

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ.

1.1 Εγκυκλοπαιδικά: Στοιχειώδη σωματίδια, καθιερωμένο πρότυπο.

Τα άτομα είναι οι δομικοί λίθοι των χημικών στοιχείων αλλά όπως όλοι-ες γνωρίζουμε, αποτελούνται από μικρότερα σωματίδια ή αλλιώς σωματίδια. Το πρώτο υποατομικό σωματίδιο που ανακαλύφθηκε ήταν το **ηλεκτρόνιο** (electron), το 1897 από τον J. J. Thomson. Το 1919 ο E. Rutherford ανακάλυψε το **πρωτόνιο** (proton) ως αποτέλεσμα της διάσπασης των ατομικών πυρήνων. Το τρίτο βασικό σωματίδιο που απαντάται στα άτομα, το **νετρόνιο** (neutron), ανακαλύφθηκε το 1932 από τον J. Chadwick. Να σημειωθεί ότι αν και από τότε το πρωτόνιο και το νετρόνιο θεωρούνται “στοιχειώδη” σωματίδια σήμερα είναι γνωστό ότι είναι οντότητες με δομή. Το ίδιο ισχύει και για κάποια άλλα “στοιχειώδη” σωματίδια που αναφέρονται παρακάτω. Πάντως με τα τρία παραπάνω σωματίδια μπορεί να εξηγηθεί η χημική συμπεριφορά της ύλης. Η θεωρητική φυσική προέβλεψε όμως την ύπαρξη επιπλέον στοιχειωδών σωματίων.

Σε πολλά σωματίδια αντιστοιχεί ένα **αντισωματίδιο** (antiparticle) με την ίδια μάζα και αντίθετο ηλεκτρικό φορτίο, π.χ. το αντισωματίδιο ηλεκτρονίου είναι το **αντιηλεκτρόνιο** ή **ποζιτρόνιο** (antielectron or positron). Τα αντισωματίδια συζεύγγονται παρομοίως με τα αντίστοιχα σωματίδια π.χ. το αντιηλεκτρόνιο με το αντιπρωτόνιο φτιάχνουν το άτομο αντιυδρογόνου. Η μίξη ύλης - αντιύλης οδηγεί σε εξάλωση (annihilation \neq υλοποίηση) τους δημιουργώντας φωτόνια ή άλλα ζεύγη σωματίων αντισωματίων. Το τελικό αποτέλεσμα της συναντήσεως ύλης - αντιύλης είναι η απελευθέρωση ενέργειας κατά την εξίσωση $E = mc^2$. Τα σχετικά με την αναλογία ύλης - αντιύλης στο σύμπαν, τις πιθανές αιτίες και συνέπειες είναι έξω από τους σκοπούς του μαθήματος.

Η έρευνα για το ποζιτρόνιο οδήγησε στον εντοπισμό του το 1932 από τον C. D. Anderson. Η έρευνα για το **πιόνιο** (pion) ή **π-μεσόνιο** (π-meson) που προβλέφθηκε από τον H. Yukawa το 1935, οδήγησε στην απρόσμενη ανακάλυψη του **μιονίου** (muon) τον επόμενο χρόνο. Το πιόνιο ανακαλύφθηκε τελικά το 1947. Το μιονίο και το πιόνιο παρατηρήθηκαν αρχικά στις κοσμικές ακτίνες. Το αντισωματίο του πρωτονίου, **αντιπρωτόνιο** (antiproton) ανακαλύφθηκε το 1955. Το αντισωματίο του νετρονίου, **αντινετρόνιο** (antineutron), ανακαλύφθηκε το 1956. Ο κατάλογος των σωματίων και αντισωματίων μεγάλωσε με την παραπέρα μελέτη των κοσμικών ακτίνων και των αποτελεσμάτων των πειραμάτων σκέδασης που πραγματοποιούνται στους επιταχυντές σωματίων.

Ο **κυματοσωματιδιακός δυϊσμός** (wave-particle duality) είναι επίσης χρησιμη έννοια της σύγχρονης φυσικής. Σημαίνει ότι όλα τα σωματίδια παρουσιάζουν σωματιδιακό αλλά και κυματικό χαρακτήρα και είναι αδύνατον να εξηγηθεί η συμπεριφορά των αντικειμένων σε κβαντική κλίμακα μόνο με τις κλασικές έννοιες σωματίδιο ή κύμα. Με e συμβολίζουμε το στοιχειώδες φορτίο, δηλαδή $e = 1.602176565(35) \times 10^{-19} \text{ C}$ [1].

Πολλά από τα παραπάνω “στοιχειώδη” σωματίδια είναι στην πραγματικότητα σύνθετα, δηλαδή αποτελούνται από απλούστερα. Σήμερα, σύμφωνα με το **καθιερωμένο πρότυπο** (standard model) διαχωρίζουμε δύο κατηγορίες στοιχειωδών σωματίων, τους **δομικούς λίθους της ύλης** που είναι **φερμιόνια** (fermions) και τους **φορείς αλληλεπιδράσεων** (ή αλλιώς δυνάμεων) που είναι **μποζόνια** (bosons). Αυτά συνοψίζονται στο επόμενο Σχήμα 1.1.

Οι δομικοί λίθοι της ύλης χωρίζονται σε **κουάρκς** (quarks) και **λεπτόνια** (leptons), είναι **φερμιόνια** δηλαδή έχουν σπιν s ημισακέραιο πολλαπλάσιο ($1/2, 3/2, 5/2, \dots$) του \hbar , υπακούουν στη **στατιστική Fermi-Dirac** και για αυτά ισχύει η **απαγορευτική αρχή του Pauli** η οποία απλοϊκά σημαίνει ότι δύο πανομοιότυπα φερμιόνια (identical fermions) δεν μπορούν να καταλαμβάνουν ταυτοχρόνως την ίδια κβαντική κατάσταση ή αλλιώς αν ένα σύνολο πανομοιοτύπων φερμιονίων περιγράφεται με όρους κυματοσυναρτήσεων, τότε δύο οποιαδήποτε από αυτά δεν μπορούν να έχουν την ίδια (εννοείται ολική: χωρική και σπιν) κυματοσυνάρτηση. Για παράδειγμα, τα ηλεκτρόνια είναι φερμιόνια με σπιν $s = (1/2) \hbar$, οπότε μπορούν να έχουν z συνιστώσες $m_s = (+1/2)\hbar$ ή $(-1/2) \hbar$. Σε ένα άτομο η κβαντική κατάσταση καθορίζεται από 4 κβαντικούς αριθμούς που είναι οι n, l, m_l, m_s όπως θα δούμε αργότερα. Έτσι σε ένα άτομο δύο ηλεκτρόνια δεν μπορούν να έχουν ίδιους και τους 4 κβαντικούς αριθμούς. Αν τα n, l , και m_l ίδια, θα πρέπει ο m_s να διαφέρει, οπότε τα δύο ηλεκτρόνια πρέπει να έχουν αντίθετα m_s . Η απαγορευτική αρχή Pauli εξηγεί τη φλοιώδη δομή των ατόμων.

Πίνακας. Στοιχειώδη σωματίδια κατά το καθιερωμένο πρότυπο.						
φερμιόνια (fermions)	κουάρκς (quarks)	up (u) (άνω)	charm (c) (χαριτωμένο)	top (t) (κορυφαίο)	βαρυτόνιο (graviton), G βαρυτική (gravity)	μποζόνια (bosons)
		down (d) (κάτω)	strange (s) (παράξενο)	bottom (b) (πυθμενικό)	γκλουόνιο (gluon), g ισχυρή (strong)	αλληλεπίδραση (interaction)
δομικοί λίθοι της ύλης	λεπτόνια (leptons)	electron (e) (ηλεκτρόνιο)	muon (μ) (μιονίο)	tau (τ) (ταυ)	W ⁺ , W ⁻ , Z ⁰ , ασθενής (weak)	gauge bosons φορείς δυνάμεων (force carriers)
		electron neutrino ν _e (νετρίνιο ηλεκτρονίου)	muon neutrino ν _μ (νετρίνιο μιονίου)	tau neutrino ν _τ (νετρίνιο ταυ)	φωτόνιο (photon), γ ηλεκτρομαγνητική (electromagnetic)	
					μποζόνιο Higgs	

Σχήμα 1.1: Στοιχειώδη σωματίδια κατά το καθιερωμένο πρότυπο.

Οι φορείς των αλληλεπιδράσεων ή δυνάμεων (βαρυτική, ασθενής, ηλεκτρομαγνητική, ισχυρή) είναι μποζόνια έχουν δηλαδή σπιν s φυσικό πολλαπλάσιο (0, 1, 2, ...) του \hbar , υπακούουν στη **στατιστική Bose-Einstein**, οπότε ΔΕΝ ισχύει για αυτά κάποια απαγορευτική αρχή όπως αναφέρθηκε παραπάνω για τα φερμιόνια. Έτσι δύο ή περισσότερα μποζόνια μπορούν να έχουν την ίδια κβαντική κατάσταση ή αλλιώς οσαδήποτε μποζόνια μπορούν να περιγράφονται με την ίδια κυματοσυνάρτηση πράγμα που λέγεται **συμπύκνωση (condensation) μποζονίων**. Έτσι, στην περίπτωση των μποζονίων, μπορούν να κατασκευαστούν σύμφωνα κύματα με μακροσκοπικό πλάτος και τέτοια κύματα μπορούν να περιγραφούν κλασικά. Για παράδειγμα, τα **φωτόνια** είναι μποζόνια και το αντίστοιχο κλασικό πεδίο είναι το γνωστό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell. Έτσι οσαδήποτε φωτόνια μπορούν να καταλαμβάνουν την ίδια κβαντική κατάσταση όπως συμβαίνει εντός των laser.

Οι δομικοί λίθοι της ύλης είναι λοιπόν τα λεπτόνια και τα κουάρκς και αλληλεπιδρούν μέσω των φορέων των αλληλεπιδράσεων. Αναλυτικότερα:
(α') Τα λεπτόνια και τα κουάρκς που έχουν **μάζα** αλληλεπιδρούν με **βαρυτική** αλληλεπίδραση της οποίας φορείς είναι τα **βαρυτόνια**, τα οποία, να σημειωθεί, έχουν

προβλεφθεί θεωρητικώς, αλλά δεν έχουν ανακαλυφθεί πειραματικώς, ακόμα.

(β') Μόνο τα κουάρκς έχουν **χρωματικό φορτίο** ή “**χρώμα**” (color charge) και δένονται με την **ισχυρή** αλληλεπίδραση της οποίας φορείς είναι τα **γκλουόνια** και έτσι απαντώνται σε **δυάδες** ή **τριάδες** μαζί με άλλα κουάρκς ή αντικουάρκς.

(γ') Τα λεπτόνια και τα κουάρκς που έχουν διαφορετικό **γευστικό φορτίο** ή “**γεύση**” (flavor charge) αλληλεπιδρούν ακόμα με **ασθενή** αλληλεπίδραση της οποίας φορείς είναι τα σωματίδια W^+, W^-, Z^0 .

(δ') Όσα από τα λεπτόνια και τα κουάρκς έχουν **ηλεκτρικό φορτίο** (electric charge) αλληλεπιδρούν με **ηλεκτρομαγνητική** αλληλεπίδραση της οποίας φορείς είναι τα **φωτόνια**.

Να σημειωθεί ότι η “γεύση” και το “χρώμα” που αναφέρονται παραπάνω δεν είναι, εννοείται, αυτό που εννοούμε στην καθημερινή γλώσσα γεύση και χρώμα.

Η **κλάση των λεπτονίων** περιλαμβάνει 12 σωματίδια: ηλεκτρόνιο (electron), μόνιο (muon), ταφ (tau), νεutrίνο ηλεκτρονίου (electron neutrino), νεutrίνο μιονίου (muon neutrino), νεutrίνο ταφ (tau neutrino), καθώς και τα αντισωματίά τους. Όλα έχουν spin $s = \hbar/2$. Μερικές ιδιότητές τους [2–7] συνοψίζονται στον συνοψίζονται στον Πίνακα 1.1.

Η **κλάση των κουάρκς** είναι επίσης δωδεκαμελής: up, down, charm, strange, top, bottom (“άνω, κάτω, χαριτωμένο, παράξενο, κορυφαίο, πυθμεναίο”), καθώς και τα αντισωματίά τους. Μερικές ιδιότητές τους [2–5] συνοψίζονται στον Πίνακα 1.2.

Η μικρότερη κλάση στοιχειωδών σωματιδίων είναι **οι φορείς των αλληλεπιδράσεων ή δυνάμεων**. Οι ιδιότητές τους συνοψίζονται στον παρακάτω Πίνακα 1.3 [2–5]. Το φωτόνιο (photon), γ , είναι ο φορέας της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπιδράσεως. Το γκλουόνιο (gluon), g , είναι ο φορέας της ισχυρής αλληλεπιδράσεως. Τα σωματίδια W^+, W^-, Z^0 είναι οι φορείς της ασθενούς αλληλεπιδράσεως. Το βαρυτόνιο (graviton), G , ο φορέας της βαρυτικής αλληλεπιδράσεως έχει προβλεφθεί θεωρητικά αλλά δεν έχει εντοπιστεί ακόμη. Στον Πίνακα 1.3 εμφανίζεται ξεχωριστά το μποζόνιο Higgs. Προβλέφθηκε το 1964 και επιβεβαιώθηκε πειραματικά το 2012. Η ύπαρξη του μποζονίου Higgs εξηγεί γιατί τα άλλα στοιχειώδη σωματίδια εκτός από το φωτόνιο και το γκλουόνιο έχουν μάζα και γιατί η ασθενής δύναμη είναι πολύ μικρότερης εμβέλειας από την ηλεκτρομαγνητική δύναμη. Μάζα δεν έχει και το μη εντοπισμένο ακόμα βαρυτόνιο.

Εκτός από τα στοιχειώδη φερμιόνια (λεπτόνια και κουάρκς) και τα στοιχειώδη μποζόνια (φορείς αλληλεπιδράσεων και μποζόνιο Higgs) υπάρχουν και συνθετότερα φερμιόνια και μποζόνια. Επί παραδείγματι, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα κουάρκς δένονται με ισχυρή αλληλεπίδραση της οποίας φορείς είναι τα γκλουόνια και έτσι απαντώνται σε δυάδες ή τριάδες μαζί με άλλα κουάρκς ή αντικουάρκς σχηματίζοντας

Πίνακας 1.1: Ιδιότητες των λεπτονίων.

Όνομα, Σύμβολο	Μάζα (MeV/c ²)	Ηλεκτρικό φορτίο (e)	Σπιν (\hbar)	Μέσος χρόνος ζωής
ηλεκτρόνιο, e	0.511	-1	1/2	$> 2.7 \times 10^{23}$ έτη
νεutrίνο ηλεκτρονίου, ν_e	$< 2.2 \times 10^{-6}$	0	1/2	> 1530 s
μιόνιο, μ	105.658	-1	1/2	2.197×10^{-6} s
νεutrίνο μιονίου, ν_μ	< 0.17	0	1/2	$> 4.158 \times 10^6$ s
ταυ, τ	1777.1	-1	1/2	$2.95 \pm 0.03 \times 10^{-13}$ s
νεutrίνο ταυ, ν_τ	< 15.5	0	1/2	0.1 - 100 s

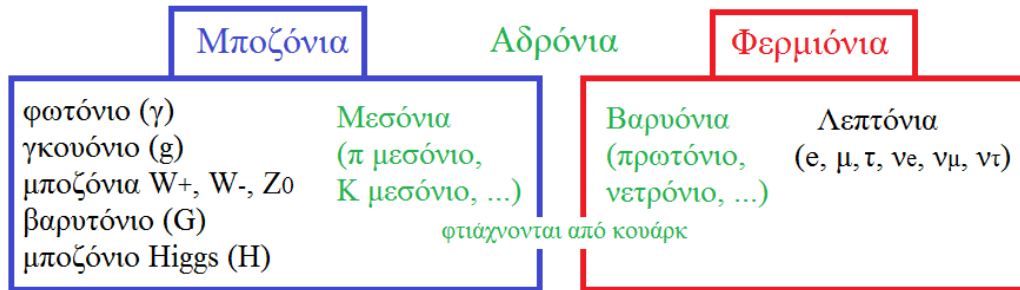
τα συνθετότερα σωματίδια που ονομάζονται **αδρόνια** (hadrons) από το αδρός \neq λεπτός. Περισσότερα από 200 αδρόνια έχουν προσδιοριστεί. Τα αδρόνια διακρίνονται σε μεσόνια (mesons) και βαρυόνια (baryons). Τα μεσόνια αποτελούνται από δυάδες κουάρκ - αντικουάρκ με αποτέλεσμα να είναι σύνθετα μποζόνια και είναι γενικώς βραχύβια. Ένα από αυτά είναι το π μεσόνιο ή πιόνιο που αναφέρθηκε παραπάνω ή το K μεσόνιο ή καόνιο (kaon). Τα βαρυόνια είναι τριάδες από κουάρκς με αποτέλεσμα να είναι σύνθετα φερμιόνια. Τα ελαφρύτερα από αυτά είναι το πρωτόνιο (uud) με φορτίο $(+2/3 + 2/3 - 1/3)e = e$, και το νετρόνιο (ddu) με φορτίο $= 0$. Τα βαρυόνια μεγαλύτερης μάζας καλούνται υπερόνια (hyperons). Αυτά συνοψίζονται στο Σχήμα 1.2.

Πίνακας 1.2: Ιδιότητες των κουάρκς.

Όνομα, Σύμβολο	\approx Μάζα (GeV/c ²)	Ηλεκτρικό φορτίο (e)	Σπιν (\hbar)
down, d	0.0045 - 0.0055	-1/3	1/2
up, u	0.0017 - 0.0031	2/3	1/2
strange, s	0.090 - 0.100	-1/3	1/2
charm, c	1.25 - 1.30	2/3	1/2
bottom, b	4.10 - 4.70	-1/3	1/2
top, t	171.2 - 174.9	2/3	1/2

Πίνακας 1.3: Ιδιότητες των μποζονίων: φορείς αλληλεπιδράσεων και μποζόνιο Higgs.

Όνομα, Σύμβολο	\approx Μάζα (GeV/c ²)	Ηλεκτρικό φορτίο (e)	Σπιν (\hbar)
φωτόνιο γ	$< 1 \times 10^{-27}$	$< 1 \times 10^{-35}$	1
γκλουόνιο g	0	0	1
W ⁺ , W ⁻ , Z ⁰	$\approx 80.4, 80.4, 91.2$	+1, -1, 0	1
βαρυτόνιο G	0	0	2
μποζόνιο Higgs H ⁰	$\approx 125-126$	0	0



Σχήμα 1.2: Από αριστερά προς δεξιά: στοιχειώδη μποζόνια (φορείς αλληλεπιδράσεων και μποζόνιο Higgs), σύνθετα μποζόνια (μεσόνια), σύνθετα φερμιόνια (βαρυόνια), στοιχειώδη φερμιόνια (λεπτόνια και κουάρκ). Τα μεσόνια είναι δυάδες κουάρκ - αντικουάρκ με αποτέλεσμα να είναι μποζόνια π.χ. π μεσόνιο ή ρ πόνιο, K μεσόνιο ή καόνιο. Τα βαρυόνια είναι τριάδες από κουάρκ με αποτέλεσμα να είναι φερμιόνια π.χ. πρωτόνιο, νετρόνιο.

1.2 Εγκυκλοπαιδικά: συμπύκνωμα Bose-Einstein.

