

# Ασκήσεις

➤ <u>Ταχύτητα Ολίσθησης</u>	➤ <u>Ηλεκτρικό Πεδίο σε Ομοαξονικό Αγωγό.</u>
➤ <u>Αγωγιμότητα Θ. Νερού</u>	➤ <u>Ημιαγωγός.</u>
➤ <u>Αγωγιμότητα Λυχνία Κενού.</u>	➤ <u>Πυκνότητα Ρεύματος σε Μπαταρία.</u>
➤ <u>Ηλεκτρικό Πεδίο σε Αγωγό.</u>	

# Ταχύτητα ολίσθησης σε σύρμα από χαλκό.

Διάμετρος  $\delta=1,6$  mm

Ρεύμα 10 A

Πυκνότητα  $d=8,9$  gr/cm<sup>3</sup>

1 mol Cu 64 g

1 e/άτομο

•Υπολογίζω αριθμό ηλεκτρονίων /cm<sup>3</sup> n

$$n = \frac{8,9 \text{ gr} / \text{cm}^3 \times 6,0 \times 10^{23} / \text{mol}}{64 \text{ g} / \text{mol}} =$$

$$= 8,4 \times 10^{22} \text{ e} / \text{cm}^3$$

- Υπολογίζω την πυκνότητα ρεύματος  $J$

$$I = \frac{q}{\Delta t} = \frac{nAle}{l/v_d} = nAev_d$$

$$J = \frac{I}{A} = nev_d$$

$$J = \frac{10}{3,45 \cdot (0,8)^2} = 5 \text{ A/mm}^2$$

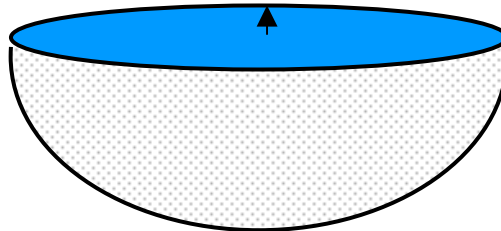
- Ταχύτητα Ολίσθησης

$$j = nev_d \Rightarrow v_d = \frac{j}{ne}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_d = 0,37 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}}}$$

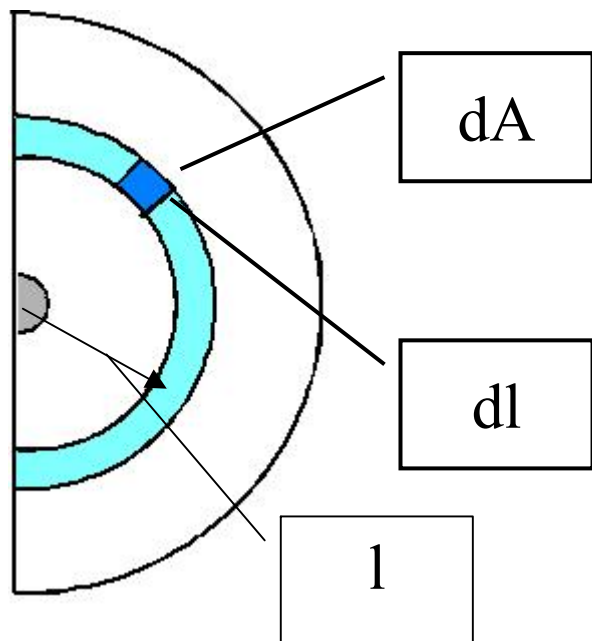
# Αγωγιμότητα θαλασσινού νερού

- Ημισφαιρική μεταλλική λεκάνη, ακτίνα  $b=2\text{m}$
- Θαλασσινό νερό ειδική αγωγιμότητα  $\sigma=4\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$
- Σφαίρα μεταλλική ακτίνα  $a=30\text{cm}$
- Υπολογίστε την αντίσταση μεταξύ Σφαίρας - Λεκάνης



• Υπολογίζω την αγωγιμότητα ενός φλοιού.

