

Κεφάλαιο 4

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ - ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ. ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ.

4.1 Πλήρης Κβαντική Προσέγγιση έναντι Ημικλασικής Προσεγγίσεως.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο κάναμε τη λεγόμενη Ημικλασική Προσέγγιση (δισταθμικό σύστημα κβαντικά - ΗΜ πεδίο κλασικά). Για το ΗΜ πεδίο χρησιμοποιήσαμε τη γλώσσα των ανυσματικών μεγεθών \vec{E}, \vec{B} . Υποθέσαμε, λοιπόν, ότι το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερό. Έπρεπε η ΗΜ ακτινοβολία να είναι αρκετά πυκνή ώστε το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου να μην επηρεάζεται πρακτικά από την απορρόφηση ή την εκπομπή φωτονίου.

Στο παρόν κεφάλαιο κάνουμε Πλήρη Κβαντική Προσέγγιση, δηλαδή αντιμετωπίζουμε δισταθμικό σύστημα και ΗΜ πεδίο κβαντικά. Θα λέγαμε ότι προσπαθούμε να εκφράσουμε το ΗΜ πεδίο στη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων. Θα πρέπει επομένως να βρεθεί μια έκφραση της Χαμιλτονιανής του ΗΜ πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων αντί της γλώσσας που χρησιμοποιεί τα ανυσματικά μεγέθη \vec{E}, \vec{B} . Αυτό θα γίνει στο παράδειγμα του στάσιμου ΗΜ κύματος σε κοιλότητα, στην Ενότητα 4.3. Πριν από αυτό, στην Ενότητα 4.2, θα διερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ κυματανυσμάτων, κυκλικών συχνοτήτων και αρχικών φάσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Στη συνέχεια, στην Ενότητα 4.4 θα θυμηθούμε τους τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονίων και θα κβαντωθεί η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το ΗΜ πεδίο, καθώς και το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, ξεχωριστά, με τη βοήθεια των τελεστών αυτών. Άρα θα

έχουμε μια Χαμιλτονιανή για το ΗΜ πεδίο. Κατόπιν, στην Ενότητα 4.5 θα περιγράψουμε με τη βοήθεια σπινόρων το δισταθμικό σύστημα και ειδικότερα την αναβίβαση και την καταβίβαση ενός ηλεκτρονίου μεταξύ των δύο ενεργειακών σταθμών του. Άρα, θα έχουμε και μια Χαμιλτονιανή για το δισταθμικό σύστημα. Μετά, θα κατασκευάσουμε και τη Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου, στην Ενότητα Εξ. 4.166. Οπότε, θα είμαστε σε θέση να ορίσουμε μια Ολική Χαμιλτονιανή που να περιγράφει το ΗΜ πεδίο, το δισταθμικό σύστημα, αλλά και τη μεταξύ τους αλληλεπίδραση (Χαμιλτονιανές Rabi και Jaynes-Cummings). Στην Ενότητα 4.6 συνοψίζουμε τις σχέσεις μεταθέσεως για μποζόνια (π.χ. φωτόνια) και αντιμεταθέσεως για φερμιόνια (π.χ. ηλεκτρόνια). Στην Ενότητα 4.9 συνοψίζονται οι Χαμιλτονιανές. Στην Ενότητα 4.10 υπολογίζονται μέσες (αναμενόμενες) τιμές χρήσιμων μεγεθών για τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings στην απορρόφηση και στην εκπομπή φωτονίου. Ακολουθούν δύο παραδείγματα εφαρμογής της Χαμιλτονιανής Jaynes-Cummings στην απορρόφηση φωτονίου (Ενότητα 4.11) και στην εκπομπή φωτονίου (Ενότητα 4.12), τα οποία καταλήγουν στην περιγραφή των ταλαντώσεων του πληθυσμού των φωτονίων και της καταλήψεως των ενεργειακών σταθμών.

4.2 Σχέση μεταξύ κυματανυσμάτων, κυκλικών συχνοτήτων και φάσεων ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.

Ας θυμηθούμε τις Εξισώσεις Maxwell στη διατύπωση με όρους ολικού φορτίου και ολικού ρεύματος και συγκεκριμένα στη διαφορική μορφή

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \text{νόμος Gauss ηλεκτρισμού} \quad (4.1\alpha')$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{νόμος Gauss μαγνητισμού} \quad (4.1\beta')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{νόμος Faraday} \quad (4.1\gamma')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{νόμος Ampère και διόρθωση Maxwell} \quad (4.1\delta')$$

Στο κενό όπου $\rho = 0$ και $\vec{J} = \vec{0}$ οι Εξ. 4.1α'-4.1δ' γίνονται

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.2\alpha')$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2\beta')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.2\gamma')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.2\delta')$$

Ισχύουν οι ταυτότητες

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Delta}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Delta}) - \nabla^2 \vec{\Delta} \quad (4.3)$$

$$\nabla^2 \vec{\Delta} := (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Delta} \quad (4.4)$$

Οπότε από τις Εξ. 4.2 προκύπτει

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

Δοκιμάζοντας στην Εξ. 8.60 λύσεις της μορφής

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} \quad (4.6)$$

προκύπτει

$$|\vec{k}| := k = \frac{\omega}{c}. \quad (4.7)$$

Ομοίως από τις Εξ. 4.2 προκύπτει

$$\nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (4.8)$$

Δοκιμάζοντας στην Εξ. 8.61 λύσεις της μορφής

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta')} \quad (4.9)$$

προκύπτει πάλι η εξίσωση Εξ. 8.80. Επειδή $\omega = 2\pi\nu$, $c = \lambda\nu$, από την Εξ. 8.80 προκύπτει $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Σημειωτέον ότι δεδομένου ότι παραγωγίζουμε ως προς x, y, z, t , οι “αρχικές φάσεις” δ, δ' παραμένουν αυθαίρετες, δηλαδή δεν προσδιορίζονται από τις έως τώρα πράξεις.

Για τις λύσεις 8.45 και 8.47, μετά από πράξεις, διαπιστώνουμε ότι ο τελεστής $\vec{\nabla}$ μπορεί να αντικατασταθεί με $i\vec{k}$, σχηματικά

$$\boxed{\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}} \quad (4.10)$$

Διότι αν θεωρήσουμε πεδίο της μορφής

$$\vec{\Delta} = \vec{\Delta}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} := (\Delta_{0x}, \Delta_{0y}, \Delta_{0z}) e^{\odot} \quad (4.11)$$

τότε

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Delta} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) = \frac{\partial \Delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta_z}{\partial z} = \\ &= \Delta_{0x} e^{\odot} i k_x + \Delta_{0y} e^{\odot} i k_y + \Delta_{0z} e^{\odot} i k_z = i(k_x, k_y, k_z) \cdot (\Delta_{0x}, \Delta_{0y}, \Delta_{0z}) e^{\odot} = i\vec{k} \cdot \vec{\Delta}, \end{aligned}$$

αλλά και

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{\Delta} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Delta_{0x}e^{\odot} & \Delta_{0y}e^{\odot} & \Delta_{0z}e^{\odot} \end{vmatrix} \\
 &= \hat{i} \left(\frac{\partial \Delta_{0z}e^{\odot}}{\partial y} - \frac{\partial \Delta_{0y}e^{\odot}}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial \Delta_{0z}e^{\odot}}{\partial x} - \frac{\partial \Delta_{0x}e^{\odot}}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial \Delta_{0x}e^{\odot}}{\partial y} - \frac{\partial \Delta_{0y}e^{\odot}}{\partial x} \right) \\
 &= \hat{i} \left(ik_y \Delta_z - ik_z \Delta_y \right) - \hat{j} \left(ik_x \Delta_z - ik_z \Delta_x \right) + \hat{k} \left(ik_y \Delta_x - ik_x \Delta_y \right) \\
 &= i \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ k_x & k_y & k_z \\ \Delta_x & \Delta_y & \Delta_z \end{vmatrix} = i \vec{k} \times \vec{\Delta}.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
 \text{Εξ. 8.44, 8.45} &\Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 & (4.12\alpha) \\
 \text{Εξ. 8.46, 8.47} &\Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 & (4.12\beta') \\
 \text{Εξ. 8.48, 8.45, 8.47} &\Rightarrow i \vec{k} \times \vec{E} = i \omega \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} & (4.12\gamma') \\
 \text{Εξ. 8.49, 8.45, 8.47} &\Rightarrow i \vec{k} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 (-i \omega) \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} & (4.12\delta')
 \end{aligned}$$

Από τις Εξ. 4.12α', 4.12β', 4.12γ', 4.12δ', με ένα σύντομο λογικό παιχνίδι, προκύπτει η σχέση των κατευθύνσεων των διανυσμάτων \vec{E} , \vec{B} , \vec{k} , συγκεκριμένα προκύπτει ότι το εξωτερικό γινόμενο του \vec{E} με το \vec{B} είναι ομόρροπο του \vec{k} δηλαδή

$$\boxed{\vec{E} \times \vec{B} \uparrow \uparrow \vec{k}} \quad (4.13)$$

και μάλιστα τα \vec{E} , \vec{B} , \vec{k} έχουν τη σχέση κατευθύνσεων και καθετοτήτων που αποδίδεται στο Σχήμα 8.10. Η σχέση 4.13 μπορεί να αποδειχθεί και εξειδικευτεί και με μαθηματικά χρήσει της ταυτότητας

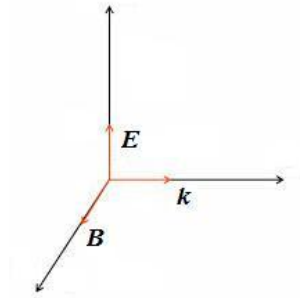
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \quad (4.14)$$

Για παράδειγμα, ξεκινώντας από την Εξ. 4.12γ' έχουμε $\vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega \vec{E} \times \vec{B} \Rightarrow (\vec{E} \cdot \vec{E})\vec{k} - (\vec{E} \cdot \vec{k})\vec{E} = \omega \vec{E} \times \vec{B}$, αλλά λόγω της Εξ. 4.12α' προκύπτει

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{|\vec{E}|^2}{\omega} \vec{k} \quad (4.15)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ήδη αποδεδειγμένες καθετότητες των κατευθύνσεων των \vec{E} , \vec{B} , \vec{k} , από τις Εξ. 4.12γ'-4.12δ' προκύπτει

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c \quad (4.16)$$



Σχήμα 4.1: $\vec{E} \times \vec{B} \uparrow \vec{k}$.

Ας δοκιμάσουμε τώρα στις Εξ. 8.60 και 8.61, αντί των λύσεων 8.45 και 8.47, λύσεις της μορφής

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega_e t + \delta_e)} = \vec{E}_0 e^{\textcircled{E}}, \quad (4.17)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}_b \cdot \vec{r} - \omega_b t + \delta_b)} = \vec{B}_0 e^{\textcircled{B}}, \quad (4.18)$$

δηλαδή **ας θεωρήσουμε ότι τα $\vec{E}(\vec{r}, t)$ και $\vec{B}(\vec{r}, t)$ δεν έχουν κατ' ανάγκην ίσα κυματανύσματα \vec{k}_e και \vec{k}_b , κυκλικές συχνότητες ω_e και ω_b και "αρχικές φάσεις" δ_e και δ_b . Τότε**

$$\text{Εξ. 8.44, 4.17} \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_e \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.19\alpha')$$

$$\text{Εξ. 8.46, 4.18} \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_b \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.19\beta')$$

$$\text{Εξ. 8.48, 4.17, 4.18} \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_e \times \vec{E} = \omega_b \vec{B} \quad (4.19\gamma')$$

$$\text{Εξ. 8.49, 4.17, 4.18} \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_b \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega_e \vec{E} \quad (4.19\delta')$$

και δεν προκύπτει κάποια σχέση μεταξύ των δ_e, δ_b . Από την Εξ. 4.19γ' προκύπτει

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ k_{ex} & k_{ey} & k_{ez} \\ E_{0x}e^{\ominus} & E_{0y}e^{\ominus} & E_{0z}e^{\ominus} \end{vmatrix} = (\omega_b B_{0x}e^{\oplus}, \omega_b B_{0y}e^{\oplus}, \omega_b B_{0z}e^{\oplus}) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{ey}E_{0z}e^{\ominus} - k_{ez}E_{0y}e^{\ominus} = \omega_b B_{0x}e^{\oplus} \\ k_{ez}E_{0x}e^{\ominus} - k_{ex}E_{0z}e^{\ominus} = \omega_b B_{0y}e^{\oplus} \\ k_{ex}E_{0y}e^{\ominus} - k_{ey}E_{0x}e^{\ominus} = \omega_b B_{0z}e^{\oplus} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{ey}E_{0z} - k_{ez}E_{0y}}{\omega_b B_{0x}} = e^{\oplus}e^{\ominus*} = e^{i[(\vec{k}_b - \vec{k}_e) \cdot \vec{r} - (\omega_b - \omega_e)t + (\delta_b - \delta_e)]} \\ \frac{k_{ez}E_{0x} - k_{ex}E_{0z}}{\omega_b B_{0y}} = e^{\oplus}e^{\ominus*} = \text{το ίδιο} \\ \frac{k_{ex}E_{0y} - k_{ey}E_{0x}}{\omega_b B_{0z}} = e^{\oplus}e^{\ominus*} = \text{το ίδιο} \end{array} \right\}$$

σταθερές συναρτήσεις των \vec{r}, t

Αν θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t , επειδή τα αριστερά μέρη είναι σταθερά, θα πρέπει και τα δεξιά να είναι, δηλαδή να μην εξαρτώνται από το \vec{r} , άρα

$$\vec{k}_b = \vec{k}_e. \quad (4.21)$$

Αν θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη θέση \vec{r} , επειδή τα αριστερά μέρη είναι σταθερά, θα πρέπει και τα δεξιά να είναι, δηλαδή να μην εξαρτώνται από το t , άρα

$$\omega_b = \omega_e. \quad (4.22)$$

Τέλος, από τις Εξ. 8.100-8.101 έπεται ότι τα δεξιά μέρη θα ισούνται με $e^{i(\delta_b - \delta_e)} = \cos(\delta_b - \delta_e) + i \sin(\delta_b - \delta_e)$. Αν τα αριστερά μέρη ήταν πραγματικά, τότε $\sin(\delta_b - \delta_e) = 0 \Rightarrow \delta_b - \delta_e = n\pi, n \in \mathcal{Z}$ οπότε υπάρχει μερική λύση $\delta_b = \delta_e$. Τα \vec{E}_0, \vec{B}_0 όμως είναι εν γένει μιγαδικά άρα καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{k_{ey}E_{0z} - k_{ez}E_{0y}}{\omega_b B_{0x}} &= e^{i(\delta_b - \delta_e)} \\ \frac{k_{ez}E_{0x} - k_{ex}E_{0z}}{\omega_b B_{0y}} &= e^{i(\delta_b - \delta_e)} \\ \frac{k_{ex}E_{0y} - k_{ey}E_{0x}}{\omega_b B_{0z}} &= e^{i(\delta_b - \delta_e)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

και τίποτε παραπάνω.