Το **συμπύκνωμα Bose-Einstein** (Bose - Einstein condensate, BEC) είναι μια κατάσταση της ύλης ενός αραιού αερίου μποζονίων ψυχραϊνόμενο σε θερμοκρασίες κοντά στο απόλυτο μηδέν (0 K ή -273.15 °C). Υπ' αυτές τις συνθήκες, πολλά από τα μποζόνια καταλαμβάνουν την ίδια κβαντική κατάσταση. Τότε, τα κβαντικά φαινόμενα αντικατοπτρίζονται σε μακροσκοπική κλίμακα. Αυτή η κατάσταση της ύλης προβλέφθηκε από τους **Satyendra Nath Bose** [8] και **Albert Einstein** [9, 10]. Ο Bose, μη μπορώντας να δημοσιεύσει ένα άρθρο του σχετικά με την στατιστική των κβάντων του φωτός (που τώρα λέμε **φωτόνια**), το έστειλε στον Einstein ο οποίος κατάλαβε την αξία του και τον βοήθησε να το δημοσιεύσει υποβάλλοντάς το για λογαριασμό του Bose [8]. Στη συνέχεια έγραψε κι αυτός πάνω στο ίδιο θέμα [9, 10] επεκτείνοντας τις ιδέες του Bose για άλλα συνθετότερα μαζικά (δηλαδή με μη αμελητέα μάζα) σωματίδια με spin s φυσικό πολλαπλάσιο (0, 1, 2, ...) του \hbar . Άλλωστε, κατά τον **κυματοσωματιδιακό дуϊσμό** (wave-particle duality) τα μαζικά σωματίδια έχουν και κυματικό χαρακτήρα. Σύμφωνα με τον Louis de Broglie [11], σε κάθε μαζικό σωματίδιο αντιστοιχεί μήκος κύματος

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1.1)$$

όπου h είναι η σταθερά του Planck και p η ορμή του σωματιδίου. Λαμβάνοντας υπό όψιν και την ειδική σχετικότητα του A. Einstein

$$\lambda = \frac{h}{m_0 u \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (1.2)$$

όπου m_0 είναι η μάζα ηρεμίας και u η ταχύτητα του σωματιδίου, ενώ c είναι η ταχύτητα του φωτός. Η θεωρία του Louis de Broglie επαληθεύτηκε πρώτα με τα πειράματα περιθλάσεως ηλεκτρονίων το 1927 - που έδειξαν δηλαδή κυματικά φαινόμενα με σωματίδια - και γενικεύτηκε αργότερα από τον E. Schrödinger. Ο Louis de Broglie τιμήθηκε το 1929 με το βραβείο Nobel για την ανακάλυψη της κυματικής φύσεως των ηλεκτρονίων. Ενώ από τους φυσικούς που συμμετείχαν στα τα πειράματα περιθλάσεως ηλεκτρονίων σε κρυστάλλους τιμήθηκαν με το βραβείο Nobel του 1937 οι Clinton Joseph Davisson και George Paget Thomson.

Αποτέλεσμα των προσπαθειών των Bose και Einstein είναι η έννοια του **αερίου Bose** (Bose gas) η οποία κυβερνάται από τη λεγόμενη **στατιστική Bose - Einstein** η οποία αφορά τη στατιστική κατανομή πανομοιοτύπων σωματιδίων με spin s φυσικό πολλαπλάσιο (0, 1, 2, ...) του \hbar , που σήμερα ονομάζονται **μποζόνια**.

Για τα μποζόνια ΔEN ισχύει κάποια απαγορευτική αρχή όπως η απαγορευτική αρχή του Pauli για τα φερμιόνια. Δύο ή περισσότερα μποζόνια μπορούν να έχουν την ίδια κβαντική κατάσταση ή αλλιώς να περιγράφονται με την ίδια κυματοσυνάρτηση πράγμα που λέγεται **συμπύκνωση μποζονίων** (condensation of bosons). Ψυχραίνοντας μποζόνια σε πολύ χαμηλή θερμοκρασία αυτά πέτουν στην χαμηλότερη διαθέσιμη ενεργειακά κβαντική κατάσταση δηλαδή “συμπυκνώνονται” πράγμα που οδηγεί σε μια νέα κατάσταση της ύλης. Στην περίπτωση των μποζονίων, μπορούν να κατασκευαστούν “σύμφωνα” ή σωστότερα **συνεκτικά** (coherent) **κύματα** με μακροσκοπικό πλάτος και τέτοια κύματα μπορούν να περιγραφούν κλασικά. Για παράδειγμα, τα φωτόνια είναι μποζόνια και το αντίστοιχο κλασικό πεδίο είναι το γνωστό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell. Έτσι οσαδήποτε φωτόνια μπορούν να καταλαμβάνουν την ίδια κβαντική κατάσταση όπως εντός των **λείζερ** (laser).

Μποζόνια δεν είναι μόνο οι φορείς των αλληλεπιδράσεων και το μποζόνιο Higgs ή τα συνθετότερα μεσόνια αλλά και μεγαλύτερα σωματίδια που έχουν σπιν φυσικό πολλαπλάσιο $(0, 1, 2, \dots)$ του \hbar . **Το ίδιο ισχύει και για ολόκληρα άτομα** όταν έχουν ατομικό σπιν F φυσικό πολλαπλάσιο $(0, 1, 2, \dots)$ του \hbar : είναι και αυτά μποζόνια.

Να σημειωθεί ότι η πρόσθεση στροφορμών είναι ένα ιδιαίτερο κεφάλαιο της κβαντικής μηχανικής και ο τρόπος που γίνεται δεν θα μας απασχολήσει εδώ.

Τι είναι όμως το ατομικό σπιν;

Σε ένα άτομο έχουμε πρωτόνια και νετρόνια τα οποία περιφέρονται κατά μία έννοια μέσα στον πυρήνα σε διαφορετικούς φλοιούς. Κάθε ένα από τα πρωτόνια και νετρόνια έχουν, δηλαδή, εκτός από την ιδιοστροφομή ή σπιν, τροχιακή στροφομή (angular momentum) η οποία είναι επίσης κβαντισμένη. Πρέπει να προσθέσουμε την τροχιακή στροφομή και το σπιν όλων των πρωτονίων και νετρονίων του πυρήνα για να βρούμε την **ολική πυρηνική στροφομή** (total nuclear angular momentum) \vec{I} . Συνήθως, επειδή ο πυρήνας δρα ως μία ενιαία οντότητα ονομάζουμε την ολική πυρηνική στροφομή \vec{I} (ελαφρώς καταχρηστικά ...) πυρηνικό σπιν (nuclear spin) \vec{I} .

Μετά προσθέτουμε την τροχιακή στροφομή και την ιδιοστροφομή όλων των ηλεκτρονίων που περιφέρονται γύρω από τον πυρήνα, οπότε παίρνουμε την **ολική ηλεκτρονιακή στροφομή** (total electron angular momentum), \vec{J} .

Η πρόσθεση των \vec{I} και \vec{J} μας δίνει την **ολική ατομική στροφομή** (total atomic angular momentum) \vec{F} . Συνήθως, επειδή το άτομο δρα ως μια οντότητα ονομάζουμε την ολική ατομική στροφομή (ελαφρώς καταχρηστικά ...) ατομική ιδιοστροφομή ή ατομικό σπιν, \vec{F} , το οποίο μπορεί ακόμα και να ισούται με μηδέν. Γιατί; Επειδή σωματίδια που έχουν το ίδιο μέτρο σπιν αλλά αντίθετες διευθύνσεις (π.χ. δύο

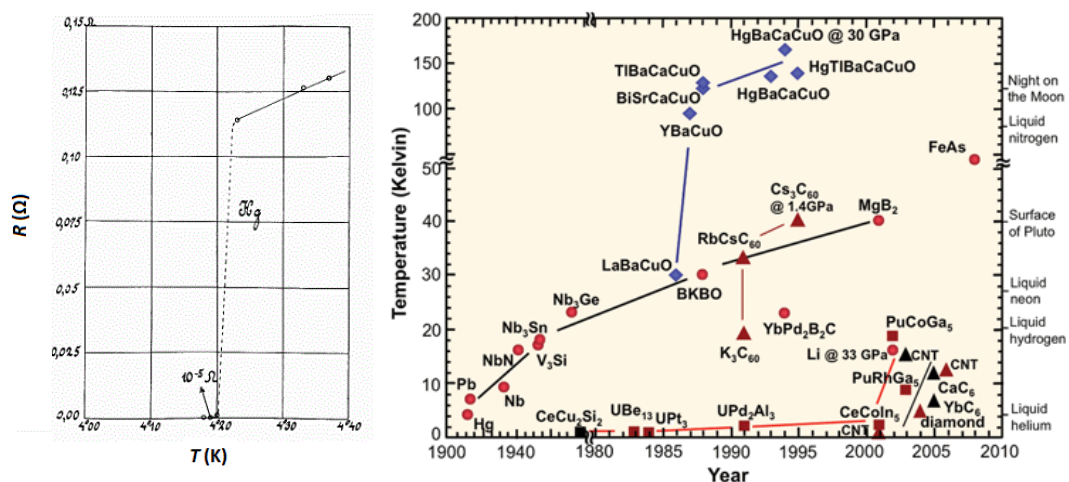
ηλεκτρόνια με σπιν $+\frac{\hbar}{2}$ και $-\frac{\hbar}{2}$) αλληλοαναιρούνται. Αν π.χ. τώρα το $I = 0$ και έχουμε περιττό αριθμό ηλεκτρονίων, τότε το \vec{F} θα οφείλεται στο ασύζευκτο ηλεκτρόνιο, θα είναι $F = \frac{\hbar}{2}$, και τέτοια άτομα θα είναι φερμιόνια και θα ακολουθούν στατιστική Fermi-Dirac. Όμως, κάποια άτομα, σαν το ${}^4_2\text{He}$ έχουν F φυσικό πολλαπλάσιο (0, 1, 2,...) του \hbar , είναι δηλαδή μποζόνια και ακολουθούν στατιστική Bose-Einstein, οπότε μπορούν να καταλαμβάνουν την ίδια κβαντική κατάσταση, να συμπυκνώνονται, να φτιάχνουν συνεκτικά κύματα με μακροσκοπικό πλάτος! Οπότε σε αναλογία με το laser όπου συμπυκνώνονται φωτόνια, μπορεί να κατασκευαστεί και ένα "άτομικό λέιζερ" (atom laser). Το πρώτο κατασκευάστηκε στο MIT από την ομάδα του W. Ketterle το 1996 [12]. Θα μπορούσαμε ίσως να προσθέσουμε και όλα τα ατομικά σπιν και να πάρουμε το μοριακό σπιν. Ή να προσθέσουμε όλα τα μοριακά σπιν κ.ο.κ.!

Επί παραδείγματι, το ${}^4_2\text{He}$ έχει πυρήνα δύο πρωτονίων και δύο νετρονίων. Τόσο το πρωτόνιο όσο και το νετρόνιο είναι βαρυόνια, δηλαδή με σπιν $\frac{\hbar}{2}$. Διατάσσονται όμως έτσι ώστε η ολική πυρηνική στροφορμή του να είναι $I = 0$. Έτσι, **ο πυρήνας του ${}^4_2\text{He}$ είναι μποζόνιο**. Το ${}^4_2\text{He}$ έχει ακόμα δύο ηλεκτρόνια που είναι κι αυτά φερμιόνια με σπιν $\frac{\hbar}{2}$. Τα δύο ηλεκτρόνια τοποθετούνται στον υποφλοιό $1s$ (που αντιστοιχεί σε τροχιακή στροφορμή $L = 0$) με αντίθετα σπιν, οπότε η ολική ηλεκτρονιακή στροφορμή του ${}^4_2\text{He}$, $J = 0$. Οπότε, επειδή $I = 0$ και $J = 0$ συνεπάγεται ότι η ολική ατομική στροφορμή του ${}^4_2\text{He}$, $F = 0$. Δηλαδή, **το ουδέτερο άτομο ${}^4_2\text{He}$ είναι μποζόνιο**. Άρα, πολλά άτομα ${}^4_2\text{He}$ σε πολύ χαμηλή θερμοκρασία μπορούν να καταλάβουν την ίδια κβαντική κατάσταση (BEC)!

Η εντυπωσιακότερη ίσως τεκμηρίωση της BEC αφορά συμπύκνωση **αερίου ατόμων αλκαλίων** (π.χ. ρουβίδιο [13] και νάτριο [15]) **με ατομικό σπιν φυσικό πολλαπλάσιο της \hbar** . Παλαιότερα, τεκμηριώσεις της BEC εμφανίστηκαν σε περιπλοκότερα συστήματα, σε χαμηλές θερμοκρασίες. Σε αντίθεση με τους ατμούς ατόμων αλκαλίων, τα δύο συστήματα που αναφέρονται παρακάτω δεν είναι τόσο απλά και η συμπύκνωση αφορά μόνο ένα τμήμα του συστήματος λόγω των ισχυρών αλληλεπιδράσεων που υπάρχουν και τείνουν να κρύψουν την BEC.

(I) Εκμηδένιση της ηλεκτρικής αντιστάσεως δηλαδή **υπεραγωγιμότητα** (superconductivity) στη στερεά κατάσταση ή φυσική συμπυκνωμένη ύλη π.χ. στα μέταλλα, που οφείλεται σε σχηματισμό ζευγών ηλεκτρονίων που είναι γνωστά ως **ζεύγη Cooper** (Cooper pairs). Δηλαδή δύο ηλεκτρόνια (που είναι φερμιόνια) "ένώνονται" (π.χ. λόγω αλληλεπιδράσεως ηλεκτρονίων - φωνονίων) φτιάχνοντας ένα ζεύγος που είναι μποζόνιο και αυτά τα μποζονικά ζεύγη καταλαμβάνουν την ίδια κβαντική κατάσταση. Ζεύγη Cooper εμφανίζονται και μεταξύ άλλων φερμιονίων. Το 1972 απονεμήθηκε το βραβείο Nobel στους J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer για τη θεωρία της υπεραγωγιμότητας που είναι σήμερα γνωστή ως θεωρία BCS [16-18]. Να

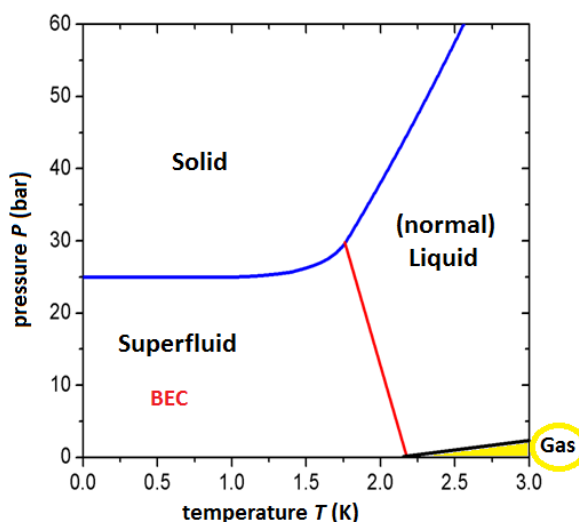
σημειωθεί ότι η υπεραγωγιμότητα παρατηρήθηκε πρώτα το 1911 από τον H. Kamerlingh Onnes [19] ο οποίος παρατήρησε ότι κάτω από κάποια **κρίσιμη θερμοκρασία** (critical temperature, T_c) η ηλεκτρική αντίσταση στον Hg και σε άλλα μέταλλα εκμηδενίζεται. Ο H. Kamerlingh Onnes τιμήθηκε με το βραβείο Nobel το 1913 για την έρευνα των ιδιοτήτων της ύλης σε χαμηλές θερμοκρασίες που οδήγησε μεταξύ άλλων στην παραγωγή υγρού Ηλίου. Το 1933 οι W. Meissner και R. Ochsenfeld ανακάλυψαν μια ακόμα σημαντική ιδιότητα των υπεραγωγίων υλικών: ένας υπεραγωγός έχει μηδενική πυκνότητα μαγνητικής ροής (μαγνητική επαγωγή, \vec{B}) [21], πράγμα που είναι γνωστό σήμερα ως **φαινόμενο Meissner**. Δηλαδή η μαγνήτιση \vec{M} με την οποία αποκρίνεται το υλικό στην εφαρμογή εξωτερικού μαγνητικού πεδίου \vec{H} είναι ακριβώς αντίθετη του ($\vec{M} = -\vec{H}$), οπότε η πυκνότητα μαγνητικής ροής ή μαγνητική επαγωγή $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \vec{0}$ (μ_0 είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού).



Σχήμα 1.3: Αριστερά η ανακάλυψη της υπεραγωγιμότητας από τον H. Kamerlingh Onnes, το 1911, στον Hg [19]. Δεξιά ένα χρονολόγιο της κρίσιμης θερμοκρασίας κάτω από την οποία έχουμε υπεραγωγιμότητα σε άλλα υλικά [20].

(II) Εκμηδένιση της εσωτερικής τριβής ή ιξώδους σε υγρά δηλαδή **υπερρευστότητα** (superfluidity). Αυτό το φαινόμενο παρατηρήθηκε πρώτα στο υγρό He. Συγκεκριμένα το 1938 οι J.F. Allen και A.D. Misener [22] παρουσίασαν πειραματικές ενδείξεις ότι η υδροδυναμική του υγρού He κάτω από 2.17 K δεν ακολουθούσε την κλασική συμπεριφορά. Σημειωτέον ότι το ^4He είναι το αφθονότερο από τα ισότοπα Ηλίου που υπάρχουν στη φύση, 99.99986% του επί Γης Ηλίου. Στο ίδιο τεύχος του περιοδικού ο P. Kapitza [23] εισήγαγε την λέξη superfluid (υπερρευστό) για να χα-

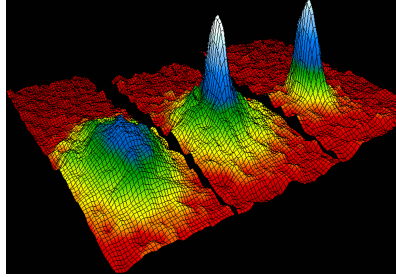
ρακτηρίσει αυτή την περίεργη συμπεριφορά. Την ίδια χρονιά ο F. London πρότεινε ότι η υπερρευστότητα (superfluidity) αλλά και η υπεραγωγιμότητα (superconductivity) του οφείλεται στην BEC [24, 25] δηλαδή ότι λόγω BEC σχηματίζεται ένα μακροσκοπικό κύμα υγρής ύλης. Όπως εξηγήσαμε παραπάνω **το ουδέτερο άτομο ^4He είναι μποζόνιο**. Άρα, πολλά άτομα ^4He σε πολύ χαμηλή θερμοκρασία μπορούν να καταλάβουν την ίδια κβαντική κατάσταση (BEC). Βέβαια, επειδή το υγρό He είναι αρκετά πυκνό, τα πράγματα είναι κάπως πολυπλοκότερα από μια απλή BEC και υπάρχει σημαντική συνεισφορά των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των ατόμων. Το 1978 ο Pyotr Leonidovich Kapitsa τιμήθηκε με το βραβείο Nobel για τις ανακαλύψεις του στην περιοχή της φυσικής χαμηλών θερμοκρασιών, ενώ το 1962 τιμήθηκε με βραβείο Nobel ο Lev Landau για τις πρωτοποριακές θεωρίες του στην φυσική συμπυκνωμένης ύλης και ειδικά για το υγρό He.



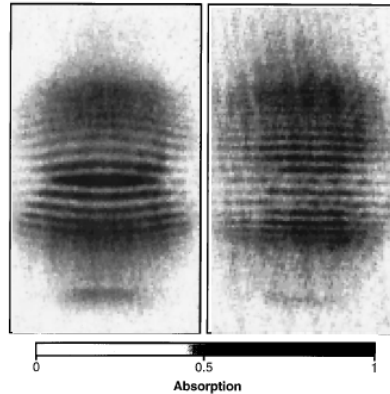
Σχήμα 1.4: Το διάγραμμα φάσεως του He. Ο F. London πρώτος πρότεινε ότι η υπερρευστότητα στο He είναι ένα BEC φαινόμενο. Το κλάσμα της συμπυκνώσεως είναι περίπου 10% σε $T \approx 0$ K.

