text{αναδρομικός τύπος}$$

$$\beta = \frac{a + \delta}{2} \quad \beta \text{ αριθμητικός μέσος}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{\u0391\u03b4\u03c1\u03bf\u03b9\u03c3\u03bc\u03b1 } n \text{ \u03c0\u03c1\u03c9\u03c4\u03c9\u03bd \u03b4\u03c1\u03c9\u03bd}$$

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ ( $a_n$ )

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \neq 0 \quad n = (0), 1, 2, 3, \dots \quad \lambda \text{ \u03bb\u03cc\u03b3\u03bf\u03c2}$$

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1} \quad \text{αναδρομικός τύπος}$$

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\beta}{\delta} \Leftrightarrow \beta^2 = a\delta \quad \beta \text{ γεωμετρικός μέσος}$$

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}, & \lambda \neq 1 \\ a_1 n, & \lambda = 1 \end{cases} \quad \text{\u0391\u03b4\u03c1\u03bf\u03b9\u03c3\u03bc\u03b1 } n \text{ \u03c0\u03c1\u03c9\u03c4\u03c9\u03bd \u03b4\u03c1\u03c9\u03bd}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - \lambda}$$

\u0391\u03b4\u03c1\u03bf\u03b9\u03c3\u03bc\u03b1 \u03b1\u03c0\u03b5\u03b9\u03c1\u03c9\u03bd \u03b4\u03c1\u03c9\u03bd ( $|\lambda| < 1$ )

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΤΡΟΠΩΝ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ (dN)  
 ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας (dv)

(A)

αποδεικνύεται  $g(\nu) := \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$   $[g(\nu)] = \frac{1}{\text{Hz}} = s$

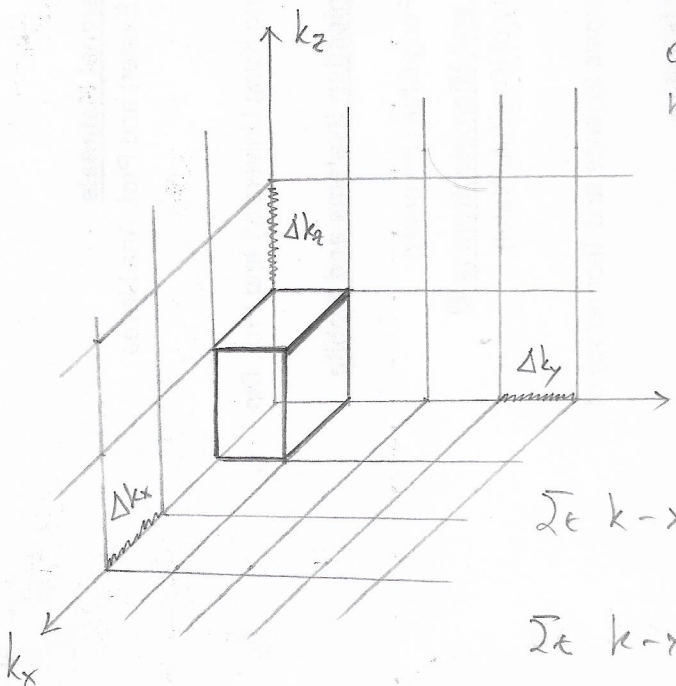
V ο όγκος της κοιλότητας ή του 3D καπιού περιδικότητας με άξεις έστωσαν  $a_x, a_y, a_z \Rightarrow V = a_x a_y a_z$

θα κάνουμε την απόδειξη για περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Στο βιβλίο Ξ και η απόδειξη για όρθογώνια κοιλότητα.

έστω  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}$   
 $\vec{E}(\vec{0}, t) = \vec{E}_0 e^{i(-\omega t + \varphi)}$   
 $\vec{E}(a_x, 0, 0), t) = \vec{E}_0 e^{i(k_x a_x - \omega t + \varphi)}$

$\Rightarrow e^{ik_x a_x} = 1 \Rightarrow k_x a_x = 2\pi n_x, n_x \in \mathbb{Z}$

ομοίως  $k_x = \frac{2\pi n_x}{a_x}, n_x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  βήμα στο  $k_x$   $\Delta k_x = \frac{2\pi}{a_x}$   
 $k_y = \frac{2\pi n_y}{a_y}, n_y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  βήμα στο  $k_y$   $\Delta k_y = \frac{2\pi}{a_y}$   
 $k_z = \frac{2\pi n_z}{a_z}, n_z \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  βήμα στο  $k_z$   $\Delta k_z = \frac{2\pi}{a_z}$