4.3 Στάσιμο ΗΜ κύμα σε κοιλότητα.

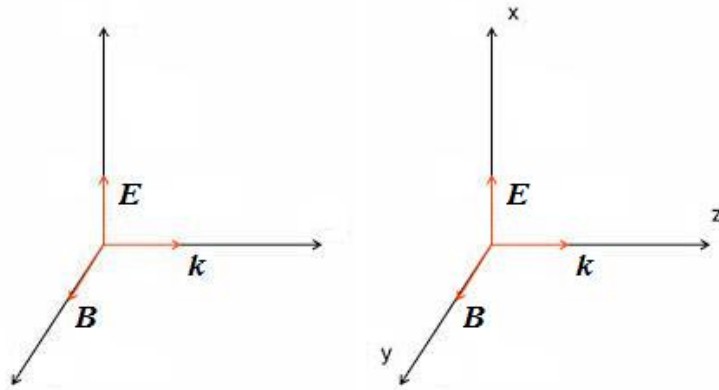
Στην Ενότητα αυτό θα κατασκευάσουμε μια έκφραση της Χαμιλτονιανής του ΗΜ πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων αντί της γλώσσας που χρησιμοποιεί τα ανυσματικά μεγέθη \vec{E} , \vec{B} . Αυτό θα γίνει στο παράδειγμα του στάσιμου ΗΜ κύματος σε κοιλότητα.

Πριν από αυτό, ας θυμηθούμε ότι για τρέχοντα ΗΜ κύματα, με τις προϋποθέσεις της Ενότητας 4.2, έχουμε

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} \quad (4.24)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} \quad (4.25)$$

και $\vec{E} \times \vec{B} \uparrow \uparrow \vec{k}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2 αριστερά. Πρόκειται για κυματικές εξισώσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, αντιστοίχως, σε 3 διαστάσεις και τις λύσεις τους.



Σχήμα 4.2: [Αριστερά] Για τρέχοντα ΗΜ κύματα έχουμε $\vec{E} \times \vec{B} \uparrow \uparrow \vec{k}$. [Δεξιά] Υποθέτουμε ότι $\vec{E} \times \vec{B} \uparrow \uparrow \vec{k}$ με τον προσανατολισμό σε άξονες που δείχνει το σχήμα.

Αν ο προσανατολισμός σε άξονες είναι αυτός που δείχνει το Σχήμα 4.2 δεξιά, τότε

$$\nabla^2 \vec{E}_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial t^2} \quad (4.26)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{x0} e^{i(k_z z - \omega t + \delta)} = \vec{E}_x(z, t) \quad (4.27)$$

$$\nabla^2 \vec{B}_y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_y}{\partial t^2} \quad (4.28)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_{0y} e^{i(k_z z - \omega t + \delta)} = \vec{B}_y(z, t) \quad (4.29)$$

οπότε

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \quad (4.31)$$

Πρόκειται για κυματικές εξισώσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, αντιστοίχως, σε 1 διάσταση. Ας δούμε τώρα αν βγαίνει κάποιο συμπέρασμα από τις εξισώσεις του Maxwell στο κενό.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{Εξ. 8.44}) &\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \\ &\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \text{ πράγμα αναμενόμενο.} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Εξ. 8.46}) &\Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow 0 + \frac{\partial B_y}{\partial y} + 0 = 0 \Rightarrow \\ &\frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \text{ πράγμα αναμενόμενο.} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Εξ. 8.48}) &\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{j} \frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \hat{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\hat{j} \frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \\ &\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Εξ. 8.49}) \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{i} \Rightarrow i \left(-\frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = i \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (4.35)$$

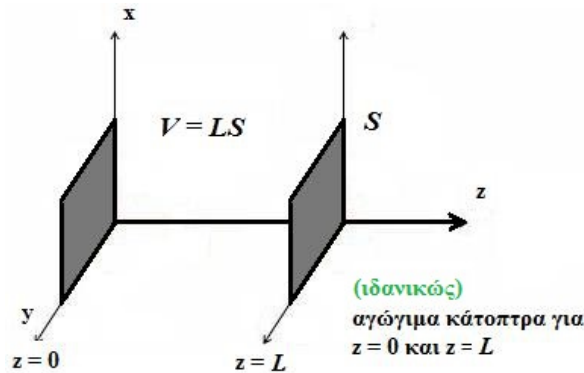
♠ Τώρα βάζουμε ιδανικώς αγωγίμα **κάτοπτρα** στις θέσεις $z = 0$ και $z = L$ (Σχήμα 4.3). Το προσπίπτον σε κάθε κάτοπτρο κύμα θα συμβάλει με το ανακλώμενο, άρα θα δημιουργηθούν **στάσιμα κύματα**.

Οι Εξ. 4.30 και 4.34 εξακολουθούν να ισχύουν

Οι Εξ. 4.31 και 4.35 για το γραμμικό συνδυασμό

των προσπιπτόντων και ανακλωμένων κυμάτων

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} & \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} & \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned}$$

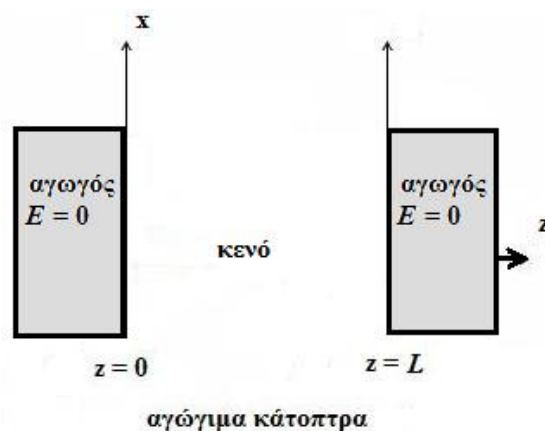


Σχήμα 4.3: Στις θέσεις $z = 0$ και $z = L$ τοποθετούνται επίπεδα, ιδανικώς αγωγίμα κάτοπτρα.

Αναζητούμε λύση με μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών, υποθέτοντας ότι

$$E_x(z, t) = \mathcal{N}Z(z)T(t) \quad (4.36)$$

Ας θυμηθούμε τις συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια ιδανικού αγωγού - κενού ή κατά προσέγγιση αέρα (θυμηθείτε το Σχήμα 1.16). Η εφαπτομενική συνιστώσα του



Σχήμα 4.4: Αγωγή κάτοπτρα πριν από $z = 0$ και μετά από $z = L$.

\vec{E} μηδενίζεται στη διεπιφάνεια αυτή. Επειδή το \vec{E} έχει μόνο x συνιστώσα (Εξ. 4.27), και τα επίπεδα, ιδανικώς αγωγή κάτοπτρα τοποθετούνται στις θέσεις $z = 0$ και $z = L$, οπότε το \vec{E} είναι παράλληλο σε αυτά, έπεται ότι

$$E_x(0, t) = 0 = E_x(L, t), \forall t. \quad (4.37)$$

Από τις Εξ. 4.30 και 4.36 έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{N}T(t) \frac{d^2 Z}{dz^2} &= \mathcal{N} \frac{1}{c^2} Z(z) \frac{d^2 T}{dt^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{f(z)} &= \underbrace{\frac{1}{T(t)} \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2}}_{g(t)} \stackrel{\text{άρα}}{=} \text{σταθερά} := -k^2, \end{aligned}$$

$\forall z, \forall t$

αρκεί $Z(z) \neq 0$ και $T(t) \neq 0$, ενώ για $Z(z) = 0$ και $T(t) = 0$ ισχύει η τετριμμένη λύση. Άρα

$$\boxed{\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z(z) = 0} \quad (4.38)$$

και

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 c^2 T(t) = 0}. \quad (4.39)$$

• Ας λύσουμε αρχικά την Εξ. 4.38, δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $e^{\tilde{\lambda}z}$, οπότε προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\tilde{\lambda}^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda}^2 = -k^2 \Rightarrow \tilde{\lambda} = \pm ik, \quad \text{π.χ. ας διαλέξουμε } k \in \mathfrak{R}_+$$

Άρα, ουσιαστικά, η λύση θα είναι της μορφής

$$Z(z) = Ae^{ikz} + Be^{-ikz} \quad (4.40)$$

$$Z(0) = 0 \quad \text{συνοριακή συνθήκη 1} \quad (4.41)$$

$$Z(L) = 0 \quad \text{συνοριακή συνθήκη 2} \quad (4.42)$$

όπου λάβαμε υπ' όψιν τις συνοριακές συνθήκες 4.37. Από τις Εξ. 4.40 και 4.41 συνεπάγεται ότι $A + B = 0 \Rightarrow B = -A$, οπότε η Εξ. 4.40 γίνεται

$$Z(z) = Ae^{ikz} - Ae^{-ikz} = 2iA \sin(kz) \quad (4.43)$$

και εφαρμόζοντας την Εξ. 4.42

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = m\pi, m \in \mathcal{Z}. \quad (4.44)$$

Δεδομένου όμως ότι διαλέξαμε παραπάνω $k \in \mathfrak{R}_+$ θα πρέπει $m \in \mathcal{N}$, και για μη μηδενική λύση θα πρέπει $m \in \mathcal{N}^*$, οπότε $k \in \mathfrak{R}_+^*$. Συνοπτικά το k εξαρτάται από ένα φυσικό, μη μηδενικό δείκτη δηλαδή

$$\boxed{k_m = \frac{m\pi}{L}, m \in \mathcal{N}^*} \quad (4.45)$$

Άρα

$$\left. \begin{aligned} Z_m(z) &= 2Ai \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \\ \int_0^L dz Z_m^*(z) Z_l(z) &= \delta_{ml} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Κι αν απαιτήσουμε οι Z_m να είναι ορθοκανονικές

$$\Rightarrow \int_0^L dz |2iA|^2 \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{L}\right) = \delta_{ml} \Rightarrow \int_0^\pi \frac{L}{\pi} d\psi |2iA|^2 \sin(m\psi) \sin(l\psi) = \delta_{ml}$$

όπου ορίσαμε $\psi = \frac{\pi z}{L}$, οπότε $d\psi = \frac{\pi}{L} dz$. Τότε

$$\frac{L}{\pi} 4 |A|^2 \int_0^\pi d\psi \sin(m\psi) \sin(l\psi) = \delta_{ml}.$$

Αλλά

$$\int_0^\pi d\psi \sin(m\psi) \sin(l\psi) = \frac{\pi}{2} \delta_{ml}, \quad (4.46)$$

ενώ ισχύει επίσης

$$\int_0^\pi d\psi \cos(m\psi) \cos(l\psi) = \frac{\pi}{2} \delta_{ml}. \quad (4.47)$$

Επομένως

$$\frac{L}{\pi} 4 |A|^2 \frac{\pi}{2} \delta_{ml} = \delta_{ml} \Rightarrow |A|^2 = \frac{1}{2L}.$$

$$\text{Ας διαλέξουμε κάτι βολικό, π.χ. } A = \frac{1}{\sqrt{2L}}(-i).$$

Συνεπώς

$$\boxed{Z_m(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)} \quad (4.48)$$

• Στη συνέχεια ας λύσουμε την Εξ. 4.39. Ας ορίσουμε

$$\omega := kc > 0, \quad (4.49)$$

οπότε $\omega^2 = k^2 c^2$. Χρησιμοποιώντας την Εξ. 4.45

$$\boxed{\omega_m = \frac{m\pi c}{L}, m \in \mathcal{N}^*} \quad (4.50)$$

Δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $e^{\tilde{\lambda}t}$, προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\tilde{\lambda}^2 + \omega_m^2 = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda} = \pm i\omega_m, \quad \omega_m \in \mathfrak{R}_+^*. \quad (4.51)$$

Άρα, ουσιαστικά, η λύση θα είναι της μορφής

$$T(t) = \Gamma e^{i\omega_m t} + \Delta e^{-i\omega_m t} \quad (4.52)$$

Κι αν θέσουμε την αρχική συνθήκη

$$T(0) = 0, \quad (4.53)$$

προκύπτει $\Gamma + \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = -\Gamma$, οπότε

$$T(t) = \Gamma e^{i\omega_m t} - \Gamma e^{-i\omega_m t} = 2i\Gamma \sin(\omega_m t) \Rightarrow \quad (4.54)$$

$$T_m(t) = 2i\Gamma \sin\left(\frac{m\pi c}{L}t\right) \quad (4.55)$$

Κι αν απαιτήσουμε οι T_m να είναι ορθοκανονικές, δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_0^{\text{κάτι}} dt T_m^*(t) T_l(t) = \delta_{ml} &\Rightarrow \int_0^{\text{κάτι}} dt |2i\Gamma|^2 \sin\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{l\pi ct}{L}\right) = \delta_{ml} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4|\Gamma|^2 \int_0^{\text{κάτι}} dt \sin\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{l\pi ct}{L}\right) = \delta_{ml}. \end{aligned}$$