Αντιθέτως, όταν το 1995 η BEC ανακαλύφθηκε σε ψυχρούς ατμούς αλκαλίων οι πειραματικές ενδείξεις ήσαν πολύ ισχυρές. Μεταξύ άλλων BEC έχει παρατηρηθεί σε ατμούς αερίου ^{87}Rb [13], Na [15], Li [26] και σε οιονεί σωματίδια (quasi-particles) της φυσικής συμπυκνωμένης ύλης [27] όπως μαγνόνια, εξιτονιακά πολαριτόνια κ.ο.κ. [28]. Επίσης πρωτοπαρατηρήθηκε συμβολή μεταξύ δύο συμπυκνωμάτων Bose-Einstein ατόμων Na [29] απομακρυσμένων κατά 40 μm , συγκεκριμένα χροσσοί συμβολής υλικών κυμάτων με περίοδο 15 μm πράγμα που απέδειξε ότι τα άτομα Na συμπεριφέρονται

ωσάν φωτόνια σε laser, δηλαδή είναι συνεκτικά (coherent). Για εικόνες συμβολής δεσμών ατόμων που βρίσκονται σε BEC δείτε τις ιστοσελίδες του Atomic Quantum Gases @ MIT (http://cua.mit.edu/ketterle_group/home.htm). Κατασκευάστηκε το πρώτο παλμικό ατομικό λέιζερ [30] και επιδείχτηκε BEC σε φωτόνια εντός κοιλότητας [31].



Σχήμα 1.5: Ψευδοχρωματική απεικόνιση της κατανομής ταχυτήτων σε BEC ατόμων ^{87}Rb χαμηλώνοντας τη θερμοκρασία. Από αριστερά προς τα δεξιά: μόλις πριν από την εμφάνιση της BEC, μόλις μετά την εμφάνιση της BEC και σε σχεδόν καθαρή BEC [13]. Εικόνα από wikipedia [14].



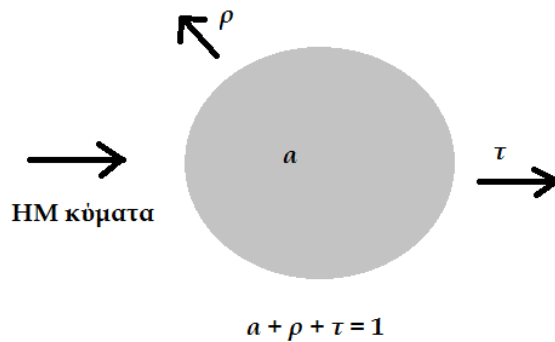
Σχήμα 1.6: Κροσσοί συμβολής υλικών κυμάτων δύο BEC ατόμων Na [29].

Επί παραδείγματι, στο ^{87}Rb η ολική πυρηνική στροφορμή ή “πυρηνικό σπιν” $I = (3/2)\hbar$, ενώ η ηλεκτρονιακή διαμόρφωση είναι $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s^1$, δηλαδή έχει ένα ασύζευκτο ηλεκτρόνιο, άρα η ολική ηλεκτρονιακή στροφορμή $J = (1/2)\hbar$. Προκύπτει συνολικά ατομικό σπιν $F = 2\hbar$, με προβολές $m_F = \{2, 1, 0, -1, -2\}\hbar$. Δηλαδή το άτομο ^{87}Rb είναι μποζόνιο. Έτσι συμπύκνωμα Bose-Einstein παρήχθη σε αραιό αέριο ατόμων ρουβιδίου ^{87}Rb καθώς και με άλλα άτομα αλκαλίων που είναι

μποζόνια. Το βραβείο Nobel Φυσικής του 2001 απονεμήθηκε από κοινού στους Eric Cornell, Wolfgang Ketterle, Carl Wieman για την επίτευξη συμπυκνώσεως Bose-Einstein σε αραιά αέρια ατόμων αλκαλίων καθώς και για την πρώτη μελέτη των ιδιοτήτων των συμπυκνωμάτων. Τα άτομα περιορίστηκαν με τη βοήθεια μαγνητικού πεδίου και ψυχράνθηκαν με τη βοήθεια laser. Το συμπύκνωμα εμφανίστηκε αρχικά σε θερμοκρασία $T \approx 170$ nK (nanokelvin) και πυκνότητα $\rho \approx 2.5 \times 10^{12}$ άτομα ανά cm^3 και μπόρεσε να διατηρηθεί για χρόνο πάνω από 15 s. Τρεις υπογραφές της BEC ανιχνεύτηκαν (i) Επάνω σε μια ευρεία θερμική κατανομή ταχυτήτων των ατόμων εμφανίστηκε μια στενή κορυφή κεντρωμένη γύρω από τη μηδενική ταχύτητα. (ii) Το κλάσμα των ατόμων που ανήκαν σε αυτή την κορυφή χαμηλών ταχυτήτων αυξήθηκε απότομα όταν μειώθηκε περαιτέρω η θερμοκρασία. (iii) Η κορυφή παρουσίασε μια μη θερμική (non-thermal), ανισότροπη κατανομή ταχυτήτων αναμενόμενη για την κβαντική κατάσταση ελάχιστης ενέργειας στη μαγνητική παγίδα σε αντίθεση με την ισότροπη, θερμική κατανομή ταχυτήτων που παρατηρήθηκε στο μη συμπυκνωμένο κλάσμα του αερίου. Αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 1.5. Στην επίσημη ιστοσελίδα των βραβείων Nobel υπάρχει πολύ καλή παρουσίαση [32].

1.3 Μέλαν σώμα και συναφείς έννοιες.

Ας παραθέσουμε μερικούς ορισμούς. Έστω ότι σε κάποιο σώμα προσπίπτουν ηλεκτρομαγνητικά (ΗΜ) κύματα ή όπως λέμε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.



Σχήμα 1.7: Σε κάποιο σώμα προσπίπτουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Σχηματική παρουσίαση των συντελεστών απορρόφησης α , διελεύσεως τ , ανακλάσεως ρ . Ισχύει $\alpha + \tau + \rho = 1$.

Ορίζουμε τα ακόλουθα φυσικά μεγέθη:

Συντελεστής απορρόφησης (absorption coefficient), α , είναι το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που απορροφάται από το σώμα.

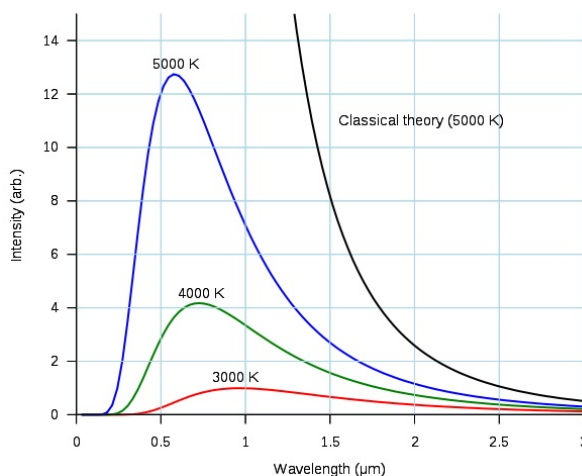
Συντελεστής διελεύσεως (transmission coefficient), τ , είναι το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που διέρχεται από το σώμα.

Συντελεστής ανακλάσεως (reflection coefficient), ρ , είναι το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που ανακλάται από το σώμα.

Τα τρία παραπάνω μεγέθη συνδέονται με τη σχέση

$$\alpha + \tau + \rho = 1. \quad (1.3)$$

Ερώτηση: Τι θα πει στα απλά ελληνικά “μέλαν”. *Απάντηση:* “μαύρο”. Ο επιστημονικός ορισμός, όμως, είναι αυστηρότερος... **Μέλαν σώμα** (black body) είναι ένα εξιδανικευμένο φυσικό σώμα το οποίο **απορροφά όλη** την προσπίπτουσα σε αυτό ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία **ανεξαρτήτως συχνότητας** και **ανεξαρτήτως γωνίας προσπτώσεως**. Το μέλαν σώμα αφήνει όλη την προσπίπτουσα ακτινοβολία να μπει μέσα του δηλαδή ανακλά μηδενικό ποσοστό της προσπίπτουσας ακτινοβολίας ($\rho = 0$), εσωτερικά απορροφά όλη αυτή την προσπίπτουσα ακτινοβολία ($\alpha = 1$), χωρίς να αφήνει ακτινοβολία να το διαπεράσει ($\tau = 0$) και αυτό ισχύει **για όλες τις συχνότητες** και **για όλες τις γωνίες προσπτώσεως**. Άρα ένα μέλαν σώμα είναι τέλειος απορροφητής της προσπίπτουσας ΗΜ ακτινοβολίας.



Σχήμα 1.8: Ακτινοβολία μέλανος σώματος σύμφωνα με το νόμο του *Planck* (δείτε §1.4 και §1.15). Εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία και όχι από το σχήμα, τη σύσταση του σώματος, τη γωνία εκπομπής κ.ο.κ..

Βεβαίως, αν συνέβαιναν μόνο τα παραπάνω ($\alpha = 1$, $\rho = \tau = 0$), τότε λόγω της συνεχούς απορρόφησης ενέργειας, η θερμοκρασία του σώματος θα αυξανόταν συνεχώς. Έτσι, **ένα μέλαν σώμα που βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία άρα και σε σταθερή θερμοκρασία** θα πρέπει να **επαν-εκπέμπει** ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία η οποία καλείται **ακτινοβολία μέλανος σώματος** (black-body radiation), έτσι ώστε να διατηρείται το ενεργειακό ισοζύγιο. Η ακτινοβολία μέλανος σώματος γίνεται σύμφωνα με το νόμο του **Planck** (§1.4, §1.15, Σχήμα 1.8) με τέτοιο τρόπο **ώστε το φάσμα της εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία** ανεξαρτήτως σχήματος, ανεξαρτήτως συστάσεως του μέλανος σώματος, ανεξαρτήτως γωνίας εκπομπής κ.ο.κ. Ένα μέλαν σώμα σε θερμοδυναμική ισορροπία έχει τις αξιοσημείωτες ιδιότητες [33]:

(I1). Είναι ένας **ιδανικός εκπομπός**, δηλαδή εκπέμπει σε κάθε συχνότητα τουλάχιστον όση ενέργεια εκπέμπει οιοδήποτε άλλο σώμα ταυτόσημης θερμοκρασίας.

(I2). Είναι ένας **ισότροπος εκπομπός**, δηλαδή η ακτινοβολία διασπείρεται ισότροπως, ανεξαρτήτως κατευθύνσεως.

Τα πραγματικά σώματα εκπέμπουν κλάσμα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος. **Συντελεστής εκπομπής ή εκπεμπότητα** (emission coefficient or emissivity), ϵ , ορίζεται το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που επαν-εκπέμπεται από το σώμα. Εξ

ορισμού, ένα μέλαν σώμα σε θερμοδυναμική ισορροπία έχει ϵ ίσο με τη μονάδα

$$\epsilon_{\text{σε θερμοδυναμική ισορροπία}}^{\text{μέλανος σώματος}} := 1 \quad (1.4)$$

Δηλαδή συνοψίζοντας για το μέλαν σώμα

$$\alpha = 1, \rho = \tau = 0, \epsilon = 1 \quad (1.5)$$

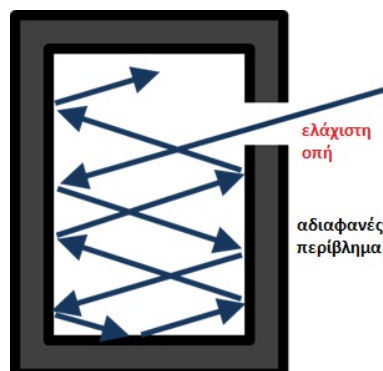
Καλούμε **γκρίζο σώμα** (gray body) ένα σώμα με $\epsilon < 1$. Καλούμε **λευκό σώμα** (white body) ένα σώμα που ανακλά όλη την προσπίπτουσα ακτινοβολία ($\rho = 1$) οπότε $\alpha = \tau = 0$. Όλα αυτά υποτίθεται ότι ισχύουν ανεξαρτήτως συχνότητας, κατεύθυνσης και θερμοκρασίας. Καλούμε **αδιαφανές σώμα** (opaque body) ένα σώμα που δεν διαπερνάται από την ΗΜ ακτινοβολία ($\tau = 0$) οπότε $\alpha + \rho = 1$. Ονομάζουμε **διαφανές σώμα** (transparent body) ένα σώμα που διαπερνάται εντελώς από την ΗΜ ακτινοβολία ($\tau = 1$) οπότε $\alpha = \rho = 0$. Οι ορισμοί συνοψίζονται στον Πίνακα 1.4.

Πίνακας 1.4: Ορισμοί σωμάτων.

μέλαν σώμα (black body)	$\alpha = 1, \rho = \tau = 0, \epsilon = 1$
γκρίζο σώμα (gray body)	$\alpha, \rho, \tau, \epsilon < 1$
λευκό σώμα (white body)	$\rho = 1, \alpha = \tau = 0$
αδιαφανές σώμα (opaque body)	$\tau = 0, \alpha + \rho = 1$
διαφανές σώμα (transparent body)	$\tau = 1, \alpha = \rho = 0$

Η ακτινοβολία από τους αστέρες, τους πλανήτες και άλλα σώματα χαρακτηρίζεται πολλές φορές από μια **ενεργό θερμοκρασία** (effective temperature), δηλαδή τη θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος που θα εξέπεμπε την ίδια συνολική (δηλαδή ολοκληρωμένη σε όλες τις συχνότητες) ένταση ακτινοβολίας I (μονάδες $[I] = \text{W}/\text{m}^2$, §1.5).

Μία προσεγγιστική πραγμάτωση μέλανος σώματος φαίνεται στο Σχήμα 1.9. Μπορεί να γίνει ανοίγοντας μια **ελάχιστη οπή** στο τοίχωμα ενός **αδιαφανούς περιβλήματος** (opaque enclosure) π.χ. στο τοίχωμα ενός κοινού κουτιού, δημιουργώντας έτσι μια **κοιλότητα με οπή** (cavity with a hole) [34]. Στη φωτονική (photonics), μερικές φορές αναφέρουμε τον όρο κοιλότητα (cavity) εννοώντας ότι υπάρχει και η ελάχιστη οπή. Λόγω της ελαχιστότητας της οπής σε σχέση



Σχήμα 1.9: Κοιλότητα με οπή: προσεγγιστική πραγμάτωση μέλανος σώματος, ανοίγοντας μια ελάχιστη οπή στο τοίχωμα ενός αδιαφανούς περιβλήματος.

με την κοιλότητα, το φως που μπαίνει στην κοιλότητα (σχεδόν) ανακλάται επ' **αόριστον ή απορροφάται** και δεν είναι πιθανόν να εξέλθει από την κοιλότητα, πράγμα που καθιστά το σύστημά μας **σχεδόν τέλειο απορροφητή**. Το **αν** το σύστημα αυτό είναι **σε θερμοδυναμική ισορροπία** και επομένως **η ακτινοβολία που εκπέμπει είναι ακτινοβολία μέλανος σώματος που ακολουθεί το νόμο Planck** εξαρτάται από τη φύση των τοιχωμάτων και τα άλλα περιεχόμενα του περιβλήματος. **Η κοιλότητα με οπή δεν είναι βεβαίως τέλειο μέλαν σώμα**. Αν το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερο από τη διάμετρο της οπής, μέρος της θα ανακλαστεί. Ομοίως, ακόμα και σε θερμοδυναμική ισορροπία, το φάσμα της ακτινοβολίας εντός πεπερασμένης κοιλότητας δε θα υπακούει εντελώς στο νόμο Planck για μήκη κύματος συγκρίσιμα ή μεγαλύτερα από το μέγεθος της κοιλότητας [35]. **Ας υποθέσουμε τώρα ότι η κοιλότητα διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία T και η παγιδευμένη ακτινοβολία βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία με το περίβλημα**. Η οπή, θα αφήσει εν γένει, ένα τμήμα της ακτινοβολίας να δραπετεύσει. Εάν η οπή είναι μικρή, η ακτινοβολία που εισέρχεται και εξέρχεται θα έχει αμελητέα επίδραση στην ισορροπία της ακτινοβολίας εντός της κοιλότητας. **Η ακτινοβολία που δραπετεύει θα είναι προσεγγιστικά ακτινοβολία μέλανος σώματος με την κατανομή του νόμου Planck χαρακτηριστική της θερμοκρασίας T και δε θα εξαρτάται από τις ιδιότητες της κοιλότητας με την οπή, τουλάχιστον για μήκη κύματος αρκετά μικρότερα από το μέγεθος της οπής**. Η κοιλότητα με οπή χρησιμοποιείται ήδη τουλάχιστον από το 1898 που την περιέγραψαν οι Otto Lummer και Ferdinand Kurlbaum. Το σχέδιό τους ήταν μια οπή σε ένα λευκόχρυσο κουτί, με το εσωτερικό του μαυρισμένο με οξείδιο του

σιδήρου [36] ή αργότερα το 1901 μαυρισμένο με μίγμα οξειδίων χρωμίου, νικελίου και κοβαλτίου [37]. Παρακάτω αναφέρουμε μερικές ακόμη προσεγγιστικές πραγματώσεις μέλανος σώματος.

Υπάρχει ενδιαφέρον για **σχεδόν μέλανα** (near-black) σώματα ή υλικά για εφαρμογές όπως η απόκρυψη (ιδίως από ραντάρ), οι συλλέκτες ηλιακής ενέργειας και οι ανιχνευτές υπέρυθρης ακτινοβολίας. Ως τέλειος εκπομπός ακτινοβολίας, ένα θερμό υλικό με συμπεριφορά σχεδόν μέλανος σώματος θα έφτιαχνε μία αποτελεσματική υπέρυθρη θερμάστρα ειδικά στο διάστημα ή στο κενό όπου η θέρμανση με μεταφορά δεν είναι δυνατή. Τα σχεδόν μέλανα σώματα είναι ακόμα χρήσιμα στα τηλεσκόπια και στις κάμερες ως αντι-ανακλαστικές επιφάνειες για τη μείωση του διάχυτου ή αδεσπότη φωτός και για τη συλλογή πληροφοριών περί αντικειμένων σε περιοχές ψηλής οπτικής αντιθέσεως π.χ. για την παρατήρηση πλανητών σε τροχιά γύρω από τους αστέρες τους όπου και τα σχεδόν μέλανα σώματα απορροφούν φως που έρχεται από άσχετες πηγές. Μια πρώτη προσέγγιση μέλανος σώματος είναι η αιθάλη. Τα τελευταία χρόνια έχειδειχθεί ότι σχεδόν τέλεια μέλανα σώματα ($\alpha \approx 0.99$) μπορούν να κατασκευαστούν με νανοσωλήνες άνθρακα [38, 39], ενώ ένα απλό μαύρο χρώμα έχει $\alpha < 0.975$. Το υλικό “super black” έχει $\alpha \approx 0.996$ και $\rho \approx 0.004$. Πρόσφατα ανακοινώθηκε από την Surrey NanoSystems η κατασκευή από νανοσωλήνες άνθρακα του υλικού Vantablack το οποίο κατά τους κατασκευαστές απορροφά 99.96% του προσπίπτοντος σε αυτό φωτός. Μια εικόνα του Vantablack πάνω σε φύλλο αργιλίου φαίνεται στο Σχήμα 1. Ο νόμος του Planck που διατυπώθηκε το 1900 περιγράφει την



Σχήμα 1.10: Το υλικό Vantablack κατασκευασμένο από νανοσωλήνες άνθρακα (Surrey NanoSystems) το οποίο κατά τους κατασκευαστές απορροφά 99.96% του προσπίπτοντος σε αυτό φωτός. Εδώ επάνω σε φύλλο αργιλίου.