οι επιτρεπόμενες k καταστάσεις είναι στις κορυφές των μικρών ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων με άξονες

$\Delta k_x = \frac{2\pi}{a_x} \quad \Delta k_y = \frac{2\pi}{a_y} \quad \Delta k_z = \frac{2\pi}{a_z}$

Άρα οι κορυφές, όπως, διαμοιράζονται έφ' όρου σε 8 όμοια ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Άρα

Σε k-χώρο  $\frac{(2\pi)^3}{a_x a_y a_z} = \frac{(2\pi)^3}{V} \exists 1$  k-κατάσταση

Σε k-χώρο  $4\pi k^2 dk \exists dN_k$  k-καταστάσεις

$\Rightarrow dN_k = \frac{4\pi k^2 dk V}{8\pi^3}$

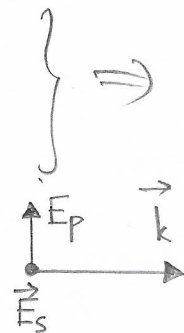
δηλαδή από  $k \rightarrow k + dk$  (σφαιρικός φλοιός)

$$dN_k = \frac{4\pi k^2 dk V}{8\pi^3}$$

$$c = \lambda \nu, \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{k} \nu \Rightarrow k = \frac{2\pi}{c} \nu \Rightarrow dk = \frac{2\pi}{c} d\nu$$

$$dN_\nu = \frac{4\pi}{8\pi^3} \frac{4\pi^2}{c^2} \nu^2 \frac{2\pi}{c} d\nu V \Rightarrow dN_\nu = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

Άλλο,  $\exists$  2 πιθανές πολώσεις του ηλεκτρικού πεδίου κάθετες στο  $\vec{k}$



Ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων κανονικών τρόπων είναι

$$dN = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \Rightarrow$$

$$g(\nu) := \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ του κλασικού νόμου Rayleigh-Jeans

από το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας και το  $g(\nu) := \frac{dN}{d\nu}$

$$g(\nu) := \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi \nu^2 V}{c^3}$$

$$[g(\nu)] = \frac{1}{\text{Hz}} = \text{s}$$

κανονικοί τρόποι ανά συχνότητα

$$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3}$$

$$\left[ \frac{g(\nu)}{V} \right] = \frac{1}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{s}}{\text{m}^3}$$

κανονικοί τρόποι ανά συχνότητα, ανά όγκο

$$\rho(\nu, T) = \frac{g(\nu)}{V} \cdot \overline{E}$$

$$[\rho(\nu, T)] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{J s}}{\text{m}^3}$$

ενέργεια ανά συχνότητα, ανά όγκο

μέση ενέργεια κατά κανονικό τρόπο

$\overline{E}$

Άρα το ερώτημα είναι πόση είναι η μέση ενέργεια  $\overline{E}$  κατά κανονικό τρόπο.

Στην κλασική φυσική, αυτό το περιγράφει το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας (equipartition theorem): σε θερμική ισορροπία αποδίδουμε μέση ενέργεια  $\frac{1}{2} k_B T$  σε κάθε βαθμό ελευθερίας του δομικού λίθου.

η.χ. δομικός λίθος με  $M$  βαθμούς ελευθερίας έχει  $\bar{E} = \frac{M}{2} k_B T$   
 και σύνολο  $N$  τέτοιων δομικών λίθων "έχει" ενέργεια  $\frac{MN}{2} k_B T$

3Δ ιδανικό αέριο  $M=3$  (κίνηση  $x, y, z$ )  $\Rightarrow \bar{E} = \bar{E}_{KIN} = \frac{3}{2} k_B T$

1Δ ιδανικό αέριο  $M=1$  (κίνηση  $x$ )  $\Rightarrow \bar{E} = \bar{E}_{KIN} = \frac{1}{2} k_B T$

1Δ AAT  $M=2$  (κίνηση  $x$ , ταλάντωση)  $\Rightarrow \bar{E}_{KIN} = \frac{1}{2} k_B T = \bar{E}_{ΔYN}$   
 $\Rightarrow \bar{E} = k_B T$

"Αν λοιπόν έχουμε μία συλλογή τέτοιων AAT με  $\bar{E} = k_B T \Rightarrow$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k_B T$$

νόμος Rayleigh-Jeans  
 ( $\nu \rightarrow \infty \Rightarrow \rho(\nu, T) \rightarrow \infty$   
 "υπεριώδης καταστροφή")

Αν δεν είχαμε  $M=2$  βαθμούς ελευθερίας, αλλά άλλο αριθμό  $M$ , τότε θα καταλήγαμε στη σχέση

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{M}{2} k_B T$$

γενικότερος κλασικός νόμος,  
 ο οποίος παρουσιάζει το ίδιο πρόβλημα...