Θέτοντας $\chi = \frac{\pi ct}{L}$, οπότε $d\chi = \frac{\pi c}{L} dt$, καταλήγουμε στη σχέση

$$4|\Gamma|^2 \frac{L}{\pi c} \int_0^{\frac{\pi c}{L} \cdot \text{κάτι}} d\chi \sin(m\chi) \sin(l\chi) = \delta_{ml} \quad (4.56)$$

Άρα, έχοντας υπ' όψη την Εξ. 4.46, είναι βολικό να θέσουμε $\frac{\pi c}{L} \cdot \text{κάτι} = \pi \Rightarrow$

$$\boxed{\text{κάτι} = \frac{L}{c} := \tau} \quad (4.57)$$

Έτσι ορισμένο το τ είναι ο χρόνος πτήσεως του φωτονίου διαμέσου της κοιλότητας (time of photon flight through cavity), άρα δεν ήταν παράλογο που το θέσαμε έτσι. Συνεπώς, εν τέλει, η ορθοκανονικοποίηση είναι

$$\int_0^{\tau} dt T_m^*(t) T_l(t) = \delta_{ml}. \quad (4.58)$$

Τελικά έχουμε

$$4|\Gamma|^2 \frac{L}{\pi c} \int_0^{\pi} d\chi \sin(m\chi) \sin(l\chi) = \delta_{ml} \Rightarrow |\Gamma| = \sqrt{\frac{c}{2L}}$$

Κι αν διαλέξουμε κάτι βολικό π.χ. $\Gamma = (-i)\sqrt{\frac{c}{2L}}$, τελικά έχουμε

$$\boxed{T_m(t) = \sqrt{\frac{2c}{L}} \sin\left(\frac{m\pi c}{L}t\right)} \quad (4.59)$$

Άρα, συνοψίζοντας, με τη βοήθεια των Εξ. 4.36, 4.48, 4.59 καταλήγουμε στην

$$\boxed{E_x^m(z, t) = \frac{2\sqrt{c}}{L} \mathcal{N} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi ct}{L}\right)} \quad (4.60)$$

Όσον αφορά τις μονάδες, θα πρέπει $[\frac{2\sqrt{c}}{L}\mathcal{N}] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C} \Rightarrow$

$$[\mathcal{N}] = \frac{V}{\sqrt{m/s}}. \quad (4.61)$$

Για να προσδιορίσουμε το μαγνητικό πεδίο θα χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 4.35 σε συνδυασμό με την Εξ. 4.60, οπότε προκύπτει

$$\frac{\partial B_y^m}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{2\sqrt{c}}{L} \mathcal{N} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \frac{m\pi c}{L} \cos\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \Rightarrow \quad (4.62)$$

$$\int_0^{z'} dz \frac{\partial B_y^m}{\partial z} = -\frac{2m\pi}{\sqrt{c}L^2} \mathcal{N} \cos\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \int_0^{z'} dz \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \Rightarrow \quad (4.63)$$

$$B_y^m(z', t) - B_y^m(0, t) = -\frac{2m\pi}{\sqrt{c}L^2} \mathcal{N} \cos\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \frac{L}{m\pi} \left[-\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \right]_0^{z'} \Rightarrow \quad (4.64)$$

$$B_y^m(z', t) - B_y^m(0, t) = \frac{2\mathcal{N}}{\sqrt{c}L} \cos\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \left[\cos\left(\frac{m\pi z'}{L}\right) - \cos 0 \right] \cdot 1 \quad (4.65)$$

Άρα, ορίζοντας κατάλληλα την τιμή του $B_y^m(0, t)$ προκύπτει

$$\boxed{B_y^m(z, t) = \frac{2\mathcal{N}}{\sqrt{c}L} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi ct}{L}\right)} \quad (4.66)$$

Για την πυκνότητα ενέργειας ισχύει

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\epsilon_0}{2} [E^2 + c^2 B^2]. \quad (4.67)$$

Σημειώνουμε ότι οι μονάδες για την πυκνότητα ενέργειας είναι $[U] = \frac{J}{m^3}$. Για παράδειγμα $[\frac{\epsilon_0}{2} E^2] = \frac{F}{m} \frac{V^2}{m^2} = \frac{CV^2}{Vm^3} = \frac{J}{m^3}$ και $[\frac{B^2}{2\mu_0}] = \frac{T^2 A}{Tm} = \frac{TA}{m} = \frac{N}{m^2} = \frac{Nm}{m^3} = \frac{J}{m^3}$, π.χ. λόγω των γνωστών σχέσεων $B = \mu_0 H$, $F = BI l$ και $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$. Άρα, από τις Εξ. 4.60, 4.66, 4.67 βρίσκουμε την πυκνότητα ενέργειας του m τρόπου

$$U_m = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{4c\mathcal{N}^2}{L^2} \left[\sin^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos^2\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \right]. \quad (4.68)$$

Άρα, η ενέργεια του m τρόπου, η οποία υπολογίζεται ολοκληρώνοντας την πυκνότητα ενέργειας του m τρόπου στην κοιλότητα όγκου $V = LS$,

$$E_m = \int_{V=LS} d^3r U_m, \quad (4.69)$$

είναι

$$E_m = \frac{2\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L^2} \left[\sin^2 \left(\frac{m\pi ct}{L} \right) \int_0^L dz \sin^2 \left(\frac{m\pi z}{L} \right) + \cos^2 \left(\frac{m\pi ct}{L} \right) \int_0^L dz \cos^2 \left(\frac{m\pi z}{L} \right) \right].$$

Θέτουμε $\psi = \frac{\pi z}{L} \Rightarrow d\psi = \frac{\pi}{L} dz$, άρα με τη βοήθεια των Εξ. 4.46-4.47, τα ολοκληρώματα στο z γίνονται $\frac{L}{\pi} \int_0^\pi d\psi \sin^2(m\psi) = \frac{L}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{L}{2}$ και $\frac{L}{\pi} \int_0^\pi d\psi \cos^2(m\psi) = \frac{L}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{L}{2}$. Αντικαθιστούμε στην παραπάνω εξίσωση και τελικά έχοντας ακολουθήσει αυτή την κλασική προσέγγιση έχουμε

$$E_m = \frac{\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L} \left[\sin^2 \left(\frac{m\pi ct}{L} \right) + \cos^2 \left(\frac{m\pi ct}{L} \right) \right] = \frac{\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L} \quad (4.70)$$

Ας δούμε τώρα λίγο αλλιώς την E_m

$$E_m = \frac{\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L^3} \left[L^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi ct}{L} \right) + L^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi ct}{L} \right) \right], \quad (4.71)$$

ορίζοντας “ γενικευμένη θέση και ταχύτητα ”. Καλούμε λοιπόν “ γενικευμένη θέση ”

$$q_m(t) := L \sin \left(\frac{m\pi ct}{L} \right) \quad (4.72)$$

και “ γενικευμένη ταχύτητα ”

$$\dot{q}_m(t) := m\pi c \cos \left(\frac{m\pi ct}{L} \right) \quad (4.73)$$

ούτως ώστε $[q_m(t)] = m$ και $[\dot{q}_m(t)] = m/s$. Τότε η Εξ. 4.71 γράφεται

$$E_m = \frac{\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L^3} \left[(q_m(t))^2 + \frac{L^2}{m^2 \pi^2 c^2} (\dot{q}_m(t))^2 \right], \quad (4.74)$$

Θα μπορούσαμε εδώ να θεωρήσουμε μια αναλογία της Εξ. 4.74 με Απλό Αρμονικό Ταλαντωτή (ΑΑΤ), του οποίου η ενέργεια θα ήταν

$$E = \frac{K}{2} x^2 + \frac{M}{2} v^2 = \frac{K}{2} \left[x^2 + \frac{M}{K} v^2 \right]. \quad (4.75)$$

Επομένως,

$$\frac{\epsilon_0 c \mathcal{N}^2 S}{L^3} = \frac{K}{2}, \quad (4.76)$$

$$\frac{L^2}{m^2\pi^2c^2} = \frac{M}{K}. \quad (4.77)$$

Δηλαδή προκύπτει η “σταθερά ελατηρίου”

$$K = \frac{2\epsilon_0c\mathcal{N}^2S}{L^3}, \quad (4.78)$$

και η “μάζα” (η οποία, σημειωτέο, εξαρτάται από το m , είναι δηλαδή διαφορετική για κάθε τρόπο του ΗΜ πεδίου m)

$$M_m = \frac{2\epsilon_0\mathcal{N}^2S}{cLm^2\pi^2}. \quad (4.79)$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η M_m έχει διαστάσεις μάζας (θα χρειαστεί και η Εξ. 4.61) και πως ισχύει $K = M_m\omega_m^2$. Άρα, κλασικά, υπάρχει μία τυπική ομοιότητα με ΑΑΤ με κυκλική συχνότητα ω_m (Εξ. 4.50) και “μάζα” M_m (Εξ. 4.79), δηλαδή η Εξ. 4.71 ή 4.74 γράφεται

$$E_m = \frac{M_m\omega_m^2}{2} q_m^2 + \frac{M_m}{2} \dot{q}_m^2 \quad (4.80)$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι το κβαντικό αντίστοιχο, για ένα τρόπο ΗΜ πεδίου m , δηλαδή η Χαμιλτονιανή του ΗΜ πεδίου για τον τρόπο m , θα είναι

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \frac{M_m\omega_m^2}{2} \hat{q}_m^2 + \frac{M_m}{2} \hat{\dot{q}}_m^2, \quad (4.81)$$

με ιδιοτιμές ενέργειας

$$E_{m, n_m} = \hbar\omega_m\left(n_m + \frac{1}{2}\right) \quad (4.82)$$

όπου ο δείκτης $m \in \mathcal{N}^*$ αφορά τον τρόπο του ΗΜ πεδίου και ο δείκτης $n_m \in \mathcal{N}$ αφορά τον αριθμό των φωτονίων στον τρόπο m . Συνεπώς, η Χαμιλτονιανή για όλους τους τρόπους του ΗΜ πεδίου θα είναι

$$\hat{H}_{\text{HM}} = \sum_m \hat{H}_{\text{HM}, m} \quad (4.83)$$

Κατόπιν, σημειώνουμε ότι από τις Εξ. 4.60 και 4.72 συνεπάγεται ότι

$$E_x^m(z, t) = \frac{2\sqrt{c}}{L^2} \mathcal{N} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) q_m(t), \quad (4.84)$$

οπότε το χβαντικό ανάλογο είναι

$$\hat{E}_x^m(z, t) = \frac{2\sqrt{c}}{L^2} \mathcal{N} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \hat{q}_m(t). \quad (4.85)$$

Επίσης, από τις Εξ. 4.66 και 4.73 συνεπάγεται ότι

$$B_y^m(z, t) = \frac{2\mathcal{N}}{L\sqrt{c}} \frac{1}{m\pi c} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \dot{q}_m(t), \quad (4.86)$$

οπότε το χβαντικό ανάλογο είναι

$$\hat{B}_y^m(z, t) = \frac{2\mathcal{N}}{L\sqrt{c}} \frac{1}{m\pi c} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \hat{q}_m(t). \quad (4.87)$$

Από τις Έξ. 4.84, 4.79 και 4.50 προκύπτει

$$\boxed{E_x^m(z, t) = \left(\frac{2M_m\omega_m^2}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) q_m(t)}, \quad (4.88)$$

οπότε το χβαντικό ανάλογο είναι

$$\boxed{\hat{E}_x^m(z, t) = \left(\frac{2M_m\omega_m^2}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \hat{q}_m(t)} \quad (4.89)$$

Από τις Έξ. 4.86, 4.79 και 4.50 προκύπτει

$$\boxed{B_y^m(z, t) = \frac{1}{c} \left(\frac{2M_m}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \dot{q}_m(t)}, \quad (4.90)$$

οπότε το χβαντικό ανάλογο είναι

$$\boxed{\hat{B}_y^m(z, t) = \frac{1}{c} \left(\frac{2M_m}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \hat{q}_m(t)}. \quad (4.91)$$

Τέλος, από τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει, όπως αναμενόταν, $[\frac{E_x}{B_y}] = [c]$.

4.4 Χαμιλτονιανή ΗΜ πεδίου με τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονίων.

Ας μιλήσουμε τώρα για τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονίων (photon creation and annihilation operators). Είναι τώρα εύκολο να χβαντωθεί η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το ΗΜ πεδίο, αρκεί να εφαρμοστεί η αντιστοιχία τελεστών

$$\hat{q}_m = q_m \quad (4.92)$$

$$\hat{p}_m = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_m} \quad (4.93)$$

Εισάγουμε τους τελεστές:

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}(M_m\omega_m\hat{q}_m + i\hat{p}_m) \quad \text{“καταστροφής”} \quad (4.94)$$

$$\hat{a}_m^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}(M_m\omega_m\hat{q}_m - i\hat{p}_m) \quad \text{“δημιουργίας”} \quad (4.95)$$

Ισχύουν οι ιδιότητες

$$\underbrace{[\hat{a}_m, \hat{a}_m^\dagger]}_{\text{μεταθέτης}} = \hat{a}_m\hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m = 1 \quad (4.96)$$

$$\underbrace{[\hat{q}_m, \hat{p}_m]}_{\text{μεταθέτης}} = i\hbar \quad (4.97)$$

Έτσι, οι τελεστές \hat{q}_m, \hat{p}_m μπορούν τώρα να γραφούν

$$\hat{q}_m = \left(\frac{\hbar}{2M_m\omega_m}\right)^{1/2} (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m) \quad (4.98)$$

$$\hat{p}_m = i\left(\frac{M_m\hbar\omega_m}{2}\right)^{1/2} (\hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m) \quad (4.99)$$

Συνεπώς η Χαμιλτονιανή του ΗΜ πεδίου για τον τρόπο m είναι

$$\boxed{\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \left(\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m + \frac{1}{2}\right)} \quad (4.100)$$

Ας συμβολίσουμε με $|n_m\rangle$ την κατάσταση του ΗΜ πεδίου με n_m αριθμό φωτονίων στον ΗΜ τρόπο m . Λέμε ότι είναι μια “κατάσταση φωτονικών αριθμών”. Τα $|n_m\rangle$ αποτελούν ένα πλήρες σύστημα, δηλαδή ισχύει $\langle n_m|l_m\rangle = \delta_{nl}$.