πυκνότητα ενέργειας HM ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία, $\rho(\nu, T)d\nu$. Συγκεκριμένα:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu \quad (1.6)$$

Οι μονάδες του $\rho(\nu, T)$ είναι $\frac{J}{m^3 Hz}$. Αυτή είναι μια διατύπωση του νόμου του Planck

συναρτήσει της συχνότητας, ν . Υπάρχουν κι άλλες διατυπώσεις που θα δούμε αργότερα, π.χ. συναρτήσει του μήκους κύματος, λ , της κυκλικής συχνότητας, ω , του κυματαριθμού k .

1.4 Πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία, $\rho(\nu, T)d\nu$:
Νόμος του Planck
 και σύγκριση με τις προσεγγίσεις των **Rayleigh-Jeans** και **Wien**.
 Υπεριώδης καταστροφή και πρόβλημα μακρινού υπερύθρου.

Η πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία, $\rho(\nu, T)d\nu$, έμελε να γίνει **ένα από τα ζητήματα που αποκάλυψε τη κβάντωση της ΗΜ ακτινοβολίας**. Παραθέτουμε παρακάτω τρεις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στην προσπάθεια να εξηγηθεί η πειραματική συμπεριφορά, συγκεκριμένα: την έκφραση Rayleigh-Jeans (κλασική φυσική, 1900), την έκφραση Wien (πειραματικό ταίριασμα στις υψηλές συχνότητες, 1896) και εν τέλει την έκφραση Planck (παλαιά κβαντική μηχανική, 1900) η οποία ταυτίζεται με την πειραματική συμπεριφορά σε όλη την περιοχή συχνοτήτων. Έχουμε λοιπόν το νόμο Rayleigh-Jeans (κλασική φυσική, 1900)

$$\rho_{RJ}(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} = \rho_{RJ}, \quad (1.7)$$

το νόμο Wien (πειραματικό ταίριασμα στις υψηλές συχνότητες, 1896)

$$\rho_W(\nu, T) = \frac{\alpha\nu^3}{e^{b\nu/T}} \underset{\text{από Planck}}{\overset{\text{σταθερές}}{=}} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T}} = \rho_W, \quad (1.8)$$

όπου οι σημειώσεις επάνω και κάτω από το “=” σημαίνουν ότι πριν το “=” είναι η μορφή που πρότεινε ο Wien ενώ μετά το “=” χρησιμοποιούνται οι σταθερές που προβλέπονται από το νόμο Planck στο ασυμπτωτικό όριο υψηλών συχνοτήτων όπου ο νόμος Wien προσεγγίζει το νόμο Planck. Τέλος, παραθέτουμε το νόμο Planck (παλαιά κβαντική μηχανική, 1900) που ταυτίζεται με τα πειραματικά δεδομένα για οποιαδήποτε συχνότητα.

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} = \rho \quad (1.9)$$

Ας κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$x := \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{k_B T}{h} x \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx \quad (1.10)$$

Τότε εμφανίζεται η ουσιαστική διαφοροποίηση των παραπάνω νόμων

$$\boxed{\rho_{RJ} = \rho_0 x^2} \quad (1.11)$$

$$\boxed{\rho_W = \rho_0 \frac{x^3}{e^x}} \quad (1.12)$$

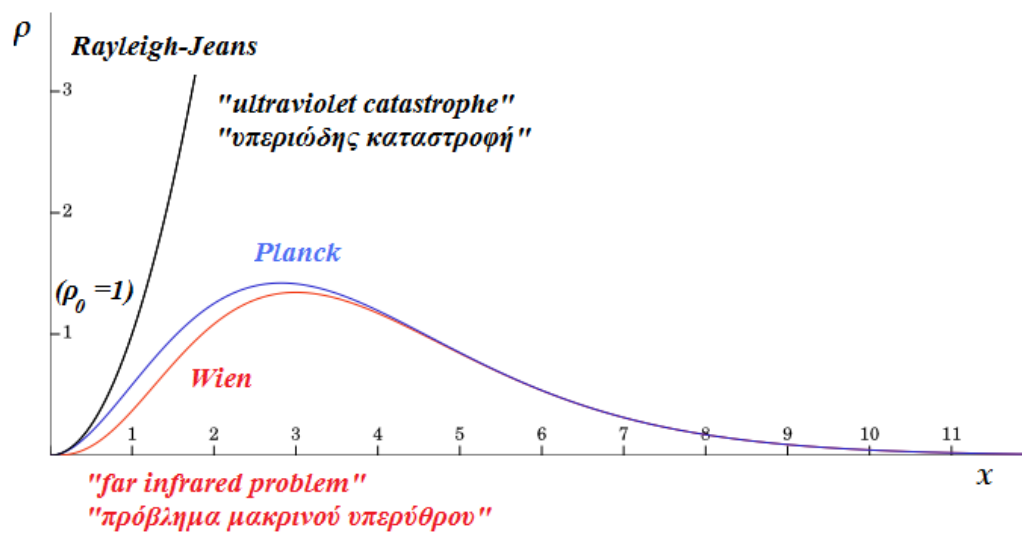
$$\boxed{\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1}} \quad (1.13)$$

$$\rho_0 := \frac{8\pi}{h^2} \left(\frac{k_B T}{c} \right)^3 \quad (1.14)$$

με μονάδες $[\rho_0] = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}}$. Εννοείται ότι στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως της Εξ. 1.13 δεν ανήκει το 0 δηλαδή δεν μιλάμε για μηδενική συχνότητα ή άπειρη θερμοκρασία. Ένας εναλλακτικός συμβολισμός που απαντάται στη βιβλιογραφία για το $\rho(\nu, T)$ είναι το $u(\nu, T)$.

Οι τρεις παραπάνω προσεγγίσεις συγκρίνονται στο Σχήμα 1.11. Διακρίνεται εκεί η λεγόμενη **υπεριώδης καταστροφή** (ultraviolet catastrophe) δηλαδή ο απειρισμός της κλασικής προσεγγίσεως Rayleigh-Jeans σε μεγάλες συχνότητες. Δηλαδή η κλασική προσέγγιση είναι ικανοποιητική μόνο σε πολύ χαμηλές συχνότητες, αλλά μετά, καθώς αυξάνεται η συχνότητα, προβλέπει απειρισμό της ρ σε καταστροφική αντίθεση με τα πειραματικά δεδομένα. Η προσέγγιση Wien παρουσιάζει πρόβλημα στο αντίθετο όριο, δηλαδή σε χαμηλές συχνότητες όπου απομακρύνεται από την πειραματική συμπεριφορά, πράγμα που συχνά καλείται **πρόβλημα μακρινού υπερύθρου** (far-infrared problem). Οι ονομασίες αυτές έχουν σχέση με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα γύρω στο 1900. Όμως, η περιοχή όπου αρχίζουν οι αποκλίσεις, εξαρτάται (προφανώς) από τη θερμοκρασία του μέλανος σώματος: Οι εκφράσεις 1.11, 1.12, 1.9 διαφέρουν μόνο στη συνάρτηση του x το οποίο εξαρτάται κατά την Εξ. 1.10 από τη θερμοκρασία T .

Ως εδώ καλό θα ήταν να επιλυθούν οι ασκήσεις Α'1.



Σχήμα 1.11: Σύγκριση των νόμων Rayleigh-Jeans (Εξ. 1.11), Wien (Εξ. 1.12), Planck (Εξ.1.13). Έχουμε θέσει $\rho_0 = 1$ (Εξ. 1.14). Διακρίνεται η “υπεριώδης καταστροφή” δηλαδή η απόκλιση της μαύρης (Rayleigh-Jeans) από τη γαλάζια (Planck) γραμμή και το “πρόβλημα μακρινού υπερύθρου” δηλαδή η απόκλιση της ερυθρής (Wien) από τη γαλάζια (Planck) γραμμή.

1.5 Δύο διατυπώσεις του νόμου Stefan-Boltzmann:

- (1) πυκνότητα ενέργειας $\rho(T)$, και
- (2) ένταση ακτινοβολίας I .

Παραθέτουμε δύο συνήθεις διατυπώσεις του νόμου των Stefan-Boltzmann ο οποίος αναφέρεται σε μέλαν σώμα με θερμοκρασία T .

Ο νόμος Stefan-Boltzmann στην 1η μορφή αφορά **την πυκνότητα ενέργειας** (μονάδες $\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$) **εντός μέλανος σώματος** θερμοκρασίας T . Για να την υπολογίσουμε, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την Εξ. 1.9 δηλαδή το $\rho(\nu, T)$ σε όλες τις συχνότητες. Ας χρησιμοποιήσουμε και την Εξ. 1.10. Συνοπτικά

$$\rho(T) := \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu \stackrel{\text{Eq. 1.10}}{=} \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \frac{k_B T}{h} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{\pi^4/15} \Rightarrow$$

$$\rho(T) = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3} T^4 \quad (1.15)$$

δηλαδή

$$\boxed{\rho(T) = aT^4} \quad (1.16)$$

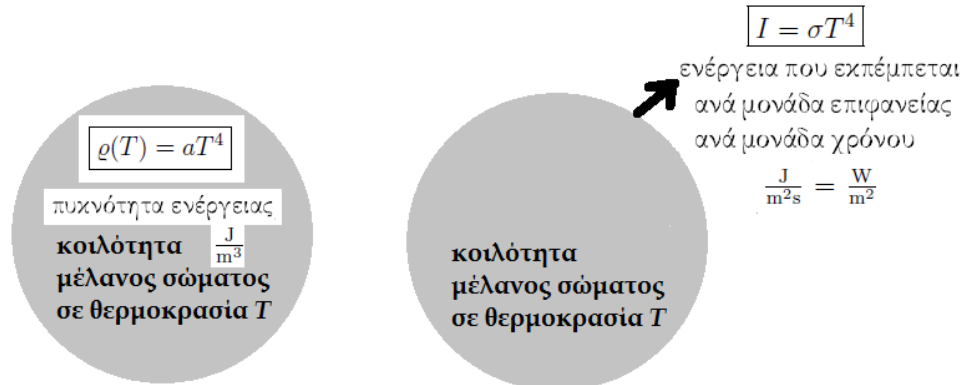
πράγμα που αποτελεί το νόμο των Stefan-Boltzmann στην 1η μορφή. Εδώ

$$a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3} \approx 7.5657 \times 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{K}^4}. \quad (1.17)$$

Βεβαίως οι μονάδες του $\rho(T)$ είναι $[\rho(T)] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$ (πυκνότητα ενέργειας). Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 1η μορφή αποδίδεται στο Σχήμα 1.12 αριστερά. Άλλο εναλλακτικό σύμβολο για το $\rho(T)$ είναι $\check{u}(T)$.

Ο νόμος Stefan-Boltzmann στην 2η μορφή αφορά την **ενέργεια που εκπέμπεται από το μέλαν σώμα ανά μονάδα επιφανείας ανά μονάδα χρόνου**, δηλαδή την εκπεμπόμενη ισχύ ανά μονάδα επιφανείας ή αλλιώς την ένταση της ακτινοβολίας I (μονάδες $\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$). Ας θεωρήσουμε δεδομένο [40] από την κινητική θεωρία των αερίων ότι ο αριθμός κρούσεων των σωματιδίων (εδώ φωτονίων) στα τοιχώματα ανά μονάδα επιφανείας και ανά μονάδα χρόνου (μονάδες $\frac{1}{\text{m}^2 \text{s}}$) ή αλλιώς η ροή σωματιδίων (εδώ φωτονίων) είναι

$$\Phi_{\sigma} = \frac{n}{4} \langle v \rangle, \quad (1.18)$$



Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 1η μορφή Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 2η μορφή

Σχήμα 1.12: **[Αριστερά]** Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 1η μορφή αφορά την πυκνότητα ενέργειας ρ (μονάδες $\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$) εντός μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία θερμοκρασίας T και διατυπώνεται ως $\rho(T) = aT^4$. $a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3} \approx 7.5657 \times 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{K}^4}$. **[Δεξιά]** Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 2η μορφή αφορά την ενέργεια που εκπέμπεται ανά μονάδα επιφανείας ή αλλιώς την ένταση της ακτινοβολίας I (μονάδες $\frac{\text{J}}{\text{m}^2\text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$) και διατυπώνεται ως $I = \sigma T^4$. $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \approx 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$.

όπου n είναι η πυκνότητα σωματιδίων (μονάδες $1/\text{m}^3$) και $\langle v \rangle$ η μέση ταχύτητα των σωματιδίων (εδώ φωτονίων). Άρα για τα φωτόνια

$$\Phi_\gamma = \frac{n}{4}c, \quad (1.19)$$

Αλλά

$$I = \langle h\nu \rangle \Phi_\gamma \quad (1.20)$$

όπου

$$\langle h\nu \rangle = \frac{\rho}{n} \quad (1.21)$$

είναι η μέση τιμή της ενέργειας που μεταφέρει κάθε φωτόνιο. Από τις εξισώσεις 1.19, 1.20, 1.21 έπεται ότι

$$I = \frac{c}{4}\rho. \quad (1.22)$$

Οπότε λόγω της Εξ. 1.16

$$I = \left(\frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \right) T^4 \quad (1.23)$$

ή

$$I = \sigma T^4 \quad (1.24)$$

πράγμα που αποτελεί το νόμο Stefan-Boltzmann στη 2η και συνηθέστερη μορφή. Εδώ

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \approx 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}. \quad (1.25)$$

Ο νόμος των Stefan-Boltzmann στην 2η μορφή αποδίδεται στο Σχήμα 1.12 δεξιά. Δηλαδή, στη 2η μορφή, ο νόμος Stefan-Boltzmann λέει ότι η ολική εκπεμπόμενη ένταση ακτινοβολίας από ένα μέλαν σώμα σε θερμοκρασία T είναι ανάλογη προς την 4η δύναμη της θερμοκρασίας.

Ηλεκτρομαγνητικά ζητήματα ...

Για να αποδείξουμε το νόμο του Planck, αλλά και για να αποδείξουμε τον κλασικό νόμο των Rayleigh-Jeans, χρειάζεται να γνωρίζουμε, μεταξύ άλλων, τους κανονικούς τρόπους ΗΜ πεδίου σε μια κοιλότητα και ειδικότερα τον στοιχειώδη αριθμό κανονικών τρόπων ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας, $g(\nu) = dN/d\nu$. Οπότε, θα χρειαστεί να εξετάσουμε μερικά ηλεκτρομαγνητικά ζητήματα ...

1.6 Εξισώσεις Maxwell. Διατύπωση με όρους ολικού φορτίου και ολικού ρεύματος.

Γνωρίζουμε το θεώρημα Gauss

$$\oint_{S=\partial V} \vec{\Delta} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\Delta} dV, \quad (1.26)$$

και το θεώρημα Stokes

$$\oint_{L=\partial S} \vec{\Delta} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{\Delta} \cdot d\vec{a}. \quad (1.27)$$

Το $\vec{\Delta}$ δηλώνει κάποιο διανυσματικό πεδίο όπως π.χ. το ηλεκτρικό πεδίο ή τη μαγνητική επαγωγή κ.ο.κ., $S = \partial V$ δηλώνει μια επιφάνεια S που αποτελεί το σύνορο ενός όγκου V , $L = \partial S$ δηλώνει μια καμπύλη L που αποτελεί το σύνορο μιας επιφάνειας S . $d\vec{\ell}$, $d\vec{a}$, dV δηλώνουν το στοιχειώδες μήκος, τη στοιχειώδη επιφάνεια, το στοιχειώδη όγκο. Αυτά μας επιτρέπουν να μεταβούμε από τη διαφορική μορφή (differential form) των εξισώσεων Maxwell

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{νόμος Gauss ηλεκτρισμού '1η'} \quad (1.28\alpha')$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad \text{νόμος Gauss μαγνητισμού '2η'} \quad (1.28\beta')$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{νόμος Faraday επαγωγής '3η'} \quad (1.28\gamma')$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \text{νόμος Ampère και διόρθωση Maxwell '4η'} \quad (1.28\delta')$$

μετά από πράξεις

$$\oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{q_{\text{εντός}V}}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\oint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \Rightarrow$$

$$\oint_{L=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{a} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \Rightarrow$$

$$\oint_{L=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \Rightarrow$$

στην ολοκληρωτική τους μορφή (integral form)

$$\boxed{\Phi_{E,S=\partial V} := \oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{εντός}V}}{\epsilon_0}} \quad \text{νόμος Gauss ηλεκτρισμού '1η'} \quad (1.30\alpha')$$

$$\boxed{\Phi_{B,S=\partial V} := \oint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0} \quad \text{νόμος Gauss μαγνητισμού '2η'} \quad (1.30\beta')$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{HE}\Delta} := \oint_{L=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t}} \quad \text{νόμος Faraday επαγωγής '3η'} \quad (1.30\gamma')$$

$$\boxed{\oint_{L=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{του διαπερνά την } S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}} \quad \text{νόμος Ampère και διόρθωση Maxwell '4η'} \quad (1.30\delta')$$

Στο κενό όπου $\rho = 0$ και $\vec{J} = \vec{0}$ οι Εξ. 1.28α'-1.28δ' γίνονται

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.31\alpha')$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.31\beta')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.31\gamma')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.31\delta')$$

1.7 Συνοριακές συνθήκες σε διεπιφάνεια.

Θα περιγράψουμε τις συνοριακές συνθήκες σε διεπιφάνεια που μπορούν να βρεθούν και σε ένα εγχειρίδιο ηλεκτρομαγνητισμού [41, 42].