Το πρόβλημα "έγκειται" στο ότι με το θεώρημα Ρεσκατα νόμης ενέργειας  
 η μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου  $\bar{E} = \bar{E}(T)$ ,  
 δηλαδή εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία  $T$ .

# ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΝΟΜΟΥ PLANCK (~ όπως την έκανε ο Planck)

1900

πρόβλημα ακτινοβολίας μέλανος σώματος

τουλάχιστον από το 1859  
Kirchhoff

ο Planck ασχολήθηκε με αυτό > 1894  
η απόδειξη που παρατίθεται εδώ έγινε το 1900

πειραματικό ταίριασμα σε υψηλές συχνότητες Wien 1896

νόμος Rayleigh-Jeans 1900 (συμπίπτει με πείραμα μόνο σε πολύ χαμηλές συχνότητες)

ο Planck χρησιμοποιεί

ΥΠΟΘΕΣΗ στατιστική κατανομή Boltzmann

ΥΠΟΘΕΣΗ η ΗΜ ενέργεια μπορεί να είναι μόνο διακριτό

("κβαντισμένο") πολλαπλασιαστή ποσότητας  $h\nu$ , όπου

$h$  είναι αυτό που λέγεται σήμερα σταθερά του Planck και  $\nu$  η συχνότητα

για τις υποθέσεις αυτές δεν ήταν και πολύ χαρούμενος...

1905 Einstein

έξηλθε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

υποδέχονται ότι υπάρχουν αυτές τα «κβάντα» φωτός

1926 πρωτογράφτηκε η λέξη «φωτόνια» Gilbert Newton Lewis

ο Planck εισήγαγε την έννοια resonator (ἀπηχέτιο, ταλαντωτής)

ο οποίος έχει διακεκριμένες, δηλαδή όχι συνεχείς αλλά εξαρτημένες από ένα φυσικό αριθμό  $n$ , «κβαντισμένες», επιτρεπόμενες τιμές ενέργειας  $E_n$  για δεδομένη συχνότητα

$$E_n = nh\nu, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Σπένδεσε ότι η μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου  $\bar{E}$  σε δεδομένη συχνότητα  $\nu$  και θερμοκρασία  $T$  είναι στην πραγματικότητα μια μέση τιμή  $\overline{E(\nu, T)}$  των ενεργειών ενός μεγάλου αριθμού resonators που ο κάθε ένας βρίσκεται σε διαφορετική στάθμη  $E_n$  ενώ η πιθανότητα κατάληψης της στάθμης  $P_n$  δίνεται από τη στατιστική Boltzmann

ένω λοιπόν κλασικά είχαμε  $\overline{E(T)} = m \cdot \frac{1}{2} k_B T$

Τώρα έχουμε  $\overline{E(\nu, T)} = \sum_n E_n P_n$

$\beta := \frac{1}{k_B T}$

$P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$

πιθανότητα κατάληψης της στάθμης  $n$

$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$

συνάρτηση επιμερισμού (partition function)

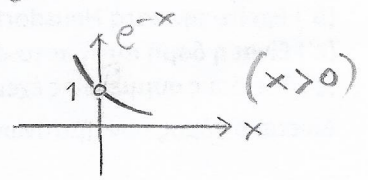
$x := \frac{h\nu}{k_B T} = \beta h\nu > 0$

\*  $\overline{E(\nu, T)} = \sum_n n h\nu \frac{e^{-\beta n h\nu}}{Z} = \frac{x}{Z_\beta} \left( \sum_n n e^{-n x} \right)$

$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\beta n h\nu} = \sum_n e^{-n x}$

$a_n = e^{-n x}$  π.χ.  $a_0 = 1, a_1 = e^{-x}, a_2 = e^{-2x}$

$a_{n+1} = e^{-(n+1)x} \Rightarrow \lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-x} < 1$



λόγος γεωμετρικής πρόδου

Βλέπτε η συνάρτηση επιμερισμού είναι το άθροισμα  $\infty$  όρων γεωμετρικής πρόδου με πρώτο όρο  $a_0 = 1$  και λόγο  $\lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-x} < 1$   $S_\infty = \frac{\eta \rho \cdot \delta \rho \rho \rho}{1 - \lambda}$

$Z = \frac{1}{1 - e^{-x}}$

$$Z = \sum_n e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = - \underbrace{\sum_n n e^{-nx}}_A = \frac{-e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \Rightarrow A = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$$