Οι τελεστές \hat{a}_m^\dagger και \hat{a}_m έχουν τις ιδιότητες

$$\hat{a}_m^\dagger |n_m\rangle = \sqrt{n_m + 1} |n_m + 1\rangle, \quad (4.101)$$

$$\hat{a}_m |n_m\rangle = \sqrt{n_m} |n_m - 1\rangle, \quad (4.102)$$

$$\hat{a}_m |0\rangle = |0\rangle. \quad (4.103)$$

Από τις Εξ. 4.101 και 4.102 προκύπτει

$$\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m |n_m\rangle = n_m |n_m\rangle, \quad (4.104)$$

δηλαδή ο τελεστής $\hat{N}_m = \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m$ μετρά τον αριθμό των φωτονίων του ΗΜ τρόπου m , οπότε μπορεί να αποκληθεί τελεστής του αριθμού των φωτονίων στον ΗΜ τρόπο m . Ακόμα, επαγωγικά προκύπτει

$$|n_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_m!}} (\hat{a}_m^\dagger)^{n_m} |0\rangle. \quad (4.105)$$

Λόγω των Εξ. 4.100 και 4.104 προκύπτει

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} |n_m\rangle = \hbar\omega_m \left(n_m + \frac{1}{2}\right) |n_m\rangle \quad (4.106)$$

δηλαδή η Χαμιλτονιανή $\hat{H}_{\text{HM}, m}$ δίνει ιδιοτιμές ενέργειας

$$\boxed{E_{m, n_m} = \hbar\omega_m \left(n_m + \frac{1}{2}\right)} \quad (4.107)$$

Η θεμελιώδης κατάσταση του ΑΑΤ $|0\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{1}{2}\hbar\omega_m$ αντιστοιχεί στο κενό δηλαδή χωρίς σωματίο, η 1η διεγερμένη κατάσταση του ΑΑΤ $|1\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{3}{2}\hbar\omega_m$ αντιστοιχεί σε ένα σωματίο, η 2η διεγερμένη κατάσταση του ΑΑΤ $|2\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{5}{2}\hbar\omega_m$ αντιστοιχεί σε δύο σωματίια κ.ο.κ.. Αυτά τα σωματίια εν προκειμένω τα λέμε φωτόνια. Δημιουργούνται και καταστρέφονται με τους τελεστές αναβιβάσεως και καταβιβάσεως ξεκινώντας από ένα επίπεδο αναφοράς που εδώ είναι το κενό. Υπακούουν στις μποζονικές σχέσεις μεταθέσεως (δείτε Ενότητα 4.6). Αυτή η αναπαράσταση είναι γνωστή και ως δεύτερη κβάντωση (second quantization).

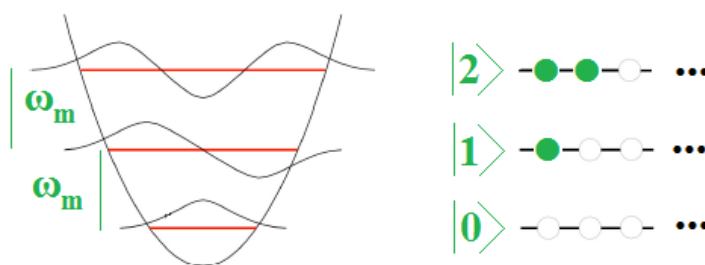
Η Χαμιλτονιανή του ΗΜ πεδίου για τον τρόπο m

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \left(\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega_m \left(\hat{N}_m + \frac{1}{2}\right), \quad (4.108)$$

αγνοώντας τον όρο $\frac{\hbar\omega_m}{2}$, μπορεί να γραφτεί

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m = \hbar\omega_m \hat{N}_m. \quad (4.109)$$

Μπορούμε να έχουμε οσαδήποτε φωτόνια στην ενεργειακή κατάσταση $\hbar\omega_m$ διότι είναι μποζόνια. Ο \hat{a}_m^\dagger είναι τελεστής αναβιβάσεως (raising operator) διότι αναβιβάζει την ενέργεια, δημιουργώντας φωτόνιο με ενέργεια $\hbar\omega_m$ εξ ου και η ονομασία τελεστής δημιουργίας (creation operator). Ο \hat{a}_m είναι τελεστής καταβιβάσεως (lowering operator) διότι καταβιβάζει την ενέργεια, καταστρέφοντας φωτόνιο με ενέργεια $\hbar\omega_m$ εξ ου και η ονομασία τελεστής καταστροφής (annihilation operator).



Σχήμα 4.5: Σωματίια (εδώ φωτόνια, απεικονίζονται με πράσινες βούλες) δημιουργούνται και καταστρέφονται μέσω των τελεστών αναβιβάσεως και καταβιβάσεως. Υπακούουν στις μποζονικές σχέσεις μεταθέσεως (δείτε Ενότητα 4.6). Αυτή η αναπαράσταση είναι γνωστή και ως δεύτερη κβάντωση (second quantization). Ο αριθμός των φωτονίων είναι ίσος με τον αριθμό των κόμβων της ιδιοσυναρτήσεως.

Τέλος, ας σημειώσουμε ότι από τις Εξ. 4.89 και 4.98 προκύπτει

$$\hat{E}_x^m(z, t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m) \quad (4.110)$$

ενώ από τις Εξ. 4.91 και 4.99 προκύπτει

$$\hat{B}_y^m(z, t) = \frac{i}{c} \left(\frac{\hbar\omega_m}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) (\hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m) \quad (4.111)$$

4.5 Χαμιλτονιανή δισταθμικού συστήματος με σπίνορες.

Θα περιγράψουμε την αναβίβαση και την καταβίβαση ενός ηλεκτρονίου μεταξύ των ενεργειακών σταθμών ενός δισταθμικού συστήματος π.χ. ενός ατόμου με τη βοήθεια σπινόρων (spinors). Σπίνορας είναι ένα διάνυσμα - στήλη με δύο συνιστώσες. Ας αρχίσουμε με ορισμούς (π.χ. [62]):

$$| \downarrow \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = | 0 \rangle, \quad | \uparrow \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = | 1 \rangle, \quad | \uparrow \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = | 2 \rangle \quad (4.112)$$

Το πρώτο παριστά το άδαιο δισταθμικό σύστημα, το δεύτερο δηλώνει το δισταθμικό σύστημα με το ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη όπου έχει ενέργεια E_1 και το τρίτο δηλώνει το δισταθμικό σύστημα με το ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη όπου έχει ενέργεια E_2 . Ας ορίσουμε τώρα τους τελεστές

$$\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

για τους οποίους μάλιστα ισχύει $\hat{S}_+^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_-$ Ας δούμε ποιό είναι το αποτέλεσμα της δράσεώς τους στους σπίνορες που ορίσαμε μόλις προ ολίγου.

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ | 0 \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = | 1 \rangle && \text{τίποτε} \\ \hat{S}_+ | 1 \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = | 0 \rangle && \text{το ανεβάζει} \\ \hat{S}_+ | 2 \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = | 0 \rangle && \text{το πετά έξω} \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}_- |0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \quad \text{τίποτε} \\
\hat{S}_- |\downarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \quad \text{το πετά έξω} \\
\hat{S}_- |\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle \quad \text{το κατεβάζει}
\end{aligned} \tag{4.115}$$

Έτσι, ο \hat{S}_+ ονομάζεται τελεστής αναβιβάσεως (raising operator) ενώ ο \hat{S}_- ονομάζεται τελεστής καταβιβάσεως (lowering operator) του ηλεκτρονίου. Ας δούμε μερικές ακόμα ιδιότητες.

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x \tag{4.116}$$

που είναι ένας από τους πίνακες Pauli που παρατίθενται λίγο παρακάτω (Εξ. 4.133).
Ακόμα,

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.117}$$

$$\hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.118}$$

Άρα, από τις Εξ. 4.117-4.118 συνεπάγεται ότι

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{I}} \tag{4.119}$$

που είναι ο διαγώνιος μοναδιαίος πίνακας. Μπορούμε να το γράψουμε και στη μορφή

$$\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{\mathbf{I}}. \tag{4.120}$$

$\{A, B\}$ ή $[A, B]_+$ είναι η αγκύλη Poisson ή αντιμεταθέτης (anticommutator) που ορίζεται ως

$$\{A, B\} = AB + BA, \quad (4.121)$$

ενώ $[A, B]$ ή $[A, B]_-$ είναι ο μεταθέτης (commutator) που ορίζεται ως

$$[A, B] = AB - BA. \quad (4.122)$$

Όταν $\{A, B\} = 0 \Rightarrow AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA$ δηλαδή οι ποσότητες A, B αντιμετατίθονται, ενώ όταν $[A, B] = 0 \Rightarrow AB - BA = 0 \Rightarrow AB = BA$ δηλαδή οι ποσότητες μετατίθονται, πράγμα που δείχνει την προέλευση των ονομασιών. Όπως θα δούμε παρακάτω, η αγκύλη Poisson ή αντιμεταθέτης χρησιμοποιείται στις σχέσεις αντιμεταθέσεως τις οποίες ακολουθούν τα ηλεκτρόνια που είναι φερμιόνια, ενώ ο μεταθέτης χρησιμοποιείται στις σχέσεις μεταθέσεως τις οποίες ακολουθούν τα φωτόνια που είναι μποζόνια. Συχνά, στα ελληνικά συγγράμματα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, πολύ κακώς, εδώ και δεκαετίες ονομάζεται "αντιμεταθετική" η μεταθετική (commutative) ιδιότητα, χαθήκαμε δηλαδή στη μετάφραση...

Η Χαμιλτονιανή του Δισταθμικού Συστήματος $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$ είναι η

$$E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+ = E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \quad (4.123)$$

αφού

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = E_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.124)$$

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \end{pmatrix} = E_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.125)$$

Άρα, συνοπτικά, δείξαμε ότι

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+} \quad (4.126)$$

Αν τώρα θέσουμε $E_1 = 0 \Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$ (θυμηθείτε την Εξ. 3.53), οπότε

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-} \quad (4.127)$$

Ο τελεστής $\hat{S}_+\hat{S}_-$ μετρά τον αριθμό των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη, αφού

$$\hat{S}_+\hat{S}_- |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \Rightarrow \hat{S}_+\hat{S}_- |1\rangle = 0 |1\rangle, \quad (4.128)$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle \Rightarrow \hat{S}_+\hat{S}_- |2\rangle = 1 |2\rangle. \quad (4.129)$$

Ο τελεστής $\hat{S}_-\hat{S}_+$ μετρά τον αριθμό των ηλεκτρονίων στην κάτω στάθμη, αφού

$$\hat{S}_-\hat{S}_+ |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \Rightarrow \hat{S}_-\hat{S}_+ |1\rangle = 1 |1\rangle, \quad (4.130)$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+ |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \Rightarrow \hat{S}_-\hat{S}_+ |2\rangle = 0 |2\rangle. \quad (4.131)$$

Παρατήρηση: Συνοπτικά, για τους τελεστές \hat{S}_+ και \hat{S}_- μπορούμε να αποδείξουμε ότι $(\hat{S}_+)^\dagger = \hat{S}_-$ αλλά και ότι

$$\begin{aligned} \{\hat{S}_+, \hat{S}_+^\dagger\} &= \{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+ = \hat{\mathbf{I}} \\ \{\hat{S}_-, \hat{S}_-^\dagger\} &= \{\hat{S}_-, \hat{S}_+\} = \hat{S}_-\hat{S}_+ + \hat{S}_+\hat{S}_- = \hat{\mathbf{I}} \\ \{\hat{S}_+, \hat{S}_+\} &= \{\hat{S}_-^\dagger, \hat{S}_-^\dagger\} = \hat{S}_+\hat{S}_+ + \hat{S}_+\hat{S}_+ = \hat{\mathbf{0}} \\ \{\hat{S}_-, \hat{S}_-\} &= \{\hat{S}_+^\dagger, \hat{S}_+^\dagger\} = \hat{S}_-\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_- = \hat{\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (4.132)$$

όπου $\hat{\mathbf{I}}$ είναι ο διαγώνιος μοναδιαίος πίνακας 2×2 και $\hat{\mathbf{0}}$ είναι ο μηδενικός πίνακας 2×2 . Οι Εξ. 4.132 δείχνουν ότι οι τελεστές \hat{S}_+ και \hat{S}_- υπακούουν στις σχέσεις αντι-μεταθέσεως φερμιονίων που αναφέρουμε στην Υποενότητα 4.6.2 της Ενότητας 4.6. Ο \hat{S}_+ είναι τελεστής αναβιβάσεως (raising operator) διότι αναβιβάζει την ενέργεια δημιουργώντας ηλεκτρόνιο με ενέργεια $\hbar\Omega$ εξ ου και η ονομασία τελεστής δημιουργίας (creation operator). Ο \hat{S}_- είναι τελεστής καταβιβάσεως (lowering operator) διότι καταβιβάζει την ενέργεια, καταστρέφοντας ηλεκτρόνιο με ενέργεια $\hbar\Omega$ εξ ου και η ονομασία τελεστής καταστροφής (annihilation operator). Μπορούμε να έχουμε μόνο ένα ηλεκτρόνιο με ενέργεια $\hbar\Omega$ διότι τα ηλεκτρόνια είναι φερμιόνια.

Ας θυμηθούμε τώρα τους πίνακες Pauli $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ και ας δούμε τη σχέση τους με τους τελεστές αναβιβάσεως και καταβιβάσεως ηλεκτρονίων \hat{S}_+ και \hat{S}_- , αντιστοίχως.