♣ Ας εφαρμόσουμε στο Σχήμα 1.13 (όπου η κατεύθυνση των διανυσμάτων \vec{E}_1 και \vec{E}_2 έχει σχεδιαστεί επίτηδες τυχαία) την '1η' Εξίσωση Maxwell 1.30α'

$$\Phi_{E,S=\partial V} := \oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{εντός}V}}{\epsilon_0}, \Rightarrow$$

$$\Phi_{E,\text{άνω κύκλου}} + \Phi_{E,\text{κάτω κύκλου}} + \Phi_{E,\text{παράπλευρη}} = \frac{q_{\text{εντός}V}}{\epsilon_0}$$

$\Phi_{E,\text{άνω κύκλου}} = \vec{E}_1 \cdot \vec{A}_1 = E_{1\perp} A_1$ και $\Phi_{E,\text{κάτω κύκλου}} = \vec{E}_2 \cdot \vec{A}_2 = E_{2\perp} A_2$ όπου τα $E_{1\perp}, E_{2\perp}, A_1, A_2$ είναι αλγεβρικές τιμές. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} AE_{1\perp} - AE_{2\perp} + \int_{A_{\text{παράπλευρη}}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\sigma \cdot A}{\epsilon_0} \\ \text{Αλλά όταν } h \rightarrow 0 \Rightarrow A_{\text{παράπλευρη}} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \int_{A_{\text{παράπλευρη}}} \vec{E} \cdot d\vec{a} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \text{και} \\ \text{αν } \sigma = 0 \Rightarrow E_{1\perp} = E_{2\perp} \end{array}$$

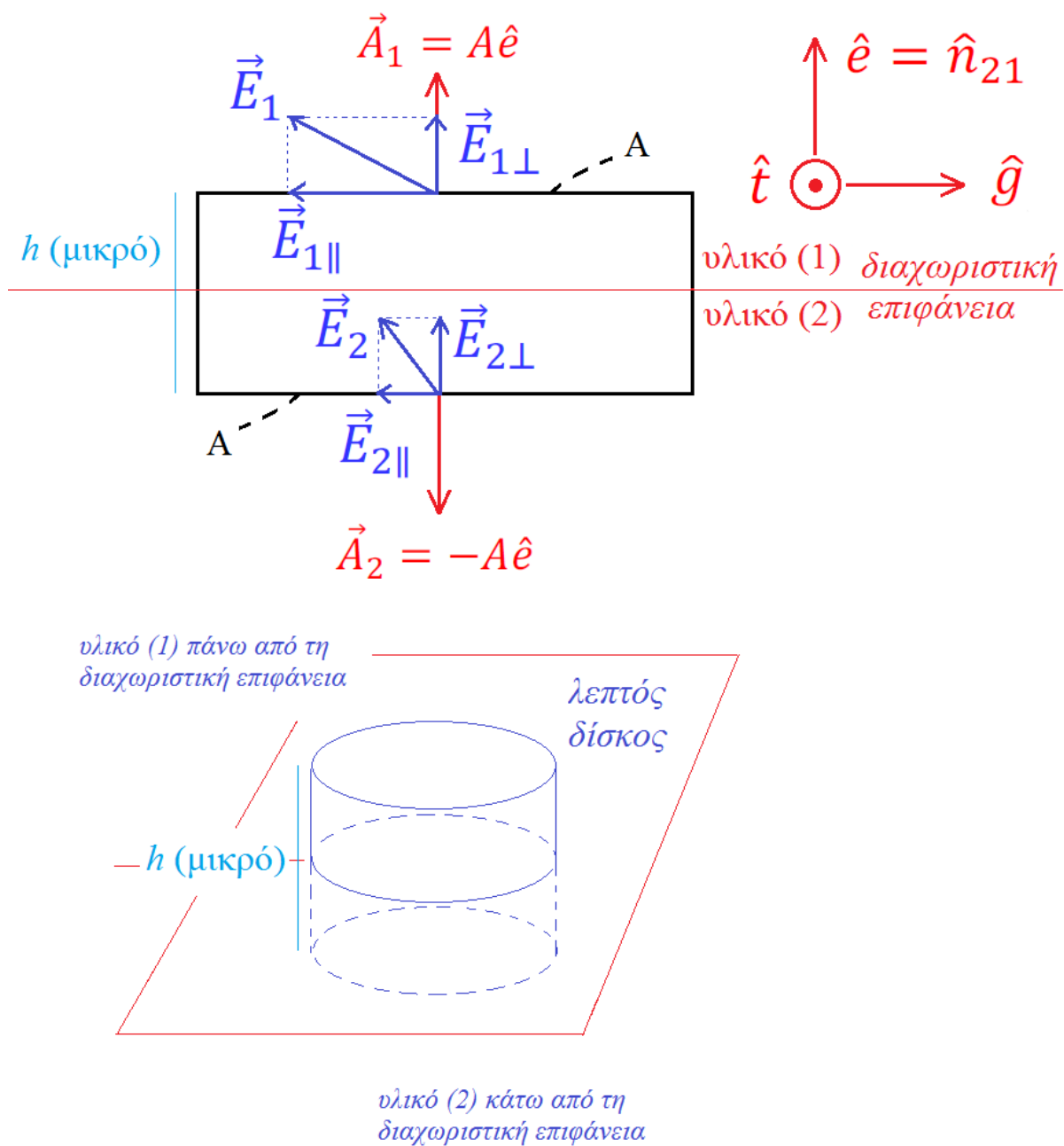
Παραπάνω ονομάσαμε $|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2| = |\vec{A}| = A$. Οπότε, π.χ. αν έχουμε απλωμένη θετική σ στη διεπιφάνεια, τότε τα $\vec{E}_{1\perp}$ και $\vec{E}_{2\perp}$ δείχνουν από τη διεπιφάνεια προς τα έξω. Συνοπτικά, εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad (1.32)$$

$$\text{ή } \boxed{(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{e} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad \hat{e} = \hat{n}_{21} \text{ (από 2 προς το 1)}$$

$$\text{ή } \boxed{(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{n}_{21} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

$$\text{ή } \boxed{(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad \hat{n}_{12} \text{ (από 1 προς το 2)}$$



Σχήμα 1.13: Συνοριακές συνθήκες για την 1η Εξίσωση Maxwell. Η κατεύθυνση των διανυσμάτων \vec{E}_1 και \vec{E}_2 έχει σχεδιαστεί επίτηδες τυχαία. Ομοίως και για τη 2η Εξίσωση Maxwell όπου το \vec{E} πρέπει να αντικατασταθεί με \vec{B} .

◇ Ας εφαρμόσουμε, ομοίως (αλλάζοντας τα \vec{E} σε \vec{B}), στο Σχήμα 1.13 τη '2η' Εξίσωση Maxwell 1.30β'

$$\Phi_{B,S=\partial V} := \oint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0.$$

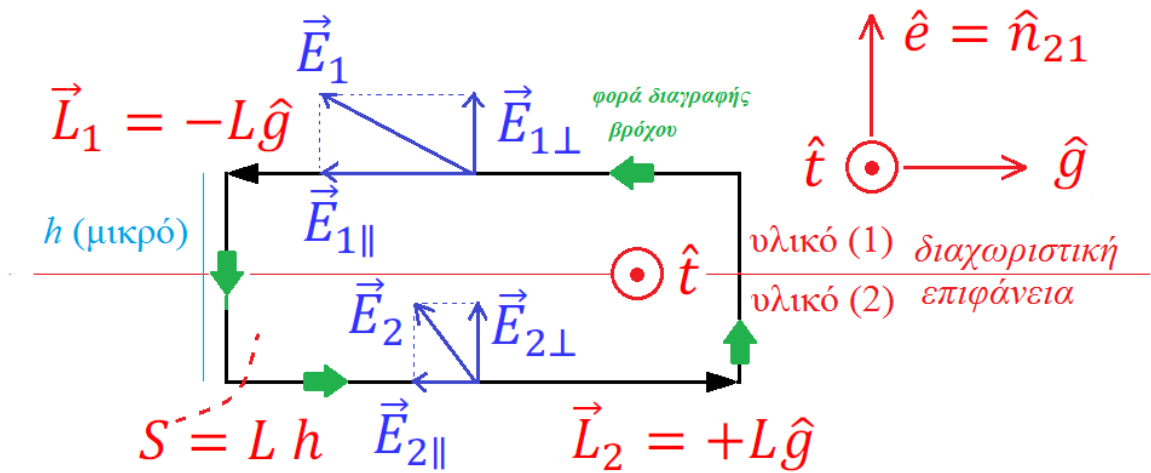
Ομοίως με προηγουμένως, καταλήγουμε στις εναλλακτικές γραφές

$$\boxed{B_{1\perp} = B_{2\perp}} \quad (1.33)$$

ή $\boxed{(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \hat{e} = 0}$ $\hat{e} = \hat{n}_{21}$ (από 2 προς το 1)

ή $\boxed{(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \hat{n}_{21} = 0}$

ή $\boxed{(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_{12} = 0}$ \hat{n}_{12} (από 1 προς το 2)



Σχήμα 1.14: Συνοριακές συνθήκες για την 3η Εξίσωση Maxwell. Η κατεύθυνση των διανυσμάτων \vec{E}_1 και \vec{E}_2 έχει σχεδιαστεί τυχαία. Εδώ ο βρόχος βρίσκεται στο επίπεδο (\hat{e}, \hat{g}) .

♡ Ας εφαρμόσουμε τώρα στο Σχήμα 1.14 την '3η' Εξίσωση Maxwell 1.30γ'

$$\mathcal{E}_{\text{HE}\Delta} := \oint_{L=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} & \vec{E}_1 \cdot \vec{L}_1 + \int_{\text{τμήμα } h}^{\text{μικρό αριστερό}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \vec{E}_2 \cdot \vec{L}_2 + \int_{\text{τμήμα } h}^{\text{μικρό δεξιό}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \\ \text{άλλα όταν } h \rightarrow 0 \Rightarrow S = hL \rightarrow 0 \Rightarrow \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \rightarrow 0 \\ \text{άλλα όταν } h \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{\text{τμήμα } h}^{\text{μικρό αριστερό}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 = \int_{\text{τμήμα } h}^{\text{μικρό δεξιό}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{L}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{L}_2 = 0 \Rightarrow E_{1\parallel} L_1 + E_{2\parallel} L_2 = 0 \Rightarrow -E_{1\parallel} L + E_{2\parallel} L = 0 \Rightarrow E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$

Παραπάνω ονομάσαμε $|\vec{L}_1| = |\vec{L}_2| = |\vec{L}| = L$, ενώ τα $E_{1\parallel}, E_{2\parallel}, L_1, L_2$ είναι αλγεβρικές τιμές. Επειδή

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{L}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{L}_2 = 0 \Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{g} = 0$$

Δηλαδή, όταν ο βρόχος βρίσκεται στο επίπεδο $(\hat{e}, \hat{g}) \Rightarrow$ η διαφορά $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \perp \hat{g}$

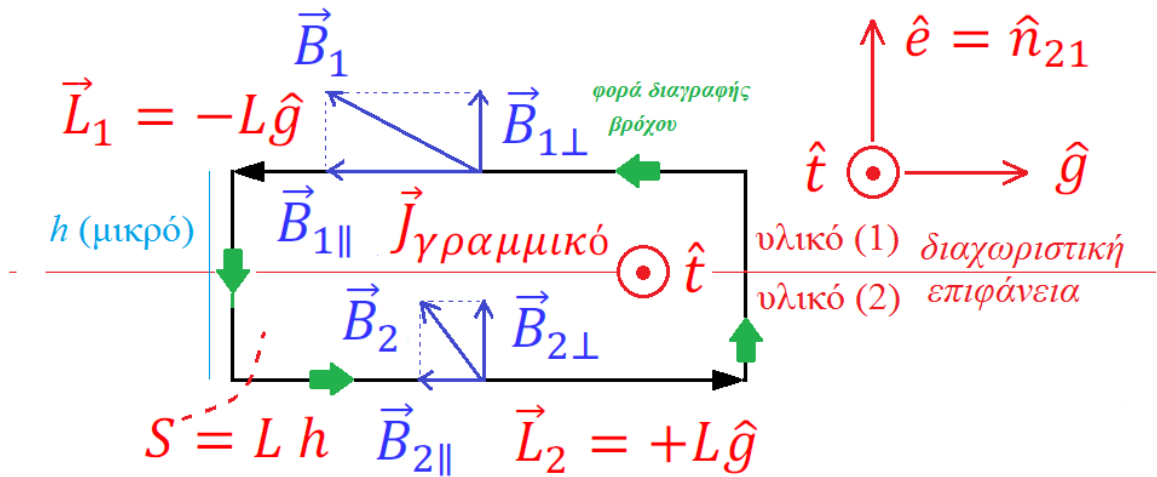
Ομοίως, όταν ο βρόχος βρίσκεται στο επίπεδο $(\hat{e}, \hat{t}) \Rightarrow$ η διαφορά $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \perp \hat{t}$

δηλαδή η διαφορά $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \perp$ διεπιφάνεια
 πράγμα που μπορεί να αποδοθεί ως $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{e} = \vec{0}$

Οπότε, συνοπτικά, εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{E_{2\parallel} = E_{1\parallel}} \quad (1.34)$$

$$\boxed{(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{e} = \vec{0}}$$



Σχήμα 1.15: Συνοριακές συνθήκες για την 4η Εξίσωση Maxwell. Η κατεύθυνση των διανυσμάτων \vec{B}_1 και \vec{B}_2 έχει σχεδιαστεί τυχαία.

♠ Ας εφαρμόσουμε τώρα στο Σχήμα 1.15 την '4η' Εξίσωση Maxwell 1.30δ'

$$\oint_{L=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{που διαπερνά την } S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{B}_1 \cdot \vec{L}_1 + \int_{\text{τιμήμα } h}^{\text{μικρό αριστερό}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \vec{B}_2 \cdot \vec{L}_2 + \int_{\text{τιμήμα } h}^{\text{μικρό δεξιό}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \\ \mu_0 J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S} L + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S=Lh} \vec{E} \cdot d\vec{a} \\ \text{άλλα όταν } h \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{\text{τιμήμα } h}^{\text{μικρό αριστερό}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 = \int_{\text{τιμήμα } h}^{\text{μικρό δεξιό}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\ \text{άλλα όταν } h \rightarrow 0 \Rightarrow S = Lh \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{S=Lh} \vec{E} \cdot d\vec{a} \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$-B_{1||}L + B_{2||}L = \mu_0 J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S} L \Rightarrow$$

Οπότε, συνοπτικά, εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \times \hat{e} = \mu_0 \vec{J}_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S}} \quad (1.35)$$

$$\boxed{B_{2\parallel} - B_{1\parallel} = \mu_0 J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S}}$$

και αν $J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S} = 0 \Rightarrow B_{2\parallel} = B_{1\parallel}$. Παραπάνω τα $B_{1\parallel}, B_{2\parallel}$ είναι αλγεβρικές τιμές, ενώ ονομάσαμε $|\vec{L}_1| = |\vec{L}_2| = |\vec{L}| = L$. Οι μονάδες του $J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S}$ είναι A/m. Δηλαδή στην εξίσωση 1.35 οι μονάδες είναι T = (N/A²)(A/m).

1.8 Ύπαρξη ΗΜ κυμάτων όταν $\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$.

Ας δούμε πως μετατρέπονται οι Εξισώσεις Maxwell όταν $\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1^\eta) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2^\eta) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3^\eta) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4^\eta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow[\vec{J}=\vec{0}]{\rho=0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3^{\eta'}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4^{\eta'}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1^{\eta'}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2^{\eta'}) \end{array}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την ταυτότητα

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Delta}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Delta}) - \nabla^2 \vec{\Delta} \quad (1.36)$$

όπου ∇^2 η Λαπλασιανή (Laplacian), πρώτα εις το \vec{E} και μετά εις το \vec{B} .

Εις το \vec{E}

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad \begin{array}{l} (1^{\eta'}) \\ (3^{\eta'}) \end{array} \quad (1.37)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad (1.38)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{E} \quad \xrightarrow{(4^{\eta'})} \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \nabla^2 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad (1.40)$$

$$\text{κυματική εξίσωση} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{E} = \vec{0} \\ \square \vec{E} = \vec{0} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \quad \Rightarrow \\ \text{ή} \\ \text{ή} \end{array}$$

όπου \square είναι η λεγόμενη D' Alembertian. (1.41)

Εις το \vec{B}

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \quad \begin{array}{l} (2n') \\ (4n') \end{array} \quad (1.42)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \vec{B} \quad \Rightarrow \quad (1.43)$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{B} \quad \begin{array}{l} (3n') \\ (4n') \end{array} \quad (1.44)$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \vec{B} \quad \Rightarrow \quad (1.45)$$

$$\text{κυματική εξίσωση} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{B} = \vec{0} \\ \square \vec{B} = \vec{0} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \Rightarrow \\ \text{ή} \\ \text{ή} \\ \text{όπου } \square \text{ είναι η λεγόμενη D' Alembertian.} \end{array} \quad (1.46)$$

1.9 Πεδία εντός ιδανικού αγωγού.

Ένας καλός αγωγός (good conductor) ανακλά το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ΗΜ κύματος που προσπίπτει στην επιφάνειά του [42]. Ορίζουμε ως ιδανικό αγωγό (ideal conductor) ένα υλικό το οποίο ανακλά όλη την ενέργεια ΗΜ κύματος που προσπίπτει στην επιφάνειά του [42]. Επειδή η πυκνότητα ενέργειας ΗΜ κύματος

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[E^2 + c^2 B^2 \right] \quad (1.47)$$

με μονάδες $[U] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$,

↓

$$\boxed{\text{Εντός ιδανικού αγωγού } \vec{E} = \vec{0} \text{ και } \vec{B} = \vec{0}} \quad (1.48)$$

1.10 Πεδία στο σύνορο ιδανικού αγωγού.

Ας θυμηθούμε τις συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια μεταξύ υλικών και στη συνέχεια υποθέσουμε ότι το υλικό (1) είναι ιδανικός αγωγός, ενώ το υλικό (2) είναι κενό ή κατά προσέγγιση αέρας

$$\left. \begin{aligned} E_{1\perp} - E_{2\perp} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} && \underline{\Gamma\Sigma\Sigma} \\ B_{1\perp} &= B_{2\perp} \\ E_{1\parallel} &= E_{2\parallel} \\ B_{2\parallel} - B_{1\parallel} &= \mu_0 \underbrace{J_{\text{γραμμικό που}}}_{\text{διαπερνά την } S} && \text{μονάδες [A/m]} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (1.49)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{εάν} \\ (1) \text{ ιδανικός αγωγός} &(\vec{B}_1 = \vec{0} \text{ και } \vec{E}_1 = \vec{0}) \\ (2) \text{ κενό ή αέρας} & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (1.50)$$

$$\left. \begin{aligned} -E_{2\perp} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} && \underline{\text{E}\Sigma\Sigma} \\ \boxed{B_{2\perp} = 0} \\ \boxed{E_{2\parallel} = 0} \\ B_{2\parallel} &= \mu_0 \underbrace{J_{\text{γραμμικό που}}}_{\text{διαπερνά την } S} \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

$\underline{\Gamma\Sigma\Sigma}$ σημαίνει γενικές συνοριακές συνθήκες και $\underline{\text{E}\Sigma\Sigma}$ σημαίνει ειδικές συνοριακές συνθήκες. Επίσης, ας ονομάσουμε $\underline{\text{E}\Sigma\Sigma}^*$ το μέρος των $\underline{\text{E}\Sigma\Sigma}$ που θα χρησιμοποιήσουμε περισσότερο.

$$\left. \begin{aligned} \boxed{B_{2\perp} = 0} \\ \boxed{E_{2\parallel} = 0} \end{aligned} \right\} \underline{\text{E}\Sigma\Sigma}^* \quad (1.52)$$

1.11 Πεδία σε κοιλότητες.

Είδαμε παραπάνω ότι το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ενός ΗΜ κύματος που προσπίπτει στην επιφάνεια ενός καλού αγωγού ανακλάται, μάλιστα αν ο αγωγός είναι ιδανικός τότε όλη η ενέργεια ανακλάται.

⇓

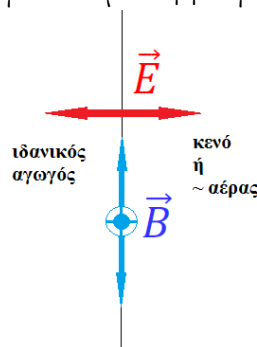
Συνεπώς, μπορούμε να αποθηκεύσουμε ΗΜ ενέργεια στη μορφή στάσιμων ΗΜ κυμάτων εντός κοιλότητας με τοιχώματα από ιδανικό (ή κατά προσέγγιση καλό) αγωγό.

Είδαμε επίσης τις $\underline{E\Sigma\Sigma}$ και εστιάζουμε στις $\underline{E\Sigma\Sigma^*}$

$$B_{2\perp} = 0$$

$$E_{2\parallel} = 0$$

δηλαδή στην επιφάνεια ενός ιδανικού αγωγού, η κάθετη συνιστώσα του \vec{B} και η εφαπτομενική συνιστώσα του \vec{E} μηδενίζονται.



Σχήμα 1.16: Στην επιφάνεια ενός ιδανικού αγωγού, η κάθετη συνιστώσα του \vec{B} και η εφαπτομενική συνιστώσα του \vec{E} μηδενίζονται, οπότε τα πεδία **μπορούν** να έχουν μόνο κάποιους από τους προανατολισμούς που παρουσιάζονται.