? Εργασία \*  $\overline{E(\nu, T)} = \frac{x(1 - e^{-x})}{\beta} \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$

$$= \frac{x}{\beta} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{\beta} \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\overline{E(\nu, T)} = \frac{h\nu \cancel{k_B T}}{\cancel{k_B T}} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$\overline{E(\nu, T)} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$$

$$[g(\nu)] = \frac{1}{\text{Hz}} = s$$

$$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

$$\left[\frac{g(\nu)}{V}\right] = \frac{1}{\text{m}^3 \cdot \text{Hz}} = \frac{s}{\text{m}^3}$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{g(\nu)}{V} \cdot \overline{E(\nu, T)}$$

$$[\rho(\nu, T)] = \frac{J}{\text{m}^3 \cdot \text{Hz}} = \frac{J \cdot s}{\text{m}^3}$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \Rightarrow$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$



ΑΣΚΗΣΗ Β Για θερμοκρασία (α') 300K (β') 6000K, (γ') 6K

Υπολογίστε το μήκος κύματος  $\lambda_{\Delta}$  στο οποίο η πρόβλεψη του νόμου Rayleigh-Jeans  $\rho_{RJ}$  είναι διπλάσια από την πειραματική τιμή  $\rho$  την οποία έβγαζε ο νόμος Planck.

ΛΥΣΗ

$$\text{Θέλουμε } \rho_{RJ} = 2\rho \Rightarrow \rho_0 x^2 = 2\rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow e^x - 1 = 2x \Rightarrow$$

$$e^x = 1 + 2x$$

γραφικά, π.χ.  $x_{\Delta} \approx 1.25645 \approx \frac{5}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{hc}{k_B T} \\ c = \lambda \nu \end{array} \right\} \lambda = \frac{hc}{k_B T x} \Rightarrow \lambda_{\Delta} = \frac{hc}{k_B T x_{\Delta}} \rightarrow$$

$$\frac{hc}{k_B} \approx 14.404 \cdot 10^{-3} \text{ Km}$$

(α')  $T = 300\text{K} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_{\Delta} \approx 38.2 \mu\text{m}$  (FIR  $25 \mu\text{m} < \lambda < 1000 \mu\text{m}$ )

(MIR  $2.5 \mu\text{m} < \lambda < 25 \mu\text{m}$ )

(β')  $T = 6000\text{K} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_{\Delta} \approx 1.91 \mu\text{m}$  (NIR  $0.8 < \lambda < 2.5 \mu\text{m}$ )

(γ')  $T = 6\text{K} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_{\Delta} \approx 1.91 \text{ mm} \sim \text{μικροκύματα}$

ISO 20473

NIR  $0.78 \mu\text{m} < \lambda < 3 \mu\text{m}$

MIR  $3 \mu\text{m} < \lambda < 50 \mu\text{m}$

FIR  $50 \mu\text{m} < \lambda < 1000 \mu\text{m}$

ΑΣΚΗΣΗ Πότε  $\rho_{RJ} = \rho$

$$\rho_{RJ} = \rho \Rightarrow \rho_0 x^2 = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow x = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + x \Rightarrow x = 0$$

ΑΤΟΠΟ

πρέπει  $x \neq 0$

"Αρα ποτέ  $\rho_{RJ} = \rho$ .

ΑΣΚΗΣΗ  $T = ?$  ;  $\rho_{RJ} = 2\rho$  με  $\lambda = 400 \text{ nm}$   
 (στα όρια του υπεριώδους)

$$\rho_{RJ} = 2\rho \Rightarrow \rho_0 x^2 = 2\rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow e^x - 1 = 2x \Rightarrow e^x = 1 + 2x$$

$x \neq 0$

γραφικά, پیدا  $x \approx 1.25645$   
 $\approx \frac{5}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{h\nu}{k_B T} \\ c = \lambda \nu \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{k_B T x}$$

$$\frac{hc}{k_B} \approx 14.404 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m} \approx 14.4 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$$

$$T = \frac{hc}{k_B \lambda x}$$

$$T = \frac{14.4 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}}{4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 5} = 2.88 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-7}} \text{ K} \Rightarrow T \approx 28800 \text{ K}$$

μόνο μερικοί άστρες  
 πολύ μεγαλύτεροι  
 π.χ. 30  $M_{\text{ΗΛΙΟΥ}}$

δείτε το "UV catastrophe",  
 "υπεριώδης καταστροφή",  
 είναι μια λανθασμένη διορασία...