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.133)$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.134)$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.135)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει η ιδιότητα

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z, \quad (4.136)$$

καθώς και οι κυκλικές εναλλαγές της. Επίσης,

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{I}}. \quad (4.137)$$

και

$$\begin{aligned} \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\} &= \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \hat{0} \\ \{\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\} &= \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = \hat{0} \\ \{\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x\} &= \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = \hat{0} \end{aligned} \quad (4.138)$$

δηλαδή οι πίνακες Pauli αντιμετατίθενται. Επί παραδείγματι,

$$\begin{aligned} \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\} &= \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0} \end{aligned}$$

Ακόμα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ + \hat{S}_- &= \hat{\sigma}_x \\ \hat{S}_+ - \hat{S}_- &= i\hat{\sigma}_y \end{aligned}$$

4.6 Σχέσεις μεταθέσεως μποζονίων και σχέσεις αντιμεταθέσεως φερμιονίων.

4.6.1 Σχέσεις μεταθέσεως μποζονίων π.χ. φωτονίων.

Ας ονομαστεί \hat{a}_m ο τελεστής καταστροφής μποζονίων και \hat{a}_m^\dagger ο τελεστής δημιουργίας μποζονίων στην κατάσταση m . Για τα μποζόνια ισχύουν οι σχέσεις μεταθέσεως (commutation relations)

$$\begin{aligned} [\hat{a}_m, \hat{a}_\ell] &= 0 \\ [\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_\ell^\dagger] &= 0 \end{aligned} \quad (4.139)$$

$[A, B]$ ή $[A, B]_-$ είναι ο μεταθέτης (commutator) που ορίζεται ως

$$[A, B] = AB - BA, \quad (4.140)$$

οπότε, όταν $[A, B] = 0 \Rightarrow AB - BA = 0 \Rightarrow AB = BA$ δηλαδή οι ποσότητες μετατίθενται, πράγμα που δείχνει την προέλευση της ονομασίας.

4.6.2 Σχέσεις αντιμεταθέσεως φερμιονίων π.χ. ηλεκτρονίων.

Ας ονομαστεί \hat{a}_i ο τελεστής καταστροφής φερμιονίων και \hat{a}_i^\dagger ο τελεστής δημιουργίας φερμιονίων στην κατάσταση i . Για τα φερμιόνια ισχύουν οι σχέσεις αντιμεταθέσεως (anticommutation relations)

$$\begin{aligned} \{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} &= \delta_{ij} \\ \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} &= 0 \\ \{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.141)$$

$\{A, B\}$ ή $[A, B]_+$ είναι η αγκύλη Poisson ή αντιμεταθέτης (anticommutator) που ορίζεται ως

$$\{A, B\} = AB + BA, \quad (4.142)$$

οπότε, όταν $\{A, B\} = 0 \Rightarrow AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA$ δηλαδή οι ποσότητες A, B αντιμετατίθενται, πράγμα που δείχνει την προέλευση της ονομασίας. Αν εφαρμόσουμε τη σχέση $\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0$ για την ίδια κατάσταση π.χ. $i = j = r$, έχουμε $\{\hat{a}_r^\dagger, \hat{a}_r^\dagger\} = 0 \Rightarrow \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r^\dagger = 0$, που σημαίνει ότι δεν μπορούμε να βάλουμε δύο φερμιόνια στην ίδια κατάσταση, πράγμα που είναι η απαγορευτική αρχή Pauli.

4.7 Τελεστές κλίμακας (Ladder operators) [63].

Στη γραμμική άλγεβρα καθώς και στις εφαρμογές της στην κβαντική μηχανική, ορίζεται ο τελεστής αναβιβάσεως (raising operator) ο οποίος αυξάνει την ιδιοτιμή ενός άλλου τελεστή και ο τελεστής καταβιβάσεως (lowering operator) ο οποίος μειώνει την ιδιοτιμή ενός άλλου τελεστή. Αυτοί συλλογικά ονομάζονται τελεστές κλίμακας (ladder operators). Στην κβαντομηχανική, ο τελεστής αναβιβάσεως καλείται συχνά τελεστής δημιουργίας (creation operator), και ο τελεστής καταβιβάσεως καλείται συχνά τελεστής καταστροφής (annihilation operator). Γνωστές εφαρμογές των τελεστών κλίμακας είναι στον απλό αρμονικό ταλαντωτή και στη στροφορμή. Σε πολλές περιοχές της φυσικής και της χημείας η χρήση αυτών των τελεστών αντί κυματοσυναρτήσεων είναι γνωστή ως δεύτερη κβάντωση (second quantization) [64].

4.8 Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου.

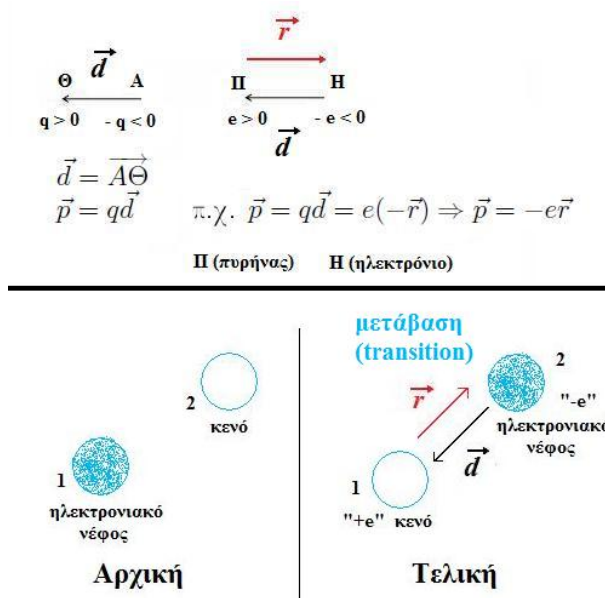
Έστω δύο αντίθετα ηλεκτρικά φορτία, $q > 0$ και $-q < 0$, στα σημεία Θ και A , αντιστοίχως. Αν $\vec{d} = \vec{A\Theta}$ είναι το διάνυσμα θέσεως του θετικού φορτίου ως προς το αρνητικό, τότε η **ηλεκτρική διπολική ροπή** (electric dipole moment) ορίζεται ως

$$\vec{P} = q\vec{d} \quad (4.143)$$

π.χ. για το άτομο του υδρογόνου, αν το Π παριστάνει τον πυρήνα και το H παριστάνει το ηλεκτρόνιο και ως συνήθως ορίσουμε $\vec{r} = \vec{\Pi H}$, τότε $\vec{P} = q\vec{d} = e(-\vec{r}) \Rightarrow$

$$\vec{P} = -e\vec{r}. \quad (4.144)$$

Αυτό αποδίδεται άνω τμήμα του Σχήματος 4.6. Η **δυναμική ενέργεια** (potential



Σχήμα 4.6: Άνω. Ηλεκτρική διπολική ροπή (electric dipole moment). Κάτω. (Ηλεκτρική) διπολική ροπή μεταβάσεως (transition (electric) dipole moment)

energy) $U_{\mathcal{E}}$ του ηλεκτρικού διπόλου εντός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathcal{E}}$ είναι

$$U_{\mathcal{E}} = -\vec{P} \cdot \vec{\mathcal{E}}. \quad (4.145)$$

Ανάλογος με τον παραπάνω ορισμό μπορεί να δοθεί και για την περίπτωση της μεταβάσεως ενός τμήματος του ηλεκτρονιακού νέφους από μία αρχική σε μια τελική περιοχή. Έτσι ορίζεται η **(ηλεκτρική) διπολική ροπή μεταβάσεως** [transition (electric) dipole moment].¹ Αυτό αποδίδεται στο κάτω τμήμα το Σχήματος 4.6. Αν το φορτίο που μεταφέρεται είναι $-e$, πάλι $\vec{p} = q\vec{d} = e(-\vec{r}) \Rightarrow \vec{p} = -e\vec{r}$. Δηλαδή, εννοείται, ότι για την περιοχή 2 τελική μείον αρχική κατάσταση ισοδυναμεί με μετάβαση φορτίου $-e$, ενώ για την περιοχή 1 τελική μείον αρχική κατάσταση ισοδυναμεί με μετάβαση φορτίου $+e$.

Ο **τελεστής (ηλεκτρικής) διπολικής ροπής μεταβάσεως** [transition (electric) dipole moment operator] σημειώνεται εναλλακτικά με \hat{d} ή \hat{p} . Στη βάση των ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας του αδιατάρακτου ατόμου ή συστήματος ορίζεται ως

$$\hat{d} = \hat{p} := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{d}_{ij} | \Phi_i \rangle \langle \Phi_j | \quad (4.146)$$

με τους επίσης εναλλακτικούς συμβολισμούς

$$\vec{d}_{ij} = \vec{p}_{ij} := -e \langle \Phi_i | \hat{r} | \Phi_j \rangle \quad (4.147)$$

για το στοιχείο πίνακα της (ηλεκτρικής) διπολικής ροπής μεταβάσεως μεταξύ των καταστάσεων $| \Phi_i \rangle$ και $| \Phi_j \rangle$. Υπενθυμίζεται ότι ο τελεστής θέσεως (position operator) \hat{r} είναι τέτοιος ώστε

$$\hat{r} | \vec{r} \rangle = \vec{r} | \vec{r} \rangle. \quad (4.148)$$

Υπενθυμίζεται για τον συμβολισμό Dirac ότι

$$| A \rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \langle A | = (\alpha_1^* \quad \alpha_2^*). \quad (4.149)$$

Υπενθυμίζεται ακόμα ότι

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i | \hat{r} | \Phi_j \rangle &= \sum_{|\vec{r}'\rangle, |\vec{r}''\rangle} \langle \Phi_i | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \hat{r} | \vec{r}'' \rangle \langle \vec{r}'' | \Phi_j \rangle = \sum_{|\vec{r}'\rangle} \langle \Phi_i | \vec{r}' \rangle \vec{r}' \langle \vec{r}' | \Phi_j \rangle \\ &= \sum_{|\vec{r}\rangle} \langle \Phi_i | \vec{r} \rangle \vec{r} \langle \vec{r} | \Phi_j \rangle = \int dV \Phi_i(\vec{r})^* \vec{r} \Phi_j(\vec{r}) \end{aligned}$$

¹Η λέξη “ηλεκτρική” είναι εντός παρενθέσεως επειδή συνήθως, επειδή εννοείται, παραλείπεται.

διότι

$$\langle \vec{r}' | \hat{r} | \vec{r}'' \rangle = \vec{r}'' \langle \vec{r}' | \vec{r}'' \rangle = \vec{r}'' \delta_{\vec{r}', \vec{r}''}. \quad (4.150)$$

Άρα

$$\vec{d}_{11} = -e \langle \Phi_1 | \hat{r} | \Phi_1 \rangle = -e \int dV \underbrace{\Phi_1(\vec{r})^* \vec{r} \Phi_1(\vec{r})}_{\text{περιττή}} = 0, \quad \star \quad (4.151)$$

$$\vec{d}_{12} = -e \langle \Phi_1 | \hat{r} | \Phi_2 \rangle = -e \int dV \Phi_1(\vec{r})^* \vec{r} \Phi_2(\vec{r}) \neq 0, \quad (4.152)$$

$$\vec{d}_{21} = -e \langle \Phi_2 | \hat{r} | \Phi_1 \rangle = -e \int dV \Phi_2(\vec{r})^* \vec{r} \Phi_1(\vec{r}) \neq 0, \quad (4.153)$$

$$\vec{d}_{22} = -e \langle \Phi_2 | \hat{r} | \Phi_2 \rangle = -e \int dV \underbrace{\Phi_2(\vec{r})^* \vec{r} \Phi_2(\vec{r})}_{\text{περιττή}} = 0. \quad \star \quad (4.154)$$

Δηλαδή ενώ τα διαγώνια στοιχεία μηδενίζονται, τα \vec{d}_{12} και \vec{d}_{21} δεν είναι (“εξ ταυτότητος”) μηδέν. Ας δούμε τώρα ποιος είναι ο \hat{p} σε δισταθμικό σύστημα.

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \vec{d}_{11} | \Phi_1 \rangle \langle \Phi_1 | + \vec{d}_{12} | \Phi_1 \rangle \langle \Phi_2 | + \vec{d}_{21} | \Phi_2 \rangle \langle \Phi_1 | + \vec{d}_{22} | \Phi_2 \rangle \langle \Phi_2 | \\ &= \vec{d}_{11} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \vec{d}_{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \vec{d}_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \vec{d}_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\vec{d}_{11}^0}_{\text{διαγώνιο στοιχείο}} \star \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{τμήμα διαγώνιου πίνακα}} + \underbrace{\vec{d}_{12}}_{\text{μη διαγώνιο στοιχείο}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{τμήμα αντιδιαγώνιου πίνακα}} \\ &+ \underbrace{\vec{d}_{21}}_{\text{μη διαγώνιο στοιχείο}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{τμήμα αντιδιαγώνιου πίνακα}} + \underbrace{\vec{d}_{22}^0}_{\text{διαγώνιο στοιχείο}} \star \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{τμήμα διαγώνιου πίνακα}} \end{aligned}$$

Από τις Εξ. (4.152)-(4.153) συμπεραίνουμε ότι $\vec{d}_{12} = \vec{d}_{21}$, με την προϋπόθεση ότι οι $\Phi_i(\vec{r})$ είναι πραγματικές, οπότε

$$\hat{p} = \vec{d}_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.155)$$

Ερώτηση: Και τι κάνει ο τελεστής $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

Απάντηση:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή μεταφέρει από τη μία ενεργειακή στάθμη στην άλλη, όπως θα έπρεπε!