• Αθροίζω τις αντιστάσεις όλων των φλοιών.



$$dV = dA \cdot dl$$

$$G = \sigma \frac{dA}{dl}$$

$$G_{\phi\lambda} = \sum G_i = \sigma \frac{A}{dl} = \sigma \frac{2\pi l^2}{dl}$$

$$\Rightarrow R_{\phi\lambda} = \frac{dl}{2\pi\sigma l^2}$$

$$R_{o\lambda} = \sum R_i$$

$$\Rightarrow R_{o\lambda} = \int dR = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_a^b \frac{dl}{l^2} = \frac{1}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$R_{o\lambda} = \frac{1}{6,28 \times 4} \left( \frac{1}{0,3} - \frac{1}{2} \right) = 0,113 \Omega$$

$$R_{o\lambda} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0,133 \Omega$$

# Εφαρμογή για Μεταφορά Ηλεκτρικής Ισχύος.

Συνεχές Ρεύμα

Τάση 400 kV

Επιστροφή μέσα από θαλασσινό νερό.

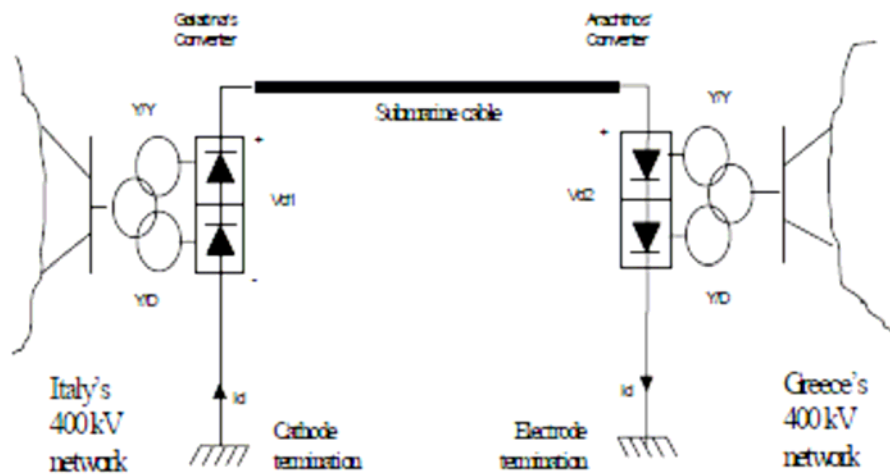


Fig.2 - Synthetic scheme of the GRITA HVDC link.