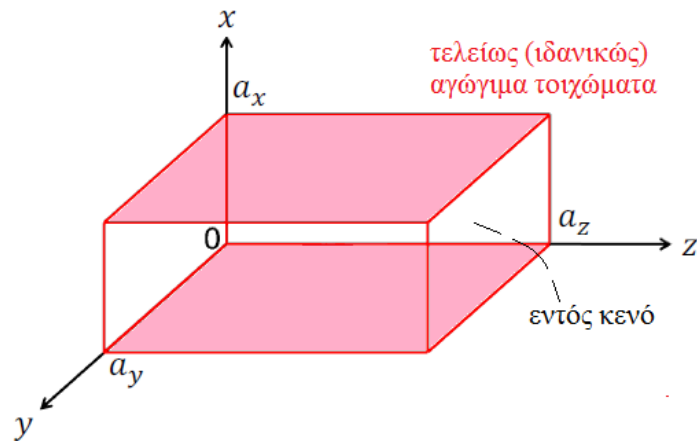
⇓

Συνεπώς, οι δυνατές μορφές και συχνότητες των στάσιμων κυμάτων που διατηρούνται στην κοιλότητα καθορίζονται από το σχήμα της κοιλότητας. Αυτό αποδίδεται ως

$$(\text{κανονικοί}) \text{ τρόποι } \left\{ \begin{array}{l} \text{μορφές} \quad \text{patterns} \\ \text{και} \quad \text{and} \\ \text{συχνότητες} \quad \text{frequencies} \end{array} \right\} (\text{normal}) \text{ modes} \quad (1.53)$$

1.12 Κανονικοί τρόποι ΗΜ κύματος σε ορθογώνια κοιλότητα.

Ας θεωρήσουμε την ορθογώνια κοιλότητα του Σχήματος 1.17.



Σχήμα 1.17: Ορθογώνια κοιλότητα με τελείως (ιδανικώς) αγωγία τοιχώματα. Εντός της κοιλότητας υπάρχει κενό ή κατά προσέγγιση αέρας. Έχει χρωματιστεί η κάτω έδρα όπου $x = 0$ και η άνω έδρα όπου $x = a_x$.

Εντός της κοιλότητας $\rho = 0$, $\vec{J} = \vec{0} \implies$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \underline{\text{KEE}} \quad (1.54)$$

και

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \underline{\text{KEB}} \quad (1.55)$$

KEE σημαίνει κυματική εξίσωση για το \vec{E} και KEB σημαίνει κυματική εξίσωση για το \vec{B} . Επειδή τα τοιχώματα της κοιλότητας είναι ιδανικώς αγωγία θα πρέπει σε κάθε τοίχωμα να μηδενίζονται η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου και η κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \boxed{E_{\parallel} = 0} & \quad \underline{\text{EΣΣ}*} & (1.56) \\ \boxed{B_{\perp} = 0} & \end{aligned}$$

Τα επίπεδα κύματα ελευθέρου χώρου δεν ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Μπορούμε, όμως, να αναζητήσουμε λύσεις της μορφής:

Χωρισμός των Μεταβλητών \vec{r}, t

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_{\vec{r}}(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad \underline{X\vec{r}t}. \quad (1.57)$$

Η ΚΕΕ λόγω της $X\vec{r}t$ γίνεται

$$e^{-i\omega t} \nabla^2 \vec{E}_{\vec{r}} = \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} \vec{E}_{\vec{r}} \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \vec{E}_{\vec{r}} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_{\vec{r}} = \vec{0} \quad (1.58)$$

Στη συνέχεια χωρίζουμε τις μεταβλητές x, y, z , εντός του \vec{r} . Μετά από αρκετές πράξεις [42] που θα παραλειφθούν εδώ, προκύπτει:

$$E_x = E_{x0} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } y = 0 \text{ και } z = 0 \quad (1.59)$$

$$E_y = E_{y0} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } z = 0 \quad (1.60)$$

$$E_z = E_{z0} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } y = 0 \quad (1.61)$$

όπου

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.62)$$

Στο Σχήμα 1.17 έχει χρωματιστεί η κάτω έδρα όπου $x = 0$ και η άνω έδρα όπου $x = a_x$. Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις 1.59, 1.60, 1.61 στην κάτω έδρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο x -συνιστώσα δηλαδή είναι κάθετο σε αυτήν. Ομοίως προκύπτει ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο y -συνιστώσα στην οπίσθια έδρα και μόνο z -συνιστώσα στην αριστερή έδρα είναι δηλαδή κάθετο και στις έδρες αυτές. Ομοίως θα πρέπει το ηλεκτρικό πεδίο να έχει στην άνω έδρα μόνο x -συνιστώσα, στην μπροστινή έδρα μόνο y -συνιστώσα και στη δεξιά έδρα μόνο z -συνιστώσα, δηλαδή να είναι κάθετο και στις έδρες αυτές.

Επειδή η E_x πρέπει να μηδενίζεται και για $y = a_y$ και $z = a_z \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sin(k_y a_y) &= 0 \Rightarrow k_y a_y = m_y \pi \\ \sin(k_z a_z) &= 0 \Rightarrow k_z a_z = m_z \pi\end{aligned}$$

Επειδή η E_y πρέπει να μηδενίζεται και για $x = a_x$ και $z = a_z \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sin(k_x a_x) &= 0 \Rightarrow k_x a_x = m_x \pi \\ \sin(k_z a_z) &= 0 \Rightarrow k_z a_z = m_z \pi\end{aligned}$$

Επειδή η E_z πρέπει να μηδενίζεται και για $x = a_x$ και $y = a_y \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sin(k_x a_x) &= 0 \Rightarrow k_x a_x = m_x \pi \\ \sin(k_y a_y) &= 0 \Rightarrow k_y a_y = m_y \pi\end{aligned}$$

Συνοπτικά, στην κάτω και στην άνω έδρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο x -συνιστώσα δηλαδή είναι κάθετο σε αυτές, στην οπίσθια και στην μπροστινή έδρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο y -συνιστώσα δηλαδή είναι κάθετο σε αυτές, και στην αριστερή και στη δεξιά έδρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο z -συνιστώσα δηλαδή είναι κάθετο σε αυτές.

Επίσης, συνολικά προκύπτει

$$k_x = \frac{m_x \pi}{a_x}, \quad k_y = \frac{m_y \pi}{a_y}, \quad k_z = \frac{m_z \pi}{a_z} \quad (1.63)$$

όπου $m_x, m_y, m_z \in \mathbb{Z}$.

Ακόμα, από την (1η) Εξίσωση Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow$

$$k_x E_{x0} + k_y E_{y0} + k_z E_{z0} = 0, \quad (1.64)$$

ενώ από την (3η) Εξίσωση Maxwell, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$

$$B_x = \frac{i}{\omega} \left(E_{y0} k_z - E_{z0} k_y \right) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \quad (1.65)$$

$$B_y = \frac{i}{\omega} \left(E_{z0} k_x - E_{x0} k_z \right) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \quad (1.66)$$

$$B_z = \frac{i}{\omega} \left(E_{x0} k_y - E_{y0} k_x \right) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} \quad (1.67)$$

Αφήνουμε στον-ην αναγνώστη-στρια να ελέγξει αν το \vec{B} ικανοποιεί την $\underline{E\Sigma\Sigma^*}$ στα τοιχώματα, αλλά και τη (2η) Εξίσωση Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ και την (4η) Εξίσωση Maxwell, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Από τις Εξ. 1.62 και 1.63 θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\omega = c \sqrt{\left(\frac{m_x \pi}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y \pi}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z \pi}{a_z}\right)^2} \quad (1.68)$$

$$\omega = \pi c \sqrt{\left(\frac{m_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{a_z}\right)^2} \quad \text{ορθογώνια κοιλότητα} \quad (1.69)$$

$$\omega = \pi c \sqrt{\frac{m_x^2 + m_y^2}{a'^2} + \frac{m_z^2}{a_z^2}} \quad \text{τετραγωνική κοιλότητα (} a_x = a_y = a' \text{)} \quad (1.70)$$

$$\omega = \frac{\pi c}{a} \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} \quad \text{κυβική κοιλότητα (} a_x = a_y = a_z = a \text{)} \quad (1.71)$$

Μπορούμε και να πάρουμε $m_x, m_y, m_z \in \mathbb{N}$ απορροφώντας την αλλαγή προσήμου στα E_{x0}, E_{y0}, E_{z0} , δηλαδή επιτρέποντας στα E_{x0}, E_{y0}, E_{z0} να πάρουν θετικές ή αρνητικές τιμές, τέτοιες που να συμφωνούν με τις συνοριακές συνθήκες. Στον Πίνακα 1.5 φαίνονται μερικά $\frac{a\omega}{\pi c}$ που προκύπτουν από την Εξ. 1.71 για την κυβική κοιλότητα, για διάφορες τιμές των m_x, m_y, m_z . Επίσης σημειώνεται αν προκύπτει μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο από τις αντίστοιχες εξισώσεις 1.59, 1.60, 1.61, καθώς και μηδενικό μαγνητικό πεδίο από τις αντίστοιχες εξισώσεις 1.65, 1.66, 1.67.

Πίνακας 1.5: Τα $\frac{a\omega}{\pi c}$ που προκύπτουν από την εξίσωση 1.71 για την περίπτωση της κυβικής κοιλότητας, για διάφορες τιμές των φυσικών αριθμών m_x, m_y, m_z . Σημειώνεται και αν προκύπτει μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο από τις αντίστοιχες εξισώσεις 1.59, 1.60, 1.61, καθώς και μηδενικό μαγνητικό πεδίο από τις αντίστοιχες εξισώσεις 1.65, 1.66, 1.67.

m_x	m_y	m_z	$\frac{a\omega}{\pi c}$	“ πλάτος ”
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	1	$\sqrt{2}$	$\neq 0$
1	1	1	$\sqrt{3}$	$\neq 0$
2	0	0	2	0
2	1	0	$\sqrt{5}$	$\neq 0$

1.13 Στοιχειώδης αριθμός κανονικών τρόπων ΗΜ πεδίου ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας, $g(\nu) = dN/d\nu$.

Παρακάτω αποδεικνύουμε ότι

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3} \quad (1.72)$$

dN είναι ο στοιχειώδης αριθμός των τρόπων ταλάντωσης στο στοιχειώδες διάστημα συχνότητας $d\nu$, και V ο όγκος της κοιλότητας η οποία είναι ένα τριδιάστατο κουτί. Δηλαδή εδώ μας ενδιαφέρει η ποσότητα

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{d(\# \text{ κανονικών τρόπων})}{d(\text{συχνότητα})}$$

$$[g(\nu)] = \frac{1}{\text{Hz}}$$

Η απόδειξη γίνεται παρακάτω για περιοδικές συνοριακές συνθήκες και για την ορθογώνια κοιλότητα της προηγούμενης ενότητας 1.12.

1.13.1 1η περίπτωση: Περιοδικές Συνοριακές Συνθήκες.

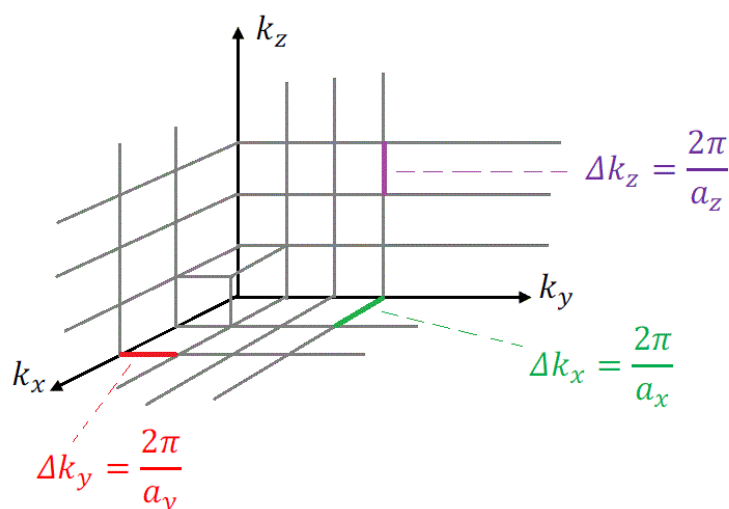
Ας υποθέσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο υπακούει σε περιοδικές συνοριακές συνθήκες δηλαδή ότι

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \\ \vec{E}(0, t) &= \vec{E}_0 e^{i(-\omega t + \phi)} \\ \vec{E}((a_x, 0, 0), t) &= \vec{E}_0 e^{i(k_x a_x - \omega t + \phi)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{ik_x a_x} = 1 \Leftrightarrow k_x a_x = 2\pi n_x, \quad n_x \in \mathbb{Z}$$

Δηλαδή

$$\left. \begin{aligned} k_x &= \frac{2\pi n_x}{a_x}, \quad n_x \in \mathbb{Z} \\ \text{ενώ ομοίως } k_y &= \frac{2\pi n_y}{a_y}, \quad n_y \in \mathbb{Z} \\ k_z &= \frac{2\pi n_z}{a_z}, \quad n_z \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

Όπως φαίνεται από την Εξ. 1.73, οι δυνατές τιμές του k είναι διακριτές. Το βήμα που ορίζει την διακριτότητα στον k -χώρο είναι στον άξονα x το $\Delta k_x = \frac{2\pi}{a_x}$, στον άξονα y το $\Delta k_y = \frac{2\pi}{a_y}$, και στον άξονα z το $\Delta k_z = \frac{2\pi}{a_z}$. Ας ζωγραφίσουμε αυτά τα σημεία στον k -χώρο, στο Σχήμα 1.18. Προσοχή, στο Σχήμα 1.18 φαίνεται μόνο το ένα ογδοημόριο του k -χώρου αλλά το k καλύπτει και τα 8 ογδοημόρια, δηλαδή όλο τον k -χώρο. Από την Εξ. 1.73 προκύπτει ότι ο στοιχειώδης k -όγκος είναι $\frac{8\pi^3}{V}$,



Σχήμα 1.18: Οι δυνατές τιμές του k είναι διακριτές και ο στοιχειώδης k -όγκος είναι $\frac{8\pi^3}{V}$, όπου V ο όγκος της κοιλότητας (Εξ.1.73). Σε κάθε μία από τις 8 κορυφές του στοιχειώδους αυτού όγκου υπάρχει μία k -κατάσταση η οποία όμως του ανήκει κατά το $1/8$ μια και υπάρχουν 8 όμοιοι τέτοιοι στοιχειώδεις όγκοι.

όπου V ο όγκος της κοιλότητας. Σε κάθε μία από τις 8 κορυφές του στοιχειώδους αυτού όγκου υπάρχει μία k -κατάσταση η οποία όμως του ανήκει κατά το $1/8$ μια και υπάρχουν 8 όμοιοι τέτοιοι στοιχειώδεις όγκοι. Ας θεωρήσουμε και το στοιχειώδη όγκο από k έως $k + dk$ δηλαδή το σφαιρικό φλοιό ακτίνας k και πάχους dk που είναι $4\pi k^2 dk$ και ας ονομάσουμε dN_k τον αριθμό των k -καταστάσεων στο σφαιρικό αυτό φλοιό. Οπότε

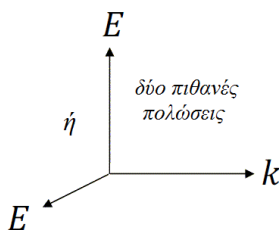
$$\left. \begin{array}{l} \text{σε } k\text{-χώρο } \frac{(2\pi)^3}{a_x a_y a_z} = \frac{8\pi^3}{V} \\ \text{σε } k\text{-χώρο } k \rightarrow k + dk \text{ δηλαδή } 4\pi k^2 dk \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \exists 8 \frac{1}{8} = 1 \text{ } k\text{-κατάσταση} \\ \exists dN_k \text{ } k\text{-καταστάσεις} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} dN_k &= \frac{4\pi k^2 dk V}{8\pi^3} = \frac{1}{2\pi^2} k^2 dk V \\ c = \lambda\nu &= \frac{2\pi}{k}\nu \Rightarrow k = \frac{2\pi}{c}\nu \Rightarrow dk = \frac{2\pi}{c}d\nu \end{aligned} \right\} \Rightarrow dN_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \frac{4\pi^2 \nu^2 2\pi d\nu V}{c^2 c} = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

Υπάρχουν όμως 2 πιθανές πολώσεις του ηλεκτρικού πεδίου κάθετα στο \vec{k} άρα ο αριθμός των καταστάσεων $dN = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$, οπότε

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi \nu^2 V}{c^3},$$

που είναι η αποδεικτέα Εξ. 1.72.



Σχήμα 1.19: Υπάρχουν 2 πιθανές πολώσεις του ηλεκτρικού πεδίου κάθετα στο \vec{k} .

1.13.2 2η περίπτωση: Σε ορθογώνια κοιλότητα.

Από την Εξ. 1.59, αν θεωρήσουμε ότι για λόγους συμμετρίας θα πρέπει το ηλεκτρικό πεδίο να δείχνει προς την ίδια μεριά της άνω και της κάτω επιφανείας δηλαδή $E_x(x=0) = -E_x(x=a_x)$, συνεπάγεται ότι $1 = -\cos(k_x a_x) \Rightarrow \cos(k_x a_x) = -1 \Rightarrow k_x = \frac{(2m_x+1)\pi}{a_x}$, $m_x \in \mathbb{Z}$. Οπότε το βήμα που ορίζει την διακριτότητα στον k -χώρο είναι στον άξονα x το $\Delta k_x = \frac{2\pi}{a_x}$. Ομοίως και για τους άξονες y και z , οπότε ο στοιχειώδης k -όγκος είναι $\frac{8\pi^3}{V}$, όπου V ο όγκος της κοιλότητας. Οπότε, ομοίως με την προηγούμενη υποενότητα 1.13.1 προκύπτει η αποδεικτέα Εξ. 1.72.

1.14 Απόδειξη του κλασικού νόμου Rayleigh-Jeans από το θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας και το $g(\nu) = dN/d\nu$. “Υπεριώδης καταστροφή”.

Όπως φαίνεται αμέσως παρακάτω, το $\rho(\nu, T)$ είναι πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα συχνότητας, ενώ το $\frac{g(\nu)}{V}$ είναι πυκνότητα κανονικών τρόπων ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα συχνότητας. Οπότε, αν έχουμε το $\frac{g(\nu)}{V}$, για να βρούμε το $\rho(\nu, T)$ θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με τη μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου \bar{E} .