Τώρα μπορεί να οριστεί ο **τελεστής δυναμικής ενέργειας** (potential energy operator). Θεωρούμε ότι η αλληλεπίδραση δισταθμικού συστήματος - HM πεδίου έχει τη μορφή μηχανισμού ηλεκτρικού διπόλου. Αγνοούμε άλλης μορφής αλληλεπιδράσεις, όπως π.χ. ηλεκτρικού τετραπόλου ή μαγνητικού διπόλου. Αφού

$$U_{\mathcal{E}} = -\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \Rightarrow$$

$$U_{\mathcal{E}}^m = -\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^m, \quad (4.156)$$

όπου ο δείκτης m δηλώνει τον m τρόπο του HM πεδίου, ο αντίστοιχος τελεστής μπορεί να οριστεί ως

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = -\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{\mathcal{E}}}^m. \quad (4.157)$$

Επομένως,

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{d}_{ij} |\Phi_i\rangle \langle \Phi_j| \cdot \hat{E}_x^m(z, t) \hat{i}.$$

\hat{i} είναι το μοναδιαίο άνυσμα του άξονα x , αφού έχουμε υποθέσει αυτόν τον προσανατολισμό για το ηλεκτρικό πεδίο (δείτε Σχήμα 4.2). Ή, λόγω της Εξ. 4.155,

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = -\vec{d}_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{E}_x^m(z, t) \hat{i}. \quad (4.158)$$

Αλλά

$$\vec{d}_{12} \cdot \hat{i} = -e \int dV \Phi_1(\vec{r})^* (\vec{r} \cdot \hat{i}) \Phi_2(\vec{r}) = -ex_{12} = \mathcal{P}_{x_{12}} := \mathcal{P}. \quad (4.159)$$

Συνεπώς,

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = ex_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{E}_x^m(z, t). \quad (4.160)$$

Υπενθυμίζονται οι Εξ. 4.110 και 4.111

$$\hat{E}_x^m(z, t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m) \quad (4.161)$$

$$\hat{B}_y^m(z, t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) i(\hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m). \quad (4.162)$$

από τις οποίες, όμως, στα πλαίσια των υποθέσεών μας χρειαζόμαστε τώρα μόνον την πρώτη. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.163)$$

Άρα εν τέλει

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = ex_{12} \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m). \quad (4.164)$$

Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{\hbar g^m = ex_{12} \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)} \quad (4.165)$$

$$\boxed{\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m)} \quad (4.166)$$

Αυτή είναι λοιπόν η **Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου για τον ΗΜ τρόπο m** . Εάν βρισκόμαστε στα πλαίσια της ατομικής φυσικής, τότε συμβολίζεται και \hat{H}_{AF}^m όπου οι δείκτες σημαίνουν Atom-Field.

Από την Εξ. 4.165 προκύπτει

$$\hbar |g^m| = |\mathcal{P}| \left| \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \right| := |\mathcal{P}| E_0^m. \quad (4.167)$$

όπου όμως το “πλάτος” E_0^m εξαρτάται από τη θέση z του ατόμου στην κοιλότητα είναι δηλαδή $E_0^m = E_0^m(z)$. Η $|g^m|$ (ή οποία συμβολίζεται και με Ω_R^m) είναι η λεγόμενη συχνότητα Rabi. Εάν εννοείται σε ποιον HM τρόπο m αναφερόμαστε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σκέτο το $|g|$ ή το Ω_R . Άρα,

$$|g^m| \quad \text{ή} \quad \Omega_R^m := \frac{|\mathcal{P}|E_0^m}{\hbar} \quad (4.168)$$

Για να μη γράφουμε απόλυτα, μπορούμε σε κάθε θέση να διαλέγουμε τη φάση των κυματοσυναρτήσεων τέτοια ώστε το g να είναι θετικό και πραγματικό [65]. Συνοπτικά

$$\boxed{g^m \quad \text{ή} \quad \Omega_R^m := \frac{|\mathcal{P}|E_0^m}{\hbar}} \quad (4.169)$$

Μέχρι τώρα είδαμε την Εξ. 4.100 στην Ενότητα 4.4, η οποία περιγράφει έναν HM τρόπο m , δηλαδή την

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \left(\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \frac{1}{2} \right),$$

η οποία αγνοώντας τον όρο $\frac{\hbar\omega_m}{2}$ γίνεται η Εξ. 4.109

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m = \hbar\omega_m \hat{N}_m.$$

Ακόμα είδαμε την Εξ. 4.126 στην Ενότητα 4.5, η οποία περιγράφει ένα δισταθμικό σύστημα, δηλαδή την

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+,$$

η οποία θέτοντας $E_1 = 0 \Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$ (θυμηθείτε την Εξ. 3.53) γίνεται η Εξ. 4.127

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-.$$

Τώρα συμπληρώνεται η εικόνα με την Εξ. 4.166, η οποία περιγράφει την αλληλεπίδραση ενός HM τρόπου m με ένα δισταθμικό σύστημα, δηλαδή την

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m). \quad (4.170)$$

Άρα, η Χαμιλτονιανή που περιγράφει έναν HM τρόπο m , ένα δισταθμικό σύστημα και την μεταξύ τους αλληλεπίδραση (ονομάζεται συχνά Χαμιλτονιανή Rabi) μπορεί να γραφτεί

$$\boxed{\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m)} \quad (4.171)$$

Επομένως, οι ολικές ιδιοκαταστάσεις (ηλεκτρονίου και HM τρόπου m) είναι

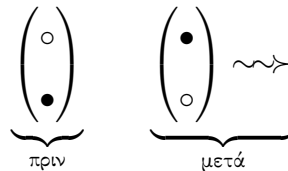
$$|\uparrow, n_m\rangle, \quad (4.172)$$

$$|\downarrow, n_m\rangle. \quad (4.173)$$

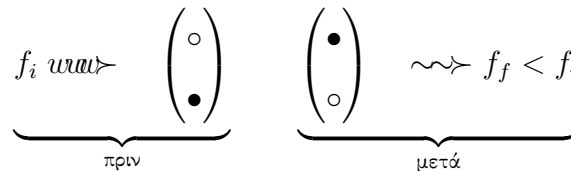
Ας δούμε λίγο προσεκτικότερα τη Χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου (Εξ. 4.166). Για έναν, μοναδικό τρόπο m η Χαμιλτονιανή αυτή αναλυεται σε τέσσερις όρους

$$\begin{aligned}\hat{U}_\varepsilon^m &= \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m) = \\ &= \hbar g^m \left\{ \underbrace{\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger}_{1\text{ος}} + \underbrace{\hat{S}_+ \hat{a}_m}_{2\text{ος}} + \underbrace{\hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger}_{3\text{ος}} + \underbrace{\hat{S}_- \hat{a}_m}_{4\text{ος}} \right\}.\end{aligned}$$

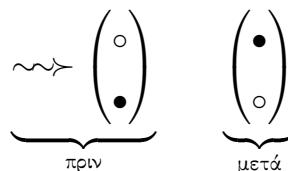
- 1ος ΟΡΟΣ. Το ηλεκτρόνιο ανεβαίνει και δημιουργείται / εκπέμπεται φωτόνιο. Άρα η μεταβολή της ενέργειας $\Delta E > 0$. Επόμενως, αυτός ο όρος, μόνος του, δεν διατηρεί την ενέργεια και φαντάζει παράλογος. Σχηματικά:



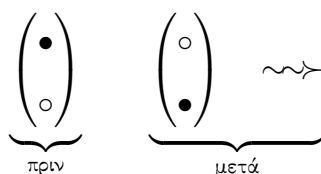
Πλην όμως, είναι δυνατόν να κρατηθούν τέτοιοι όροι όταν υποστηρίζονται πολλοί τρόποι (m) άρα πολλές συχνότητες (Εξ. 4.50). Δηλαδή όταν η Χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου αποτελείται από άθροισμα όρων όπως η Εξ. 4.166. Τότε είναι δυνατόν το δισταθμικό σύστημα να απορροφήσει ένα φωτόνιο υψηλής συχνότητας και να ανεβεί ενώ παράλληλα δημιουργείται / εκπέμπεται φωτόνιο χαμηλότερης συχνότητας. Σχηματικά:



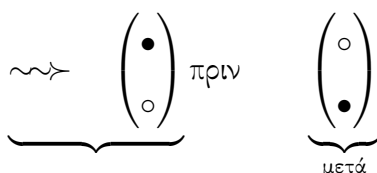
- 2ος ΟΡΟΣ. Το ηλεκτρόνιο ανεβαίνει και καταστρέφεται / απορροφάται φωτόνιο. Αυτός ο όρος, ακόμα κι αν υπάρχει μόνο ένας τρόπος (m), μπορεί να διατηρεί την ενέργεια. Σχηματικά:



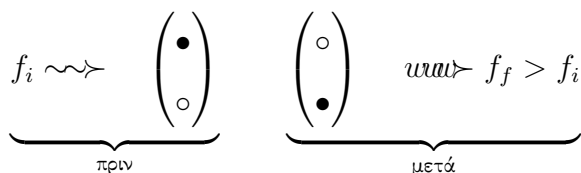
- 3ος ΟΡΟΣ. Το ηλεκτρόνιο κατεβαίνει και δημιουργείται / εκπέμπεται φωτόνιο. Και αυτός ο όρος, ακόμα κι αν υπάρχει μόνο ένας τρόπος (m), μπορεί να διατηρεί την ενέργεια. Σχηματικά:



- 4ος ΟΡΟΣ. Το ηλεκτρόνιο κατεβαίνει και καταστρέφεται / απορροφάται φωτόνιο. Άρα η μεταβολή της ενέργειας $\Delta E < 0$. Επόμενως, και αυτός ο όρος, μόνος του, δεν διατηρεί την ενέργεια και φαντάζει παράλογος. Σχηματικά:



Πλην όμως, είναι δυνατόν να κρατηθούν τέτοιοι όροι όταν υποστηρίζονται πολλοί τρόποι (m) άρα πολλές συχνότητες (Εξ. 4.50). Δηλαδή όταν η Χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως δισταθμικού συστήματος - ΗΜ πεδίου αποτελείται από άθροισμα όρων όπως η Εξ. 4.166. Τότε είναι δυνατόν το δισταθμικό σύστημα να απορροφήσει ένα φωτόνιο χαμηλής συχνότητας και να κατεβεί ενώ παράλληλα δημιουργείται / εκπέμπεται φωτόνιο υψηλότερης συχνότητας. Σχηματικά:



Αν αγνοήσουμε τον 1ο και 4ο όρο που ο καθένας μόνος του δεν διατηρεί την ενέργεια, τότε

$$\hat{U}_{\mathcal{E}}^m = \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger). \quad (4.174)$$

Η προσέγγιση είναι κατά κάποιο τρόπο ανάλογη της RWA (Rotating Wave Approximation) του Κεφαλαίου 3. Εκεί, στις εξισώσεις Rabi κρατήσαμε μόνο τους αργούς όρους όπου ΗΜ πεδίο και το δισταθμικό σύστημα βρίσκονται σε περίπου συντονισμό

δηλαδή $\Omega \simeq \omega$. Τότε κρατήσαμε τους αργούς όρους $e^{\pm i(\Omega-\omega)t}$ και αγνοήσαμε τους γρήγορους όρους $e^{\pm i(\Omega+\omega)t}$.

Συνοπτικά, ενώ για την ολική Χαμιλτονιανή ενός τρόπου m έχουμε την λεγόμενη Χαμιλτονιανή Rabi

$$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m), \quad (4.175)$$

κατά την παραπάνω συζήτηση αγνοούμε σε πρώτη προσέγγιση τους λεγόμενους counter-rotating terms

$$\hat{H}_{\text{counter-rotating}} = \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m) \quad (4.176)$$

οπότε λαμβάνουμε τη λεγόμενη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings [66]

$$\boxed{\hat{H}_{JC}^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger)}. \quad (4.177)$$

Στην **Άσκηση 1** (παραλείποντας τον δείκτη του HM τρόπου m απλότητα) βρίσκουμε (A) τι κάνουν οι όροι $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, $\hat{a} \hat{a}^\dagger$, $\hat{S}_+ \hat{S}_-$, $\hat{S}_- \hat{S}_+$, $\hat{S}_+ \hat{a}^\dagger$, $\hat{S}_+ \hat{a}$, $\hat{S}_- \hat{a}^\dagger$, $\hat{S}_- \hat{a}$, στις καταστάσεις $|\downarrow, n\rangle$ και $|\uparrow, n\rangle$, και (B) υπολογίζουμε τα $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle$, $\langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle$, $\langle \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_+ \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_- \hat{a} \rangle$, για τις καταστάσεις $|\downarrow, n\rangle$ και $|\uparrow, n\rangle$.

4.9 Σύνοψη Χαμιλτονιανών.

Μέχρι τώρα είδαμε την Εξ. 4.100 στην Ενότητα 4.4, η οποία περιγράφει έναν HM τρόπο m , δηλαδή την

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \left(\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \frac{1}{2} \right),$$

η οποία αγνοώντας τον όρο $\frac{\hbar\omega_m}{2}$ γίνεται η Εξ. 4.109

$$\hat{H}_{\text{HM}, m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m.$$

Ακόμα είδαμε την Εξ. 4.126 στην Ενότητα 4.5, η οποία περιγράφει ένα δισταθμικό σύστημα, δηλαδή την

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+,$$

η οποία θέτοντας $E_1 = 0 \Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$ (θυμηθείτε την Εξ. 3.53) γίνεται η Εξ. 4.127

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-.$$

Ακόμα είδαμε την Εξ. 4.166, η οποία περιγράφει την αλληλεπίδραση ενός HM τρόπου m με ένα δισταθμικό σύστημα, δηλαδή την

$$\hat{U}_\mathcal{E}^m = \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m).$$

Οπότε, η Χαμιλτονιανή που περιγράφει έναν HM τρόπο m , ένα δισταθμικό σύστημα και την μεταξύ τους αλληλεπίδραση (ονομάζεται συχνά Χαμιλτονιανή Rabi) μπορεί να γραφτεί (Εξ. 4.171)

$$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) (\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m)$$

και οι ολικές ιδιοκαταστάσεις (ηλεκτρονίου και HM τρόπου m) είναι

$$\begin{aligned} &|\uparrow, n_m\rangle, \\ &|\downarrow, n_m\rangle. \end{aligned}$$

Ακόμα, αν αγνοήσουμε σε πρώτη προσέγγιση τους λεγόμενους counter-rotating terms (Εξ. 4.176)

$$\hat{H}_{\text{counter-rotating}} = \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m),$$

τότε λαμβάνουμε τη λεγόμενη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings [66] (Εξ. 4.177)

$$\hat{H}_{\text{JC}}^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger).$$

4.10 Μέσες (αναμενόμενες) τιμές μεγεθών για τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings.