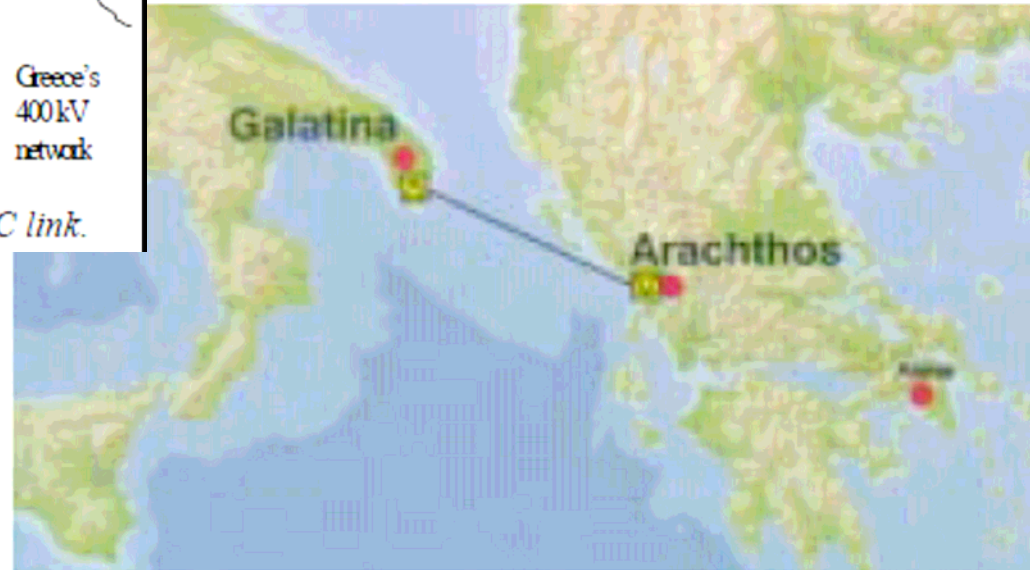
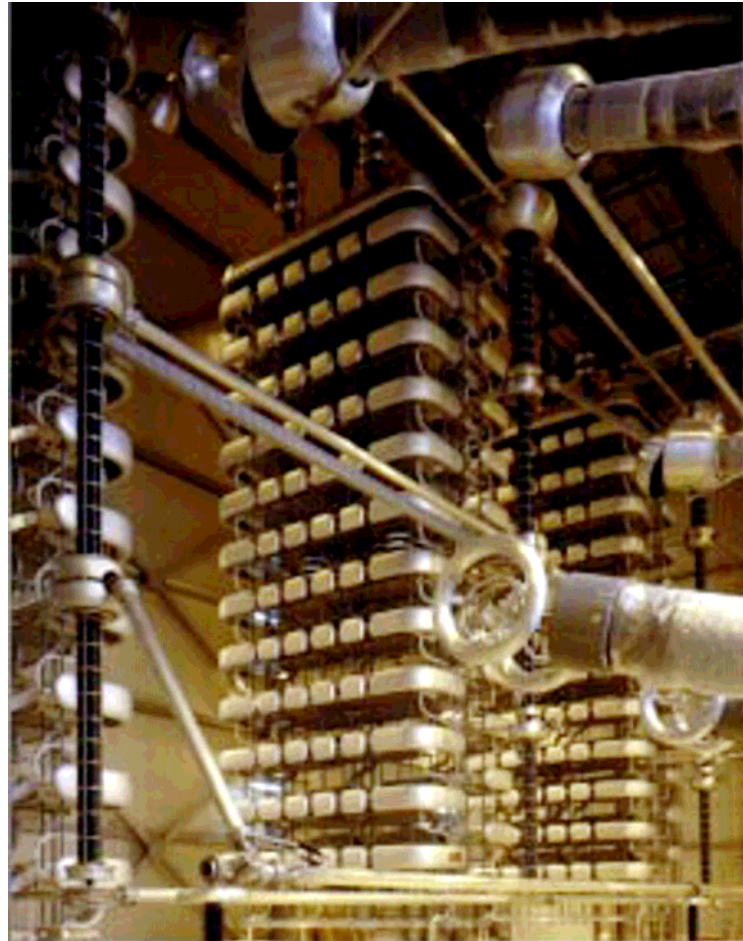


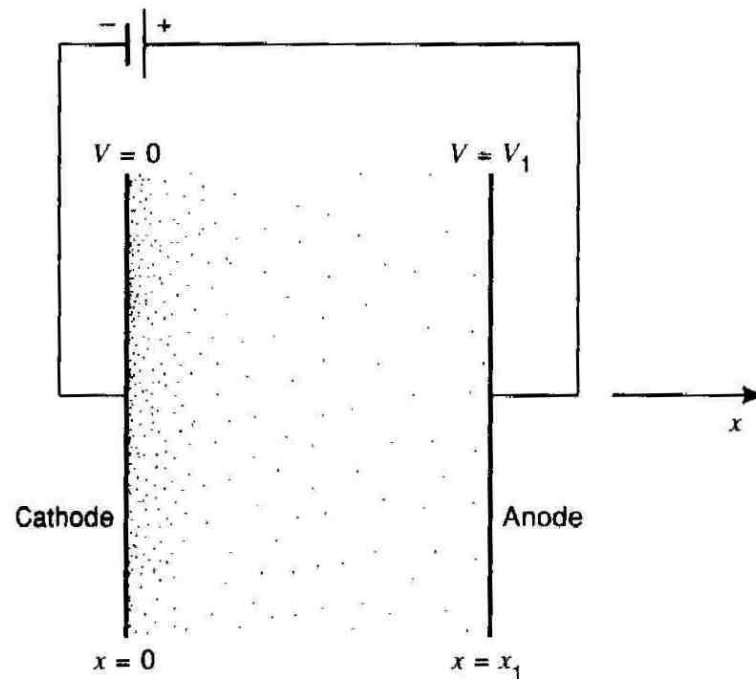
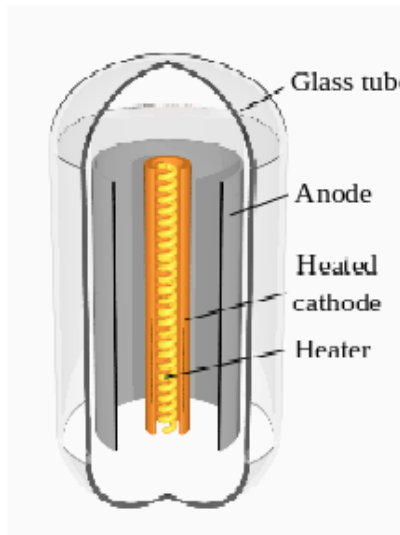
Fig.1 - Italy-Greece 400kVdc interconnection.