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3} \Rightarrow & [g(\nu)] &= \frac{1}{\text{Hz}} = \text{s} \\ \frac{g(\nu)}{V} &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} & \left[\frac{g(\nu)}{V}\right] &= \frac{1}{\text{Hz m}^3} = \frac{\text{s}}{\text{m}^3} \\ \rho(\nu, T) &= \bar{E} \frac{g(\nu)}{V} & [\rho(\nu, T)] &= \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας (equipartition theorem) της κλασικής θεωρίας, σε θερμική ισορροπία αποδίδουμε μέση ενέργεια $\overline{E(T)} = \frac{1}{2}k_B T$ σε κάθε βαθμό ελευθερίας του δομικού λίθου του συστήματος. Οπότε π.χ. σε σύστημα N δομικών λίθων όπου ο καθένας έχει M βαθμούς ελευθερίας η ενέργεια είναι $\frac{NM}{2}k_B T$. Η μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου

$$\overline{E(T)} = (\text{αριθμός βαθμών ελευθερίας}) \times \frac{1}{2}k_B T. \quad (1.74)$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \text{σε } 3\Delta \text{ ιδανικό αέριο} & & \bar{E}_{\text{KIN}} &= \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow \bar{E} = \frac{3}{2}k_B T \\ \text{σε } 1\Delta \text{ ιδανικό αέριο} & & \bar{E}_{\text{KIN}} &= \frac{1}{2}k_B T \Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{2}k_B T \\ \text{σε } 1\Delta \text{ απλό αρμονικό ταλαντωτή (AAT)} & & \bar{E}_{\Delta\text{TN}} = \bar{E}_{\text{KIN}} &= \frac{1}{2}k_B T \Rightarrow \bar{E} = k_B T \end{aligned}$$

όπου $\bar{E}_{\DeltaΥΝ}$ ($\bar{E}_{ΚΙΝ}$) είναι η μέση δυναμική (κινητική) ενέργεια. Συνεπώς, θεωρώντας ότι έχουμε συλλογή ΑΑΤ με $\bar{E} = k_B T$ προκύπτει

$$\boxed{\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T} \quad \text{νόμος Rayleigh-Jeans} \quad (1.75)$$

Επομένως, για $\nu \rightarrow \infty \Rightarrow \rho(\nu, T) \rightarrow \infty$ πράγμα που ονομάστηκε “υπεριώδης καταστροφή” διότι ο απειρισμός αντιβαίνει εις τα πειραματικά δεδομένα (έχουμε δηλαδή “καταστροφική” ασυμφωνία με το πείραμα στις υψηλές συχνότητες και αυτό πρωτοπαρατηρήθηκε στην υπεριώδη περιοχή. Το θέμα αυτό θίχτηκε στην ενότητα 1.4.

1.15 Απόδειξη του νόμου Planck.

Θα ακολουθήσουμε εδώ τις υποθέσεις που αναγκάστηκε να κάνει ο Planck το 1900 προκειμένου να αποδείξει τη σχέση που είναι σήμερα γνωστή ως “νόμος του Planck” [43] και η οποία συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα για την ακτινοβολία μέλανος σώματος. Το πρόβλημα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος είχε τεθεί τουλάχιστον ήδη από το 1859 από τον Kirchhoff. Ο Planck ασχολήθηκε με το πρόβλημα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος ήδη από το 1894. Από το 1896 είχε διατυπωθεί ο νόμος του Wien που απλώς περιγράφει τα πειραματικά δεδομένα σε υψηλές συχνότητες. Επίσης, ο νόμος Rayleigh-Jeans ο οποίος προκύπτει από την κλασική φυσική μπορεί να περιγράψει την ακτινοβολία μέλανος σώματος μόνο σε πολύ χαμηλές συχνότητες. Έλειπε λοιπόν μια συνεπής θεωρητική εξήγηση η οποία να ισχύει σε όλες τις συχνότητες.

Μετά από αρκετές αποτυχημένες προσπάθειες πρότεινε το 1900 μια απόδειξη στην οποία χρησιμοποίησε την **στατιστική κατανομή Boltzmann** και ακόμα υπέθεσε ότι η ΗΜ ενέργεια μπορεί να είναι **μόνο διακριτό** (“**κβαντισμένο**”) **πολλαπλάσιο της ποσότητας $h\nu$** , όπου h είναι αυτό που λέμε σήμερα σταθερά Planck και ν η συχνότητα της ακτινοβολίας. Για τις υποθέσεις αυτές δεν ήταν και πολύ χαρούμενος, αλλά του τις επέβαλε η ανάγκη να εξηγηθούν τα πειραματικά δεδομένα. Λίγο αργότερα, το 1905, ο Einstein [44] εξήγησε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο υποθέτωντας ότι υπάρχουν αυτά τα κβάντα φωτός ενώ η λέξη “**φωτόνιο**” πρωτογράφηκε μόλις το 1926 από τον Gilbert Newton Lewis [45].

Ο Planck αναγκάστηκε ουσιαστικά να εισαγάγει την έννοια του **resonator** (“**αντηχείο**” ή “**ταλαντωτής**”) που έχει διακεκριμένες (δηλαδή όχι συνεχείς αλλά εξαρτώμενες από έναν φυσικό αριθμό n , με άλλα λόγια “**κβαντισμένες**”) επιτρεπόμενες τιμές ενεργειας E_n για δεδομένη συχνότητα ν και κατόπιν να υποθέσει ότι η ενέργεια που αντιστοιχεί σε δεδομένη συχνότητα ν και θερμοκρασία T είναι στην πραγματικότητα μια μέση τιμή $\overline{E}(\nu, T)$ των ενεργειών ενός μεγάλου αριθμού ταυτοσήμων resonators (“**αντηχείων**” ή “**ταλαντωτών**” που ο καθένας βρίσκεται σε διαφορετική στάθμη E_n , ενώ η πιθανότητα καταλήψεως της στάθμης p_n δίνεται από τη στατιστική Boltzmann).

Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι η ΗΜ ενέργεια ενός resonator συχνότητας ν εντός της κοιλότητας μέλανος σώματος μπορεί να πάρει μόνο διακεκριμένες τιμές (είναι δηλαδή “**κβαντισμένη**”) και μάλιστα ότι έχει τη μορφή

$$E_n = h\nu n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.76)$$

Να σημειωθεί ότι κλασικά, σύμφωνα με το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας, σε

θερμική ισορροπία αποδίδουμε μέση ενέργεια $\overline{E(T)} = \frac{1}{2}k_B T$ σε κάθε βαθμό ελευθερίας του δομικού λίθου του συστήματος. Οπότε π.χ. σε σύστημα N δομικών λίθων όπου ο καθένας έχει M βαθμούς ελευθερίας η ενέργεια είναι $\frac{NM}{2}k_B T$. Αντιθέτως, εδώ θα υποθέσουμε ότι η μέση τιμή της ενέργειας κανονικού τρόπου εξαρτάται από τη θερμοκρασία αλλά και από τη συχνότητα

$$\overline{E(\nu, T)} = \sum_n E_n p_n \quad (1.77)$$

όπου ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να βρίσκεται ο δομικός λίθος στην ενέργεια E_n είναι p_n και αυτή δίνεται από τη στατιστική κατανομή Boltzmann, δηλαδή

$$p_n = \frac{e^{-\frac{E_n}{k_B T}}}{Z}, \quad (1.78)$$

$$Z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}}. \quad (1.79)$$

Z είναι η λεγόμενη συνάρτηση επιμερισμού (partition function). Ας ορίσουμε

$$x := \frac{h\nu}{k_B T}. \quad (1.80)$$

Από τις Εξ. 1.76, 1.77, 1.78, 3.56, 1.80 συνεπάγεται

$$\overline{E(\nu, T)} = \sum_n n x k_B T \frac{e^{-nx}}{Z} = \frac{k_B T x}{Z} \underbrace{\sum_n n e^{-nx}}_{\mathcal{A}}, \quad (1.81)$$

$$Z = \sum_n e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (1.82)$$

διότι πρόκειται για άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου $a_n = e^{-nx}$ με αρχικό όρο $a_0 = e^{-0x} = 1$ και λόγο¹ $\lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-x} < 1$. Ας προσπαθήσουμε τώρα να εκφράσουμε και το \mathcal{A} συναρτήσει του x . Από την Εξ. 1.82 προκύπτει

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = - \sum_n n e^{-nx} = - \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \Rightarrow \quad (1.83)$$

¹Χρησιμοποιήσαμε εδώ το αρχαϊκό γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου σάμπι (σαν-πι από το σχήμα του πλαγίου π).

$$\mathcal{A} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}. \quad (1.84)$$

Συνεπώς, από τις Εξ. 1.81, 1.82, 1.84 προκύπτει

$$\overline{E(\nu, T)} = k_B T x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = k_B T x \frac{1}{e^x - 1}. \quad (1.85)$$

Κι αν θυμηθούμε πως ορίστηκε το x (Εξ. 1.80), καταλήγουμε

$$\overline{E(\nu, T)} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (1.86)$$

Κατ' αναλογία με ό,τι κάναμε στην Ενότητα 1.14

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3} \Rightarrow & [g(\nu)] &= \frac{1}{\text{Hz}} = \text{s} \\ \frac{g(\nu)}{V} &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} & \left[\frac{g(\nu)}{V}\right] &= \frac{1}{\text{Hz m}^3} = \frac{\text{s}}{\text{m}^3} \\ \rho(\nu, T) &= \overline{E(\nu, T)} \frac{g(\nu)}{V} & [\rho(\nu, T)] &= \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

όπου τώρα το $\overline{E(\nu, T)}$ εξαρτάται κι από τη συχνότητα ν και μάλιστα δίνεται από την Εξ. 1.86, άρα

$$\rho(\nu, T) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \Rightarrow \quad (1.87)$$

η πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα συχνότητας ΗΜ ακτινοβολίας μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία $\rho(\nu, T)$ (μονάδες $\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}}$) είναι

$$\boxed{\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}} \quad (1.88)$$

που είναι ο νόμος του Planck (Εξ. 1.9).

1.16 Απόδειξη νόμου μετατοπίσεως Wien.

Για το νόμο του Planck στη μορφή $\rho(\nu, T)$ που αποδείχθηκε προηγουμένως, θα βρούμε τη – συναρτήση της θερμοκρασίας – συχνότητα $\nu_0(T)$ όπου έχουμε μέγιστο της $\rho(\nu, T)$ (Εξ. 1.90). Ας θυμηθούμε τη μορφή του νόμου μετά την αλλαγή μεταβλητής (Εξ. 1.10) δηλαδή θέτοντας

$$x = \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{k_B T}{h} x \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx.$$

Τότε προκύπτει η Εξ. 1.13

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1}$$

όπου κατά την Εξ. 1.14

$$\rho_0 = \frac{8\pi}{h^2} \left(\frac{k_B T}{c} \right)^3$$

με μονάδες

$$[\rho_0] = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}}.$$

Εννοείται ότι στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως με προτασιακό τύπο $\rho(x)$ δεν ανήκει το $x = 0$ δηλαδή δεν μιλάμε για μηδενική συχνότητα ή άπειρη θερμοκρασία.

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = \rho_0 x^2 \frac{3(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (1.89)$$

Αν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει να μηδενίζεται η παράγωγος $\frac{d\rho}{dx}$, οπότε (αφού $x \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dx} = 0 &\Rightarrow & 3(e^x - 1) - x e^x &= 0 \Rightarrow \\ & & (\text{αφού } x \neq 0) & \quad x_0 \sim 3 \end{aligned}$$

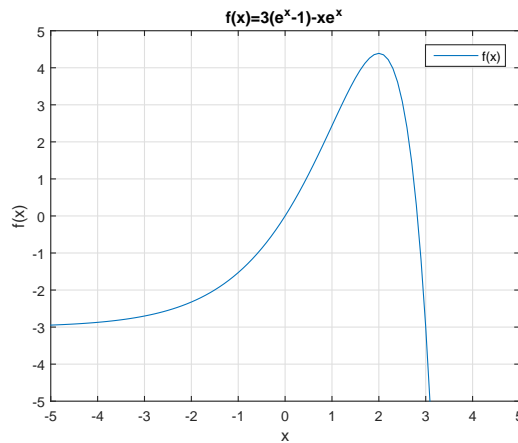
ακριβέστερα με γραφική λύση προκύπτει $x_0 \approx 2.821439$

x_0 συμβολίζουμε τη ζητούμενη ρίζα και ν_0 την αντίστοιχη συχνότητα δηλαδή $x_0 = \frac{h\nu_0}{k_B T}$. Η γραφική λύση απεικονίζεται στο Σχήμα 1.20. Φτιάχτηκε με matlab. Ο κώδικας παρατίθεται στο Παράρτημα Γ' (fornu0ofT.m, createfigurefornu0ofT.m). Άλλη επιλογή θα μπορούσε να είναι κάποια διαδικτυακή τοποθεσία ελεύθερης σχεδιάσεως ή κάποιο άλλο σχεδιαστικό λογισμικό. Επομένως

$$\nu_0 = \frac{k_B T x_0}{h} \approx \frac{k_B T 2.821439}{h} \approx (58.789 \text{ GHz/K}) T \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\nu_0}{T} \approx 58.789 \text{ GHz/K}} \quad (1.90)$$

Η Εξ. 1.90 δείχνει πως μετατοπίζεται η συχνότητα όπου έχουμε μέγιστο της $\rho(\nu, T)$ συναρτήσεως της θερμοκρασίας T είναι δηλαδή ένας “νόμος μετατοπίσεως” μόνο που αναφέρεται σε συχνότητα και όχι σε μήκος κύματος όπως ο “νόμος μετατοπίσεως του Wien” που αποδεικνύουμε παρακάτω δηλαδή η Εξ. 1.101.



Σχήμα 1.20: Η γραφική λύση της εξισώσεως $3(e^x - 1) - xe^x = 0$. Η μία ρίζα είναι $x_0 = 0$ (η οποία όμως δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\rho(x)$) και η άλλη $x_0 \approx 2.821439$. Η γραφική παράσταση φτιάχτηκε με *matlab*. Ο κώδικας παρατίθεται στο Παράρτημα Γ' (*formu0ofT.m*, *createfigureformu0ofT.m*).

Στη συνέχεια, θα εξαγάγουμε το νόμο του Planck συναρτήσεως του μήκους κύματος λ δηλαδή στη μορφή $\rho(\lambda, T)$, και θα βρούμε το – συναρτήσεως της θερμοκρασίας – μήκος κύματος $\lambda_0(T)$ όπου έχουμε μέγιστο της $\rho(\lambda, T)$ (Εξ. 1.101).

Η εξαγωγή του νόμου του Planck συναρτήσεως του μήκους κύματος λ δηλαδή στη μορφή $\rho(\lambda, T)$ γίνεται μέσω της απαιτήσεως

$$\int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda := \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu \Rightarrow \quad (1.91)$$

$$\int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu \quad (1.92)$$

Όμως

$$c = \lambda\nu \Leftrightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \quad (1.93)$$

Οπότε

$$\int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda = -8\pi hc \int_\infty^0 \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda = 8\pi hc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)} \Rightarrow \quad (1.94)$$

ο νόμος του Planck συναρτήσεως του μήκους κύματος και της θερμοκρασίας είναι

$$\boxed{\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)}} \quad (1.95)$$

Ορίζοντας

$$\psi = \frac{hc}{\lambda k_B T} \quad (1.96)$$

και

$$\rho'_0 = 8\pi \frac{(k_B T)^5}{(hc)^4} \quad (1.97)$$

η Εξ. 1.95 γράφεται

$$\rho(\psi) = \rho'_0 \frac{\psi^5}{e^\psi - 1}. \quad (1.98)$$

Οι μονάδες του ρ'_0 είναι $[\rho'_0] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{m}}$. Άρα και οι μονάδες του $\rho(\lambda, T)$ είναι $[\rho(\lambda, T)] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{m}}$ **διαφορετικές από τις μονάδες του $\rho(\nu, T)$** που είναι $[\rho(\nu, T)] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}}$. Με άλλα λόγια, παρόλο που χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο (ρ), δεν πρόκειται για το ίδιο ακριβώς φυσικό μέγεθος. Φυσικά, στην Εξ. 1.98 το ψ δεν μπορεί να είναι μηδέν, δηλαδή το μήκος κύματος και η θερμοκρασία δεν μπορούν να απειριστούν. Με άλλα λόγια στο πεδίο ορισμού της $\rho(\psi)$ δεν ανήκει το μηδέν.

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \rho'_0 \frac{5\psi^4(e^\psi - 1) - \psi^5 e^\psi}{(e^\psi - 1)^2} = \rho'_0 \psi^4 \frac{5(e^\psi - 1) - \psi e^\psi}{(e^\psi - 1)^2} \quad (1.99)$$

Αν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει να μηδενίζεται η παράγωγος $\frac{d\rho}{d\psi}$, οπότε (αφού $\psi \neq 0$)

$$\frac{d\rho}{d\psi} = 0 \Rightarrow \quad 5(e^\psi - 1) - \psi e^\psi = 0 \Rightarrow$$

$$(\text{αφού } \psi \neq 0) \quad \psi_0 \sim 5$$

ακριβέστερα με γραφική λύση προκύπτει $\psi_0 \approx 4.965114$

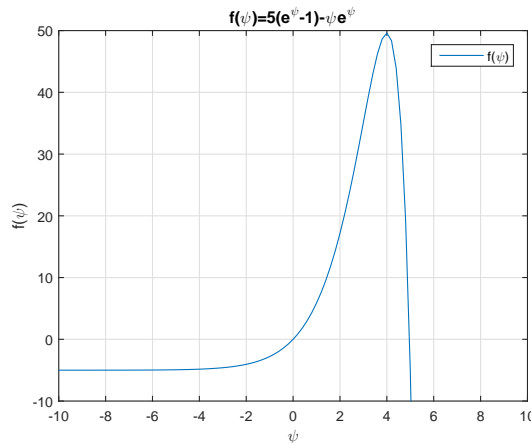
ψ_0 συμβολίζουμε τη ζητούμενη ρίζα και λ_0 το αντίστοιχο μήκος κύματος δηλαδή $\psi_0 = \frac{hc}{\lambda_0 k_B T}$. Η γραφική λύση απεικονίζεται στο Σχήμα 1.21. Φτιάχτηκε με matlab. Ο κώδικας (forlambda0ofT.m, createfigureforlambda0ofT.m) παρατίθεται εις

το Παράρτημα Γ'. Άλλη επιλογή θα μπορούσε να είναι κάποια διαδικτυακή τοποθεσία ελεύθερης σχεδίασεως ή κάποιο άλλο σχεδιαστικό λογισμικό. Επομένως

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\psi_0 k_B T} \approx \frac{hc}{4.965114 k_B T} \Rightarrow \quad (1.100)$$

$$\boxed{\lambda_0 T \approx 2.897772 \times 10^{-3} \text{ m K}} \quad (1.101)$$

Η Εξ. 1.101 δείχνει πως μετατοπίζεται το μήκος κύματος όπου έχουμε μέγιστο της $\rho(\lambda, T)$ συναρτήσει της θερμοκρασίας T είναι δηλαδή ένας “νόμος μετατοπίσεως”, ο λεγόμενος “νόμος μετατοπίσεως του Wien”. Αυτή είναι η “σύγχρονη μορφή” του νόμου μετατοπίσεως του Wien (Wien displacement law). Ο νόμος παρήχθη από



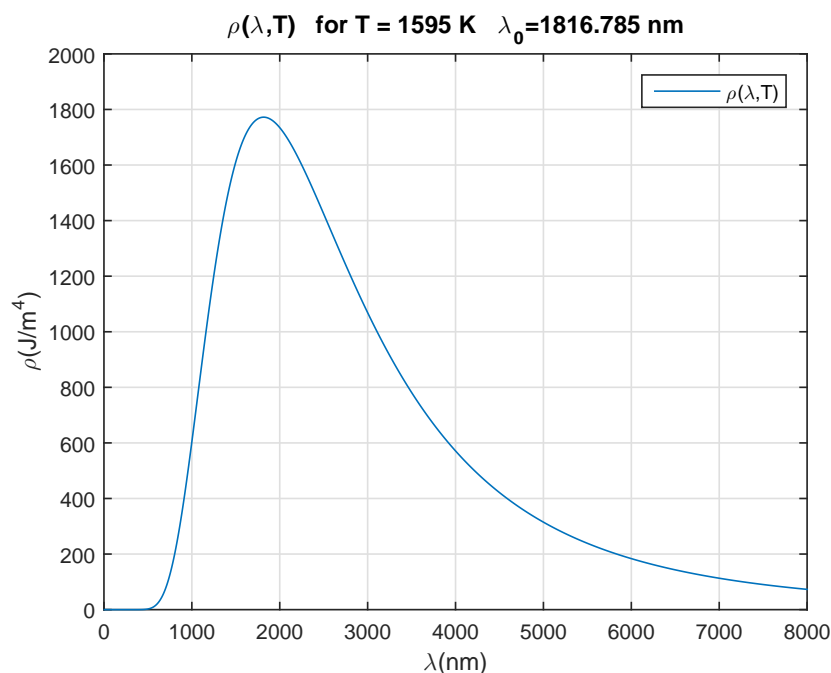
Σχήμα 1.21: Η γραφική λύση της εξίσωσης $5(e^\psi - 1) - \psi e^\psi = 0$. Η μία ρίζα είναι $\psi_0 = 0$ (η οποία όμως δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\rho(\psi)$) και η άλλη $\psi_0 \approx 4.965114$. Η γραφική παράσταση φτιάχτηκε με `matlab`. Ο κώδικας (`forlambdaofT.m`, `createfigureforlambdaofT.m`) παρατίθεται στο Παράρτημα Γ'.