Υπενθυμίζουμε πως φτάσαμε στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings. Η ολική Χαμιλτονιανή (ενός τρόπου m) είναι η λεγόμενη Χαμιλτονιανή Rabi (Εξ. 4.175)

$$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m) \quad (4.178)$$

και αν αγνοήσουμε σε πρώτη προσέγγιση λεγόμενους counter-rotating terms (Εξ. 4.176)

$$\hat{H}_{\text{counter-rotating}} = \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m) \quad (4.179)$$

λαμβάνουμε τη λεγόμενη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings (Εξ. 4.177)

$$\hat{H}_{JC}^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger) \quad (4.180)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τα $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle$, $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle$, $\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle$, $\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \rangle$ για τις καταστάσεις:

- (A) $|\Psi_A(t)\rangle = c_1(t) |\downarrow, n\rangle + c_2(t) |\uparrow, n-1\rangle$
- (E) $|\Psi_E(t)\rangle = c_1(t) |\downarrow, n+1\rangle + c_2(t) |\uparrow, n\rangle$

Περίπτωση (A)

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(A)} &= \langle \psi_A(t) | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \psi_A(t) \rangle = \\ &= \{ c_1^* \langle \downarrow, n | + c_2^* \langle \uparrow, n-1 | \} \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \{ c_1 |\downarrow, n\rangle + c_2 |\uparrow, n-1\rangle \} \\ &= |c_1|^2 \langle \downarrow, n | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \downarrow, n \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \uparrow, n-1 \rangle \\ &\quad + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n-1 | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \downarrow, n \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \uparrow, n-1 \rangle \\ &= |c_1|^2 \sqrt{n} \sqrt{n} \langle \downarrow, n | \downarrow, n \rangle + c_1^* c_2 \sqrt{n-1} \sqrt{n-1} \langle \downarrow, n | \uparrow, n-1 \rangle \\ &\quad + c_2^* c_1 \sqrt{n} \sqrt{n} \langle \uparrow, n-1 | \downarrow, n \rangle + |c_2|^2 \sqrt{n-1} \sqrt{n-1} \langle \uparrow, n-1 | \uparrow, n-1 \rangle \\ &= n|c_1|^2 \cdot 1 + c_1^* c_2 (n-1) \cdot 0 + c_2^* c_1 n \cdot 0 + (n-1)|c_2|^2 \cdot 1 \\ &= n|c_1|^2 + n|c_2|^2 - |c_2|^2 = n(|c_1|^2 + |c_2|^2) - |c_2|^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(A)} = n - |c_2(t)|^2} \quad (4.181)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(A)} &= \langle \psi_A(t) | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \psi_A(t) \rangle = \\ &= \{ c_1^* \langle \downarrow, n | + c_2^* \langle \uparrow, n-1 | \} \hat{S}_+ \hat{S}_- \{ c_1 | \downarrow, n \rangle + c_2 | \uparrow, n-1 \rangle \} \\ &= |c_1|^2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \downarrow, n \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \uparrow, n-1 \rangle \\ &+ c_2^* c_1 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \downarrow, n \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \uparrow, n-1 \rangle \\ &= |c_1|^2 \cdot 0 + \cancel{c_1^* c_2 \langle \downarrow, n | \uparrow, n-1 \rangle} + c_2^* c_1 \cdot 0 + \cancel{|c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \uparrow, n-1 \rangle} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(A)} = |c_2(t)|^2} \quad (4.182)$$

Αρα

$$\boxed{\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(A)} + \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(A)} = n} \quad (4.183)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle_{(A)} &= \langle \psi_A(t) | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \psi_A(t) \rangle = \\ &= \{ c_1^* \langle \downarrow, n | + c_2^* \langle \uparrow, n-1 | \} \hat{S}_+ \hat{a}_m \{ c_1 | \downarrow, n \rangle + c_2 | \uparrow, n-1 \rangle \} \\ &= |c_1|^2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \downarrow, n \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \uparrow, n-1 \rangle \\ &+ c_2^* c_1 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \downarrow, n \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \uparrow, n-1 \rangle \\ &= |c_1|^2 \sqrt{n} \langle \downarrow, n | \uparrow, n-1 \rangle + \cancel{c_1^* c_2 \sqrt{n-1} \langle \downarrow, n | \hat{S}_+ | \uparrow, n-2 \rangle} \\ &+ \cancel{c_2^* c_1 \sqrt{n} \langle \uparrow, n-1 | \uparrow, n-1 \rangle} + |c_2|^2 \sqrt{n-1} \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_+ | \uparrow, n-2 \rangle \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle_{(A)} = c_2^*(t) c_1(t) \sqrt{n}} \quad (4.184)$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \rangle_{(A)} &= \langle \psi_A(t) | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \psi_A(t) \rangle = \\
&= \{ c_1^* \langle \downarrow, n | + c_2^* \langle \uparrow, n-1 | \} \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \{ c_1 | \downarrow, n \rangle + c_2 | \uparrow, n-1 \rangle \} \\
&= |c_1|^2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \downarrow, n \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \uparrow, n-1 \rangle \\
&+ c_2^* c_1 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \downarrow, n \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \uparrow, n-1 \rangle \\
&= |c_1|^2 \sqrt{n+1} \langle \downarrow, n | \hat{S}_- | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \sqrt{n} \langle \downarrow, n | \downarrow, n \rangle \\
&+ c_2^* c_1 \langle \uparrow, n-1 | \hat{S}_- | \downarrow, n+1 \rangle \sqrt{n+1} + |c_2|^2 \langle \uparrow, n-1 | \downarrow, n \rangle \sqrt{n} \Rightarrow \\
&\quad \boxed{\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \rangle_{(A)} = c_1^*(t) c_2(t) \sqrt{n}} \tag{4.185}
\end{aligned}$$

Περίπτωση (E)

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(E)} &= \langle \psi_E(t) | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \psi_E(t) \rangle = \\
&= \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \} \\
&= |c_1|^2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle \\
&+ c_2^* c_1 \langle \uparrow, n | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle \\
&= |c_1|^2 \sqrt{n+1} \sqrt{n+1} \langle \downarrow, n+1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 n \langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n \rangle \\
&+ c_2^* c_1 (n+1) \langle \uparrow, n | \downarrow, n+1 \rangle + |c_2|^2 n \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle \\
&= |c_1|^2 (n+1) + n |c_2|^2 = n (|c_1|^2 + |c_2|^2) + |c_1|^2 \Rightarrow \\
&\quad \boxed{\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(E)} = n + |c_1(t)|^2} \tag{4.186}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(E)} &= \langle \psi_E(t) | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \psi_E(t) \rangle = \\
&= \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} \hat{S}_+ \hat{S}_- \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \} \\
&= |c_1|^2 \cdot 0 + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n \rangle + c_2^* c_1 \cdot 0 + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(E)} = |c_2(t)|^2} \quad (4.187)$$

Άρα

$$\boxed{\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(E)} + \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(E)} = n + 1} \quad (4.188)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle_{(E)} &= \langle \psi_E(t) | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \psi_E(t) \rangle = \\ &= \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} \hat{S}_+ \hat{a}_m \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \} \\ &= |c_1|^2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle \\ &\quad + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \downarrow, n+1 \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \uparrow, n \rangle \\ &= \cancel{|c_1|^2 \sqrt{n+1} \langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n \rangle} + c_1^* c_2 \cdot 0 + c_2^* c_1 \sqrt{n+1} \langle \uparrow, n | \uparrow, n \rangle + |c_2|^2 \cdot 0 \Rightarrow \\ &\quad \boxed{\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle_{(E)} = c_2^*(t) c_1(t) \sqrt{n+1}} \quad (4.189) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \rangle_{(E)} &= \langle \psi_E(t) | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \psi_E(t) \rangle = \\ &= \{ c_1^* \langle \downarrow, n+1 | + c_2^* \langle \uparrow, n | \} \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \{ c_1 | \downarrow, n+1 \rangle + c_2 | \uparrow, n \rangle \} \\ &= |c_1|^2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \downarrow, n+1 \rangle + c_1^* c_2 \langle \downarrow, n+1 | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \uparrow, n \rangle \\ &\quad + c_2^* c_1 \langle \uparrow, n | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \downarrow, n+1 \rangle + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger | \uparrow, n \rangle \\ &= \cancel{|c_1|^2 \sqrt{n+2} \langle \downarrow, n+1 | \uparrow, n+2 \rangle} + c_1^* c_2 \sqrt{n+1} \langle \downarrow, n+1 | \downarrow, n+1 \rangle \\ &\quad + c_2^* c_1 \cdot 0 + |c_2|^2 \langle \uparrow, n | \downarrow, n+1 \rangle \sqrt{n+1} \Rightarrow \\ &\quad \boxed{\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger \rangle_{(E)} = c_1^*(t) c_2(t) \sqrt{n+1}} \quad (4.190) \end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που αποδείξαμε παραπάνω στα επόμενα Υποκεφάλαια 4.11-4.12.

4.11 Απορρόφηση φωτονίου.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα απορροφήσεως ενός φωτονίου που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$|\Psi_A(t)\rangle = c_1(t) |\downarrow, n_m\rangle + c_2(t) |\uparrow, n_m - 1\rangle, \quad (4.191)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_A(t)\rangle = \hat{H} |\Psi_A(t)\rangle, \quad (4.192)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_{JC}^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger), \quad (4.193)$$

και τις αρχικές συνθήκες

$$c_1(0) = 1, \quad c_2(0) = 0. \quad (4.194)$$

Το αριστερό μέρος της χρονοεξαρτημένης εξίσωσης Schrodinger, A' , γίνεται

$$A' = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_A(t)\rangle = i\hbar \dot{c}_1 |\downarrow, n_m\rangle + i\hbar \dot{c}_2 |\uparrow, n_m - 1\rangle \quad (4.195)$$

ενώ το δεξιό Δ'

$$\begin{aligned} \Delta' &= \hat{H} |\Psi_A(t)\rangle = \\ &(\hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hbar g^m \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger)(c_1 |\downarrow, n_m\rangle + c_2 |\uparrow, n_m - 1\rangle) = \\ &c_1 \hbar\omega_m n_m |\downarrow, n_m\rangle + c_1 \hbar\Omega \cdot 0 + c_1 \hbar g^m |\uparrow, n_m - 1\rangle \sqrt{n_m} + c_1 \hbar g^m \cdot 0 + \\ &c_2 \hbar\omega_m (n_m - 1) |\uparrow, n_m - 1\rangle + c_2 \hbar\Omega |\uparrow, n_m - 1\rangle + c_2 \hbar g^m \cdot 0 + \hbar g^m |\downarrow, n_m\rangle \sqrt{n_m} c_2 = \\ &c_1 \hbar\omega_m n_m |\downarrow, n_m\rangle + c_1 \hbar g^m |\uparrow, n_m - 1\rangle \sqrt{n_m} + \\ &c_2 \hbar\omega_m (n_m - 1) |\uparrow, n_m - 1\rangle + c_2 \hbar\Omega |\uparrow, n_m - 1\rangle + \hbar g^m |\downarrow, n_m\rangle \sqrt{n_m} c_2 \end{aligned}$$

Επιδρώντας με $\langle \downarrow, n |$ στα A' και Δ'

$$\left. \begin{array}{l} \text{το αριστερό μέρος γίνεται} \\ \text{το δεξιό μέρος γίνεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} i\hbar \dot{c}_1 \\ \hbar\omega_m n_m c_1 + \hbar g^m \sqrt{n_m} c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow i\dot{c}_1 = n_m \omega_m c_1 + g^m \sqrt{n_m} c_2 \quad (4.196)$$

Επιδρώντας με $\langle \uparrow, n - 1 |$ στα A' και Δ'

$$\left. \begin{array}{l} \text{το αριστερό μέρος γίνεται} \\ \text{το δεξιό μέρος γίνεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} i\hbar \dot{c}_2 \\ \hbar g^m \sqrt{n_m} c_1 + \hbar\omega_m (n_m - 1) c_2 + \hbar\Omega c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$i\dot{c}_2 = g^m \sqrt{n_m} c_1 + [\Omega + (n_m - 1)\omega_m] c_2 \quad (4.197)$$

Δηλαδή καταλήγουμε στο Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων

$$i \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_m \omega_m & g^m \sqrt{n_m} \\ g^m \sqrt{n_m} & \Omega + (n_m - 1)\omega_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (4.198)$$

Ορίζουμε τώρα τη γενικευμένη συχνότητα Rabi

$$\Omega_{n_m} := \left[\left(\frac{\omega_m - \Omega}{2} \right)^2 + g_m^2 n_m \right]^{1/2}. \quad (4.199)$$

ή παραλείποντας για απλότητα το δείκτη m που δηλώνει τον HM τρόπο

$$\Omega_n := \left[\left(\frac{\omega - \Omega}{2} \right)^2 + g^2 n \right]^{1/2}. \quad (4.200)$$

Επιλύοντας το Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων (4.198) π.χ. με τη μέθοδο των Ιδιοτιμών (δείτε Παράρτημα Β'), προκύπτει

$$c_1(t) = \exp \left[-i \left(n\omega + \frac{\Omega - \omega}{2} \right) t \right] \left\{ \cos(\Omega_n t) + i \frac{\Omega - \omega}{2\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right\} \quad (4.201)$$

και

$$c_2(t) = \exp \left[-i \left(n\omega + \frac{\Omega - \omega}{2} \right) t \right] \left\{ -i \frac{g\sqrt{n}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right\} \Rightarrow$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{ng^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t). \quad (4.202)$$