# Θυρίστορ



# Τάση, Πεδίο, Ρεύμα, σε Πυκνωτή με Φορτία.

## Λυχνία Κενού



(a)

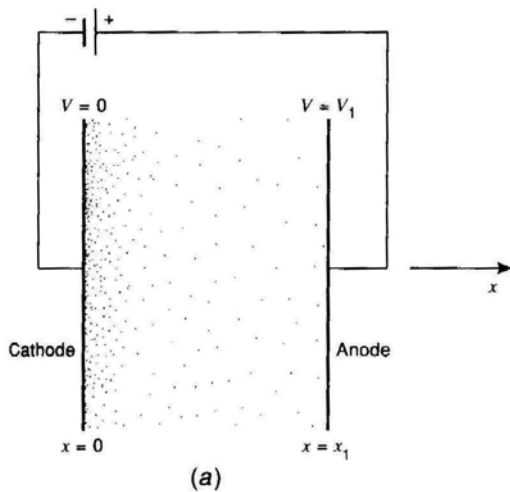




# Αρχή Λειτουργίας.

- Η Κάθοδος θερμαίνεται.
- Τα Ηλεκτρόνια της Καθόδου, αποκτούν Κινητική Ενέργεια και βγαίνουν από την Κάθοδο.
- Η Άνοδος έλκει και επιταχύνει τα ηλεκτρόνια.
- Το Δυναμικό μεταξύ των πλακών επηρεάζεται από την ροή των Ηλεκτρονίων.

# Επίπεδος Πυκνωτής.

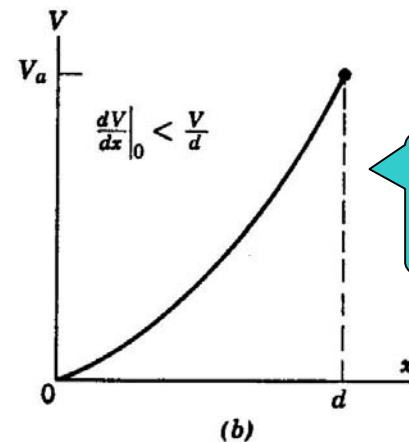
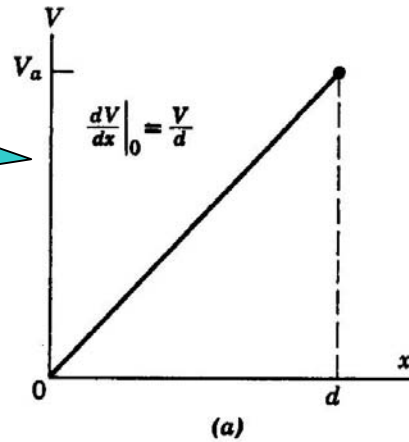


- Ο πυκνωτής βρίσκεται στο κενό.
- Η κάθοδος θερμαίνεται.
- Από την κάθοδο εκπέμπονται ηλεκτρόνια. (Θερμιονική Εκπομπή)
- Αν το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, τα ηλεκτρόνια συγκρατούνται από το θετικό ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσεται στην επιφάνεια της καθόδου.
- Υπό την επίδραση του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου τα ηλεκτρόνια κινούνται προς την άνοδο.