τον Wilhelm Wien το 1893 με τη διατύπωση ότι η ακτινοβολία μέλανος σώματος για διαφορετικές θερμοκρασίες του κορυφώνεται σε μήκος κύματος αντιστρόφως ανάλογο της απόλυτου θερμοκρασίας του, ήτοι:

$$\lambda_0 T = \text{σταθερά} \quad (1.102)$$

Παρόλο που αυτό μπορεί να αποδειχθεί από το νόμο του Planck όπως είδαμε παραπάνω καταλήγοντας στην Εξ. 1.101, η συμπεριφορά αυτή ανακαλύφθηκε από τον Wilhelm Wien μερικά χρόνια πριν ο Max Planck αποδείξει το νόμο του (Εξ. 1.13

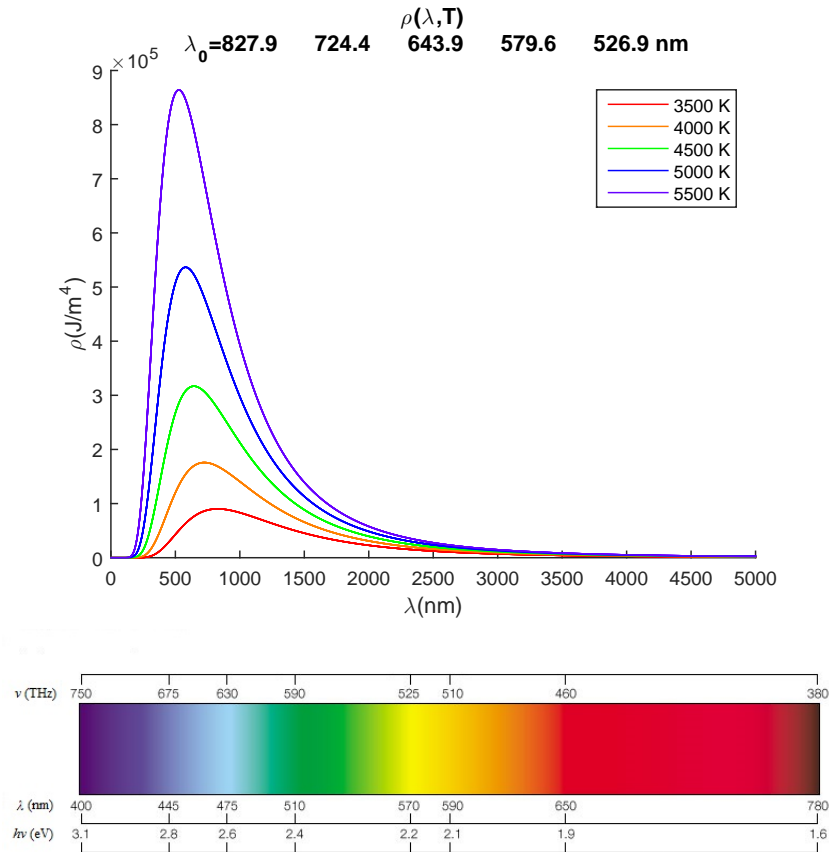
ή Εξ. 1.95). Ο νόμος του Planck στη μορφή $\rho(\lambda, T)$ για $T = 1595$ K αλλά και το λ_0 του νόμου μετατοπίσεως του Wien φαίνονται στο Σχήμα 1.22. Ο κώδικας παρατίθεται στο Παράρτημα Γ'. Εκλέξαμε αυτή τη θερμοκρασία αναφερόμενοι στην Εικόνα 2 του ιστορικού άρθρου του William Weber Coblentz [46], η οποία περιέχει πειραματικά δεδομένα και σύγκριση με το νόμο του Planck σε αυτή τη θερμοκρασία.



Σχήμα 1.22: Ο νόμος του Planck στη μορφή $\rho(\lambda, T)$ για $T = 1595$ K αλλά και το λ_0 του νόμου μετατοπίσεως του Wien. Η θερμοκρασία εκλέχτηκε ως αναφορά στο ιστορικό άρθρο του William Weber Coblentz [46].

Ο νόμος του Planck $\rho(\lambda, T)$ για κάποιες θερμοκρασίες μέλανος σώματος φαίνεται στο Σχήμα 1.23. Παρατηρούμε τη μετατόπιση του φάσματος προς μικρότερα μήκη κύματος, καθώς αυξάνεται η απόλυτη θερμοκρασία του μέλανος σώματος T πράγμα που εκφράζει ο νόμος μετατοπίσεως του Wien. Για τις θερμοκρασίες αυτές σημειώνονται και τα λ_0 όπου έχουμε κάθε φορά μέγιστο της $\rho(\lambda, T)$. Επιπλέον, φαίνεται και το ορατό ΗΜ φάσμα που θα χρειαστεί σε κάποιες ασκήσεις με σώματα που εκπέμπουν ΗΜ ακτινοβολία, όπου υποθέτουμε ότι αυτά μπορούν να προσεγγιστούν με μέλανα σώμα κάποιας “ ενεργού θερμοκρασίας”. Ενεργός θερμοκρασία (effective temperature) ενός σώματος είναι η θερμοκρασία ενός μέλανος

σώματος το οποίο θα εξέπεμπε το ίδιο συνολικό ποσό ΗΜ ακτινοβολίας. Όμως, δεν εξυπακούεται ότι η κατανομή αυτής της ακτινοβολίας συναρτήσει του μήκους κύματος ή της συχνότητας θα ακολουθεί το νόμο του Planck. Η [Ανω Εικόνα] του Σχήματος 1.23 φτιάχτηκε με matlab. Ο κώδικας παρατίθεται στο Παράρτημα Γ' (WienDisplacementANDPlanckofLambdaMultipleT.m).



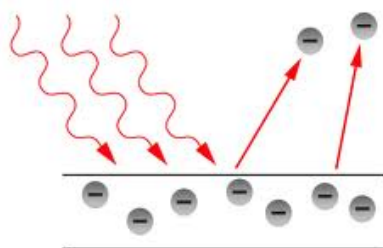
Σχήμα 1.23: [Ανω Εικόνα] Ο νόμος του Planck $\rho(\lambda, T)$ για κάποιες θερμοκρασίες μέλανος σώματος. Παρατηρούμε τη μετατόπιση του φάσματος προς μικρότερα μήκη κύματος, καθώς αυξάνεται η απόλυτη θερμοκρασία του μέλανος σώματος T πράγμα που εκφράζει ο νόμος μετατοπίσεως του Wien. Σημειώνονται και τα λ_0 όπου έχουμε κάθε φορά μέγιστο της $\rho(\lambda, T)$. [Κάτω Εικόνα] Το ΗΜ ορατό φάσμα.

1.17 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, ΦΗΦ (photoelectric effect) είναι η εκπομπή ηλεκτρονίων από κάποιο υλικό λόγω της απορροφήσεως ενέργειας την οποία μεταφέρει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, συνήθως στην περιοχή του ορατού ή του υπεριώδους. Τα εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια λέγονται και φωτοηλεκτρόνια. Παρατηρήθηκε από τον Heinrich Hertz [47] το 1887, ο οποίος έδειξε μάλιστα ότι δημιουργούνται ευκολότερα ηλεκτρικοί σπινθήρες όταν τα ηλεκτρόδια φωτιστούν με υπεριώδες φως. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο απαιτεί φωτόνια με ενέργειες της τάξεως περίπου του 1 eV έως 1 MeV σε στοιχεία υψηλού ατομικού αριθμού. Η μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου οδήγησε σε αποδοχή της κβαντικής φύσεως του φωτός και του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού (wave-particle duality). Το 1905, ο Albert Einstein εξήγησε το ΦΗΦ υποθέτοντας ότι το φως αποτελείται από διακριτά κομμάτια (quanta) αντί για συνεχή κύματα [44]. Τα διακριτά αυτά κομμάτια ονομάζονται τώρα φωτόνια (photons), ένας όρος που αποδίδεται στον Gilbert Newton Lewis και χρησιμοποιήθηκε πολύ αργότερα [45].

Ο Einstein βασίστηκε στη θεωρία του Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος και θεώρησε ότι η ενέργεια κάθε φωτονίου E είναι ανάλογη της συχνότητάς του ν , με σταθερά αναλογίας αυτήν που ονομάστηκε μετέπειτα σταθερά του Planck, h , δηλαδή ότι $E = h\nu$. Έτσι, εξήγησε το ΦΗΦ: ένα φωτόνιο με συχνότητα μεγαλύτερη κάποιας συχνότητας κατωφλίου (threshold frequency) διαθέτει την απαιτούμενη ενέργεια για να εκβάλει ένα ηλεκτρόνιο από το υλικό. Για την εξήγηση του ΦΗΦ που οδήγησε στη κβαντική επανάσταση της φυσικής ο Einstein τιμήθηκε με το βραβείο Nobel Φυσικής το 1921. Πρότεινε λοιπόν ότι υπό ορισμένες συνθήκες το φως ισοδυναμεί με με ροή σωματιδίων (κομμάτια φωτός, κβάντα φωτός, που σήμερα ονομάζουμε φωτόνια). Ανακάλυψε αυτό το αποτέλεσμα αναλύοντας τη θερμοδυναμική της ΗΜ ακτινοβολίας μέλανος σώματος στη περιοχή Wien. Μεταξύ των συνεπειών της πρότασής του αυτής ήταν και η εξήγηδη διαφόρων αιγιματικών χαρακτηριστικών του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Όταν λοιπόν ορατή ή υπεριώδης ΗΜ ακτινοβολία προσπέσει σε μια μεταλλική επιφάνεια, εκτινάσσονται ηλεκτρόνια εφ' όσον όμως η συχνότητα της ΗΜ ακτινοβολίας είναι αρκετά υψηλή. Για παράδειγμα, όταν μονοχρωματικό φως προσπέσει στην κάθοδο ενός σωλήνα εκκενώσεως, δημιουργείται ρεύμα μεταξύ καθόδου και ανόδου, λόγω της μετατοπίσεως των εκτινασσόμενων από την κάθοδο ηλεκτρονίων προς την άνοδο. Στη διάταξη του Σχήματος 1.25 η διαφορά δυναμικού μεταξύ ανόδου και καθόδου μπορεί να γίνει θετική ή αρνητική. Όταν είναι θετική τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται οπότε το ρεύμα αυξάνεται, ενώ όταν είναι αρνητική επιβραδύνονται και το ρεύμα μειώ-



Σχήμα 1.24: Σχηματικά το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.

νεται. Σε κάποια ικανά αρνητική διαφορά δυναμικού V_0 , το ρεύμα μηδενίζεται. Η V_0 ονομάζεται και διαφορά δυναμικού ή τάση κατωφλίου.

Μία από τις ανιγματικές πλευρές του ΦΗΦ ήταν ότι ανεξαρτήτως της εντάσεως της προσπίπτουσας μονοχρωματικής ακτινοβολίας η τάση κατωφλίου είναι πάντοτε η ίδια. Η ύπαρξη μια διαφοράς δυναμικού η οποία καταφέρει να σταματά το ηλεκτρικό ρεύμα υποδηλώνει ότι υπάρχει μια μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορούν να αποκτήσουν τα εκτινασσόμενα από την κάθοδο ηλεκτρόνια. Η τάση κατωφλίου V_0 επί το στοιχειώδες φορτίο e είναι ίση με τη μέγιστη αυτή κινητική ενέργεια. Δηλαδή

$$\frac{m_e u^2}{2} \Big|_{max} = eV_0 \quad (1.103)$$

Με άλλα λόγια, η κινητική ενέργεια που αποκτούν τα ηλεκτρόνια καθώς εκτινάσσονται από την επιφάνεια του μετάλλου έχει μια μέγιστη τιμή η οποία είναι πάντοτε η ίδια ανεξάρτητως της εντάσεως της μονοχρωματικής ΗΜ ακτινοβολίας. Κάθε μέταλλο έχει ένα έργο εξαγωγής W_0 που σημαίνει ότι ένα ηλεκτρόνια που βρίσκεται εντός του μετάλλου πρέπει να πάρει τουλάχιστον ενέργεια W_0 για να ελευθερωθεί. Αν πάρει ακριβώς W_0 τότε “βγαίνει” με μηδενική ταχύτητα ενώ αν πάρει ενέργεια $E > W_0$ χρησιμοποιεί το επιπλέον ποσό ως κινητική ενέργεια. Δηλαδή

$$E = W_0 + \frac{m_e u^2}{2} \quad (1.104)$$

Ο Εйнштейν [44] λοιπόν υπέθεσε ότι το φως αποτελείται από “κομμάτια”, “σωμάτια”, “κβάντα” που το κάθε ένα κουβαλάει ενέργεια $h\nu$, οπότε ν υποθέσουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο απορροφά την ενέργεια ενός φωτονίου, η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γραφτεί

$$h\nu = W_0 + \frac{m_e u^2}{2} \quad (1.105)$$

Οπότε, εφαρμόζοντας την προηγούμενη σχέση για τη μέγιστη κινητική ενέργεια, θα έχουμε

$$h\nu = W_0 + eV_0 \quad (1.106)$$

Άρα

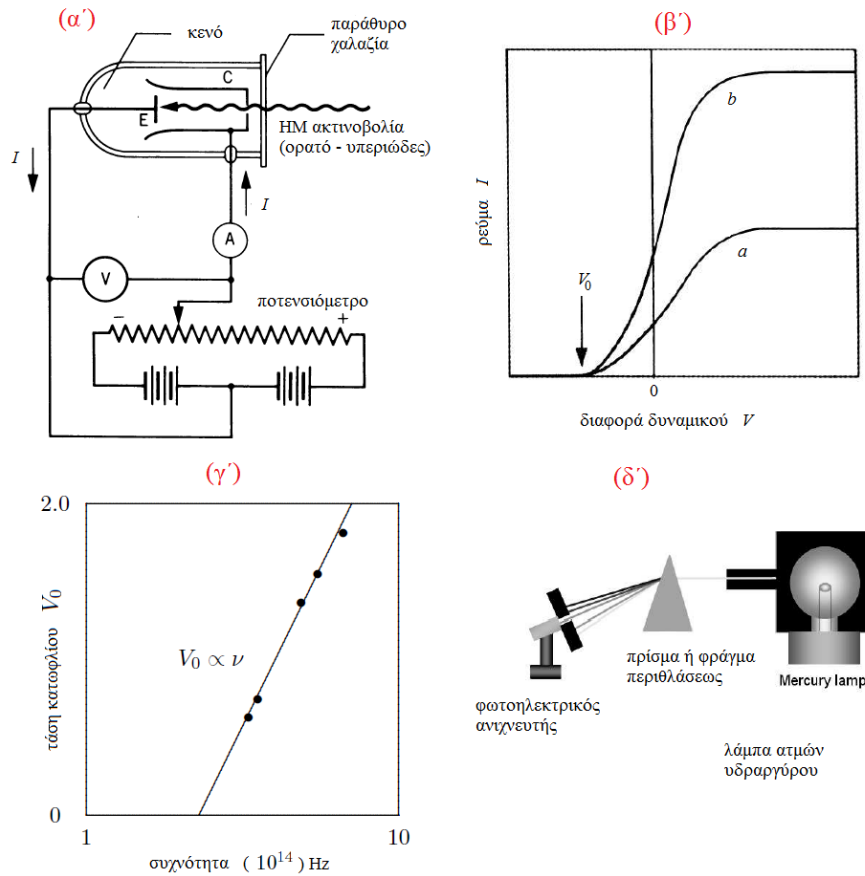
$$V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_0}{e} \quad (1.107)$$

Συνεπώς, αν ζωγραφίσουμε την τάση κατωφλίου V_0 συναρτήσει της συχνότητας ν θα πάρουμε μια ευθεία (Σχήμα 1.25(δ')). Κατά τον Einstein, αύξηση της εντάσεως της μονοχρωματικής ΗΜ ακτινοβολίας σημαίνει αύξηση του αριθμού των ηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια $\frac{m_e a^2}{2}$ αλλά όχι την κινητική αυτή ενέργεια. Στο Σχήμα 1.25(γ') παρουσιάζεται η διάταξη που χρησιμοποιείται για την επίδειξη της συχνοτικής εξαρτήσεως στο ΦΗΦ. Πηγή φωτός είναι μια λάμπα ατμών υδραργύρου που εκπέμπει σε 5 ισχυρές γραμμές από το κίτρινο έως το υπεριώδες όπως φαίνεται στο Πίνακα

Πίνακας 1.6: Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο με πηγή μια λάμπα ατμών υδραργύρου.

Γραμμή Εκπομπής	Συχνότητα ν ($\times 10^{14}$ Hz)	Τάση κατωφλίου V_0 (V)
υπεριώδης 2	8.22	1.807
υπεριώδης 1	7.41	1.546
γαλανή	6.88	1.359
πράσινη	5.49	0.738
κίτρινη	5.19	0.624

Η διάταξη εξασφαλίζει το διαχωρισμό των γραμμών εκπομπής και ένα φωτοηλεκτρικός ανιχνευτής μετρά τις ενέργειες των εκτινασόμενων ηλεκτρονίων. Ο Πίνακας 1.6 δείχνει τα αποτελέσματα ενός τυπικού πειράματος τα οποία ζωγραφίζονται στο Σχήμα 1.25(δ'). Σύμφωνα με την Εξ. 1.107 κλίση της ευθείας είναι $\frac{h}{e}$. Σύμφωνα λοιπόν με τις προαναφερθείσες μετρήσεις έχουμε $\frac{h}{e} = 0.408 \times 10^{-14}$ Js/C, ενώ ο λόγος αυτός ισούται με $\frac{h}{e} = 0.414 \times 10^{-14}$ Js/C. Οι προβλέψεις της θεωρίας του Einstein επιβεβαιώθηκαν αργότερα με σημαντικότερο σταθμό τα πειράματα του Robert Millikan [48, 49]. Το δεύτερο [49] είναι πολύ πιο αναλυτικό.



Σχήμα 1.25: (α') Η διάταξη που χρειάζεται για τη μελέτη των ενεργειών των ηλεκτρονίων που εκπεμπονται κατά το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο (ΦΗΦ). (β') Η μορφή της χαρακτηριστικής καμπύλης ρεύματος τάσεως $I(V)$ για δύο διαφορετικές εντάσεις προσπίπτουσας ΗΜ ακτινοβολίας. Στην περίπτωση b η ένταση της ΗΜ ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από την περίπτωση a . Παρατηρούμε ότι υπάρχει κάποια τιμή της τάσεως V_0 για την οποία το ρεύμα I μηδενίζεται και στις δύο περιπτώσεις, δηλαδή η V_0 είναι ανεξάρτητη της εντάσεως της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. (γ') Η διάταξη που χρησιμοποιείται για την επίδειξη της συχνοτικής εξαρτήσεως στο ΦΗΦ. (δ') Η σχέση $V_0(\nu)$