Οπότε,

$$|c_1(t)|^2 = 1 - |c_2(t)|^2 = \dots \quad (4.203)$$

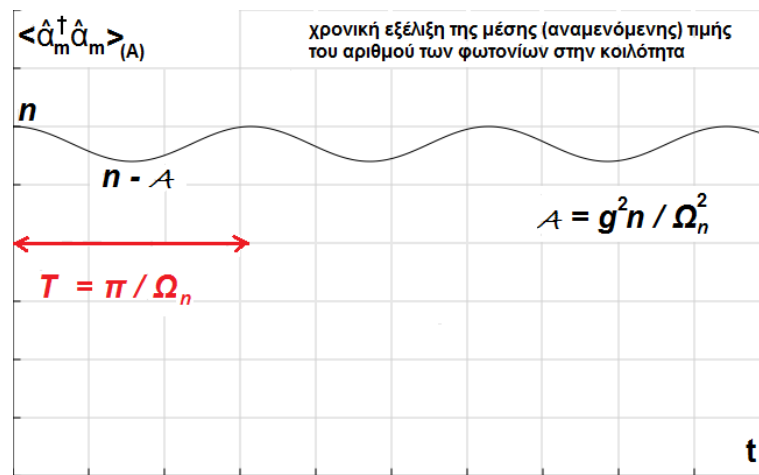
Άρα

$$\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(A)} = n - \frac{ng^2 \sin^2(\Omega_n t)}{\Omega_n^2}, \quad (4.204)$$

δηλαδή η μέση (αναμενόμενη) τιμή του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα συναρτήσει του χρόνου θα πραγματοποιεί ταλαντώσεις, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 4.7. Ο δείκτης (A) σημαίνει απορρόφηση (absorption). Επίσης,

$$\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(A)} = \frac{ng^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t), \quad (4.205)$$

δηλαδή η μέση (αναμενόμενη) τιμή του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη E_2 συναρτήσει του χρόνου θα πραγματοποιεί ταλαντώσεις, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 4.8 και καλούνται συχνά ταλαντώσεις Rabi. Το πλάτος των ταλαντώσεων,



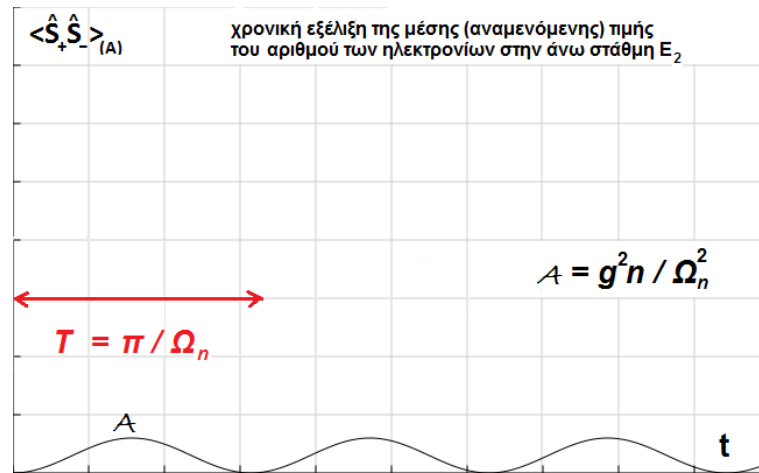
Σχήμα 4.7: Απορρόφηση φωτονίου. Η χρονική εξέλιξη της μέσης (αναμενόμενης) τιμής του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα, $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(A)} = n - \frac{ng^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t)$.

\mathcal{A} , όπως φαίνεται από τις Εξ. (4.204), (4.205), (4.199) είναι

$$\mathcal{A} = \frac{g^2 n}{\Omega_n^2} = \frac{g^2 n}{\left(\frac{\omega - \Omega}{2}\right)^2 + g^2 n} \quad (4.206)$$

Επομένως

- Για $\Omega = \omega$ (συντονισμός) $\implies \mathcal{A} = 1$
- Για $\Omega \neq \omega$ (μη συντονισμός) $\implies \mathcal{A} < 1$



Σχήμα 4.8: Απορρόφηση φωτονίου. Η χρονική εξέλιξη της μέσης (αναμενόμενης) τιμής του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη E_2 , $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(A)} = \frac{ng^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t)$

Επειδή $\sin^2(\Omega_n t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\Omega_n t)$, η περίοδος των ταλαντώσεων είναι

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{2\Omega_n} = \frac{\pi}{\Omega_n} = \frac{\pi}{\left[\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2 n\right]^{1/2}} \quad (4.207)$$

Στο συντονισμό ($\omega = \Omega$) μεγιστοποιείται η περίοδος σε $\mathcal{T} = \frac{\pi}{g\sqrt{n}}$.

Συμπερασματικά η συχνότητα Rabi g και ο αποσυντονισμός (detuning) που ορίσαμε στην Εξ. 3.58 ως $\Delta := \omega - \Omega$ καθορίζουν το πλάτος και την περίοδο των ταλαντώσεων.

4.12 Εκπομπή φωτονίου.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα εκπομπής ενός φωτονίου που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$|\Psi_E(t)\rangle = c_1(t) |\downarrow, n_m + 1\rangle + c_2 |\uparrow, n_m\rangle \quad (4.208)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_E(t)\rangle = \hat{H} |\Psi_E(t)\rangle \quad (4.209)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_{JC}^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger), \quad (4.210)$$

και τις αρχικές συνθήκες

$$c_1(0) = 0, \quad c_2(0) = 1 \quad (4.211)$$

Το αριστερό μέρος της χρονοεξαρτημένης εξίσωσης Schrodinger, A' , γίνεται

$$A' = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_E(t)\rangle = i\hbar \dot{c}_1 |\downarrow, n_m + 1\rangle + i\hbar \dot{c}_2 |\uparrow, n_m\rangle \quad (4.212)$$

ενώ το δεξιό Δ'

$$\begin{aligned} \Delta' = \hat{H} |\Psi_E(t)\rangle = & (\hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hbar g^m \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger) (c_1 |\downarrow, n_m + 1\rangle + c_2 |\uparrow, n_m\rangle) = \\ & \hbar\omega_m c_1 (n_m + 1) |\downarrow, n_m + 1\rangle + \hbar\Omega c_1 \cdot 0 + \hbar g^m c_1 |\uparrow, n_m\rangle \sqrt{n_m + 1} + \hbar g^m c_1 \cdot 0 + \\ & \hbar\omega_m c_2 n_m |\uparrow, n_m\rangle + \hbar\Omega c_2 |\uparrow, n_m\rangle + \hbar g^m c_2 \cdot 0 + \hbar g^m c_2 |\downarrow, n_m + 1\rangle \sqrt{n_m + 1} = \\ & \hbar\omega_m c_1 (n_m + 1) |\downarrow, n_m + 1\rangle + \hbar g^m c_1 \sqrt{n_m + 1} |\uparrow, n_m\rangle + \\ & \hbar\omega_m c_2 n_m |\uparrow, n_m\rangle + \hbar\Omega c_2 |\uparrow, n_m\rangle + \hbar g^m c_2 \sqrt{n_m + 1} |\downarrow, n_m + 1\rangle \end{aligned} \quad (4.213)$$

Επιδρώντας με $\langle \downarrow, n + 1 |$ στα A' και Δ'

$$\left. \begin{array}{l} \text{το αριστερό μέρος γίνεται} \\ \text{το δεξιό μέρος γίνεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hbar\omega_m c_1 (n_m + 1) + \hbar g^m c_2 \sqrt{n_m + 1} \quad (4.214)$$

$$i\dot{c}_1 = \omega_m (n_m + 1) c_1 + g^m \sqrt{n_m + 1} c_2$$

Επιδρώντας με $\langle \uparrow, n |$ στα A' και Δ'

$$\left. \begin{array}{l} \text{το αριστερό μέρος γίνεται} \\ \text{το δεξιό μέρος γίνεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hbar g^m c_1 \sqrt{n_m + 1} + \hbar\omega_m c_2 n_m + \hbar\Omega c_2$$

$$i\dot{c}_2 = g^m \sqrt{n_m + 1} c_1 + (n_m \omega_m + \Omega) c_2 \quad (4.215)$$

Δηλαδή καταλήγουμε στο Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων

$$i \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n_m + 1)\omega_m & g^m \sqrt{n_m + 1} \\ g^m \sqrt{n_m + 1} & \Omega + n_m \omega_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (4.216)$$

Ορίζουμε τώρα τη γενικευμένη συχνότητα Rabi

$$\Omega_{n_m+1} := \left[\left(\frac{\omega_m - \Omega}{2} \right)^2 + g_m^2 (n_m + 1) \right]^{1/2}. \quad (4.217)$$

ή παραλείποντας για απλότητα το δείκτη m που δηλώνει τον ΗΜ τρόπο

$$\Omega_{n+1} := \left[\left(\frac{\omega - \Omega}{2} \right)^2 + g^2 (n + 1) \right]^{1/2}. \quad (4.218)$$

Επιλύοντας το Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων (4.216) π.χ. με τη μέθοδο των Ιδιοτιμών (δείτε Παράρτημα Β'), προκύπτει

$$c_1(t) = \exp \left[-i \left((n + 1)\omega + \frac{\Omega - \omega}{2} \right) t \right] \left[-i \frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_{n+1}} \sin(\Omega_{n+1}t) \right] \quad (4.219)$$

και

$$c_2(t) = \exp \left[-i \left((n + 1)\omega + \frac{\Omega - \omega}{2} \right) t \right] \left[\cos(\Omega_{n+1}t) - i \frac{\Omega - \omega}{2\Omega_{n+1}} \sin(\Omega_{n+1}t) \right] \Rightarrow$$

$$|c_1(t)|^2 = \frac{(n+1)g^2}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t) \quad (4.220)$$

και

$$|c_2(t)|^2 = 1 - |c_1(t)|^2 = \dots \quad (4.221)$$

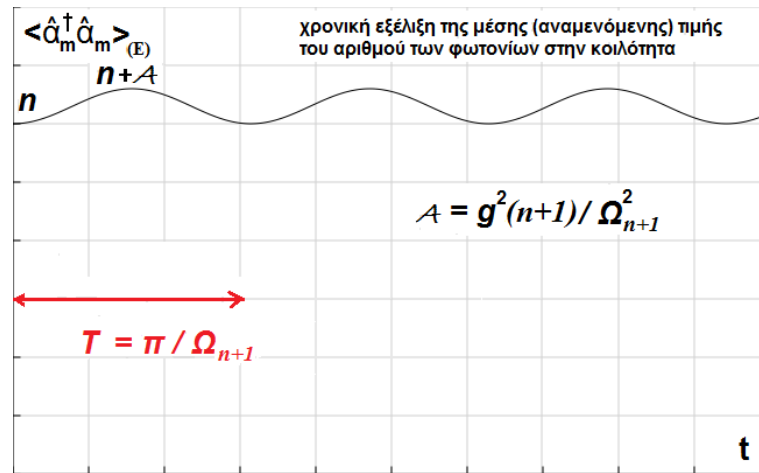
Άρα

$$\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(E)} = n + \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t) \quad (4.222)$$

δηλαδή η μέση (αναμενόμενη) τιμή του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα συναρτήσει του χρόνου θα πραγματοποιεί ταλαντώσεις, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 4.9. Ο δείκτης (E) σημαίνει εκπομπή (emission). Επίσης,

$$\left\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \right\rangle_{(E)} = 1 - \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t) \quad (4.223)$$

δηλαδή η μέση (αναμενόμενη) τιμή του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη E_2 συναρτήσει του χρόνου θα πραγματοποιεί ταλαντώσεις, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 4.10.



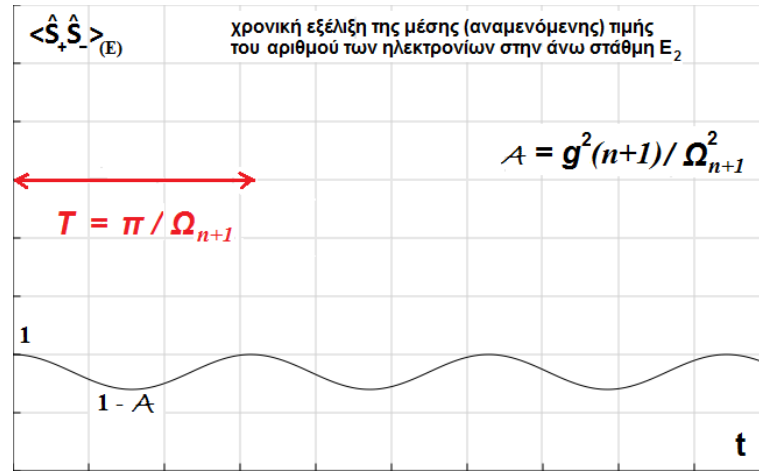
Σχήμα 4.9: Εκπομπή φωτονίου. Η χρονική εξέλιξη της μέσης (αναμενόμενης) τιμής του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα, $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle_{(E)} = n + \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t)$.

Όπως στην περίπτωση της απορρόφησης φωτονίου, έτσι και στην περίπτωση εκπομπής φωτονίου το πλάτος των ταλαντώσεων, \mathcal{A} , όπως φαίνεται από τις Εξ. (4.222), (4.223), (4.217) είναι

$$\mathcal{A} = \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} = \frac{g^2(n+1)}{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2(n+1)} \quad (4.224)$$

Επομένως

- Για $\Omega = \omega$ (συντονισμός) $\implies \mathcal{A} = 1$
- Για $\Omega \neq \omega$ (μη συντονισμός) $\implies \mathcal{A} < 1$



Σχήμα 4.10: Εκπομπή φωτονίου. Η χρονική εξέλιξη της μέσης (αναμενόμενης) τιμής του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη E_2 , $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle_{(E)} = 1 - \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1}t)$

Επειδή $\sin^2(\Omega_{n+1}t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\Omega_{n+1}t)$, η περίοδος των ταλαντώσεων είναι

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{2\Omega_{n+1}} = \frac{\pi}{\Omega_{n+1}} = \frac{\pi}{\left[\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2(n+1)\right]^{1/2}} \quad (4.225)$$

Στο συντονισμό ($\omega = \Omega$) μεγιστοποιείται η περίοδος σε $\mathcal{T} = \frac{\pi}{g\sqrt{n+1}}$.

Συμπερασματικά η συχνότητα Rabi g και ο αποσυντονισμός (detuning) που ορίσαμε στην Εξ. 3.58 ως $\Delta := \omega - \Omega$ καθορίζουν το πλάτος και την περίοδο των ταλαντώσεων.