# Καμπύλες Δυναμικού για διαφορετικές εκπομπές ηλεκτρονίων.

- Εξετάζουμε την περίπτωση c

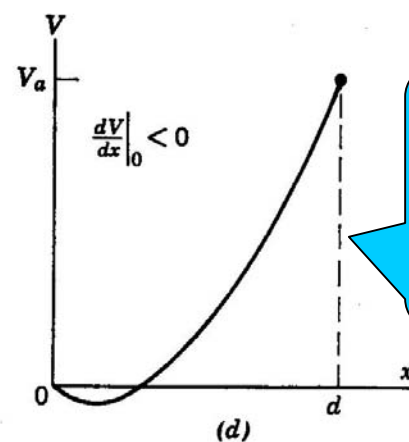
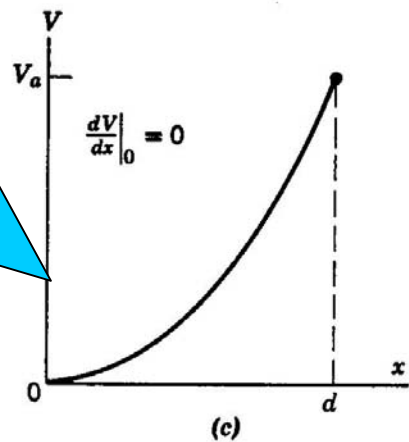
Τάση όταν δεν υπάρχουν φορτία.



Το ρεύμα ορίζεται από τη θερμοκρασία



Το ρεύμα περιορίζεται από τα φορτία χώρου. Τα ηλ. εξέρχονται με ταχύτητα σχεδόν μηδενική λόγω της άπωσης των φορτίων χώρου.



Το ρεύμα περιορίζεται από τα φορτία χώρου. Τα φορτία χώρου δημιουργούν Ηλ. πεδίο αντίθετης φοράς

**Fig. 6.2.** Potential variations between the cathode and anode of a planar diode. (a) No electron emission. (b) Temperature-limited condition. (c) Space-charge-limited condition with zero field at cathode. (d) Space-charge-limited condition for finite initial velocity.

# Υποθέσεις

- Η πυκνότητα ρεύματος είναι σταθερή κατά μήκος της διαδρομής.
- Η αρχική ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι μηδέν, λόγω της άπωσης των φορτίων χώρου.
- Η Ένταση του Ηλ. Πεδίου στη θέση  $x=0$  είναι μηδέν.

# Λύση.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{εξίσωση Poisson}$$

## Συνοριακές Συνθήκες

$$(1) \quad x = 0 \quad V = 0$$

$$(2) \quad x = x_1 \quad V = V_1$$

$$(3) \quad x = 0 \quad E = -\frac{dV}{dx} = 0$$

# Εξίσωση Poisson

$$\mathbf{K=U} \quad \frac{1}{2}mv^2 = eV \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

$$J = -\rho v \quad (\text{A m}^{-2}) \quad \text{Πυκνότητα ρεύματος } J, \text{ σταθερή}$$

$$\rho = -J \sqrt{\frac{m}{2eV}}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eV}}$$

Εξίσωση Poisson

# Λύση Εξίσωσης Poisson

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eV}}$$

Πολλαπλασιάζουμε δεξιά  
αριστερά με :  $2 \frac{dV}{dx}$

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{4J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{mV}{2e}} + C_1$$

$$0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

Τετραγωνική ρίζα, χώρισμα  
μεταβλητών, ολοκλήρωση.

$$\frac{4}{3} V^{3/4} = 2 \sqrt{\frac{J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}} x + C_2$$

# Απόδειξη

$$k = \frac{J}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$$

$$2 \frac{dV}{dx} \frac{d^2V}{dx^2} = 2k \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{dV}{dx} =$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 = 4k \frac{d(V^{\frac{1}{2}})}{dx}$$

$$\left( \frac{dV}{dx} \right)^2 = 4kV^{\frac{1}{2}} + C_1$$

$$x = 0, \quad V = 0, \quad \frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$



# Απόδειξη

$$\frac{dV}{dx} = 2\sqrt{k}V^{1/4} \Rightarrow \frac{dV}{V^{1/4}} = 2\sqrt{k}dx$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}V^{3/4} = 2\sqrt{k}x + C_2 \quad C_2 = 0$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{3}{2}\sqrt{k}x\right)^{4/3}$$

$$V = \left(\frac{9}{4} \frac{J^2}{\varepsilon_0^2} \sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{2/3} x^{4/3}$$

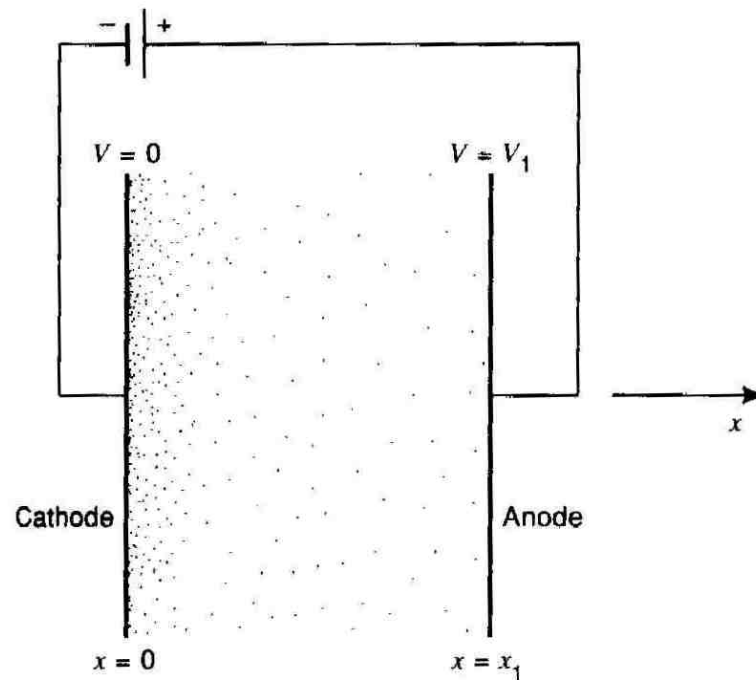
$$\mathbf{x = x_1} \quad \mathbf{V = V_1}$$

$$V = \left(\frac{9}{4} \frac{J^2}{\varepsilon_0^2} \sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{2/3} x_1^{4/3}$$

$$V = V_1 \left(\frac{x}{x_1}\right)^{4/3}$$

# Τάση, Πεδίο, Ρεύμα, σε Πυκνωτή με Φορτία

## Λυχνία Κενού



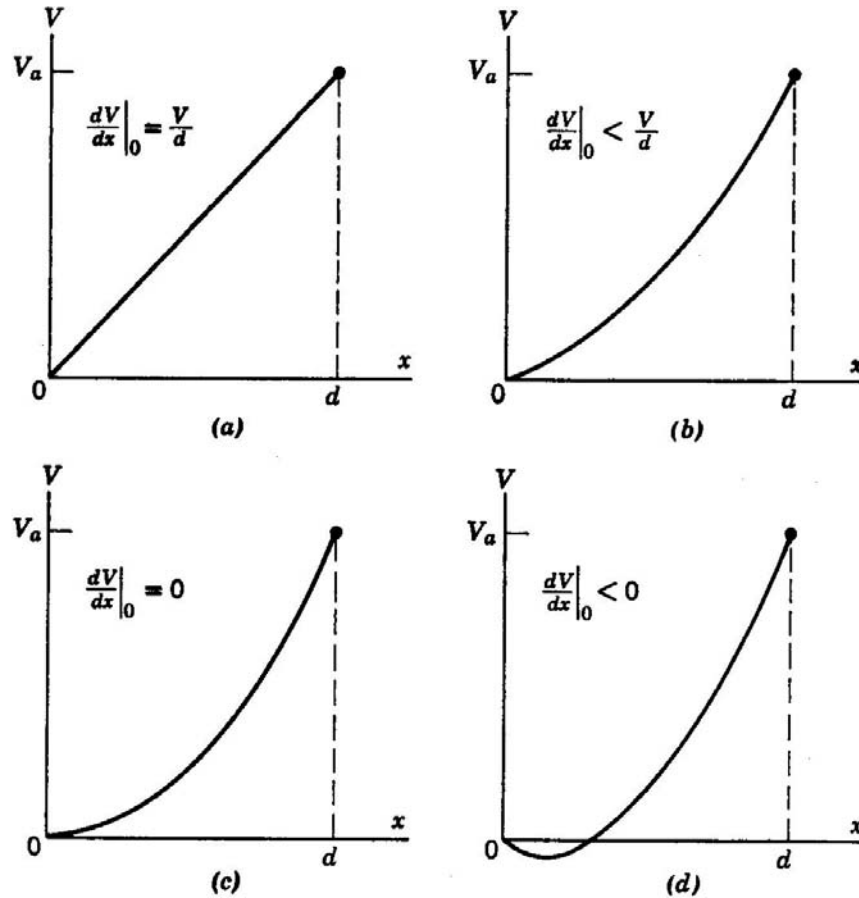
(a)

# Νόμος Child\_Lagmuire

- Η Κάθοδος θερμαίνεται.
- Τα Ηλεκτρόνια της Καθόδου αποκτούν Κινητική Ενέργεια και βγαίνουν από την Κάθοδο.
- Η Άνοδος έλκει τα ηλεκτρόνια που επιταχύνονται.

Καμπύλες Δυναμικού για διαφορετικές εκπομπές ηλεκτρονίων.

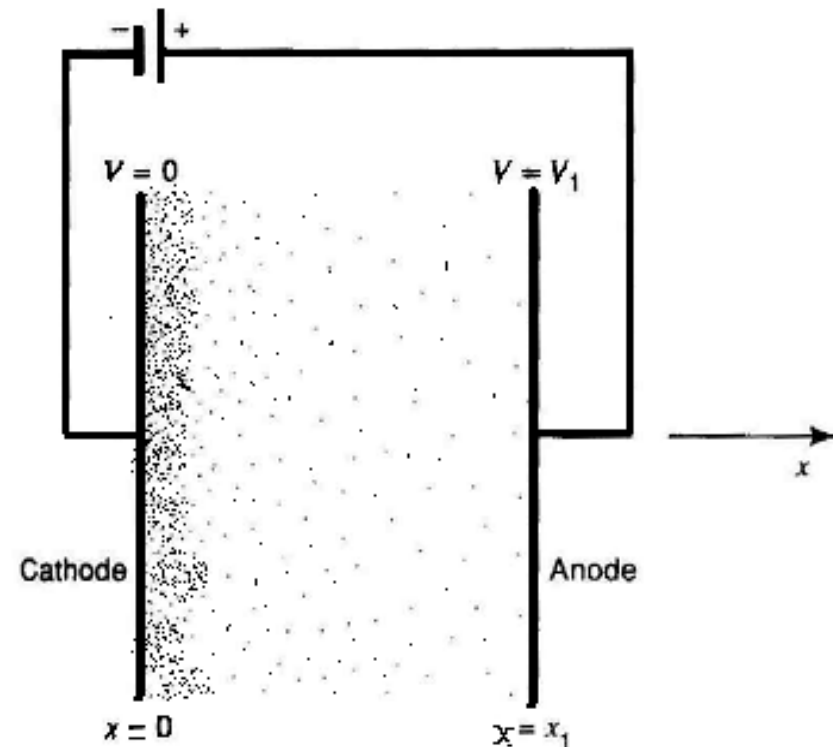
Εξετάζουμε την περίπτωση c



**Fig. 6.2.** Potential variations between the cathode and anode of a planar diode. (a) No electron emission. (b) Temperature-limited condition. (c) Space-charge-limited condition with zero field at cathode. (d) Space-charge-limited condition for finite initial velocity.

# Άλλες Προϋποθέσεις

- Συνοριακές συνθήκες:
- $x=0 \quad V=0$
- $x=0 \quad E=0$
- $x=x_A \quad V=V_A$



•Υπολογισμός Έντασης

$$V = V_A \left( \frac{x}{x_A} \right)^{\frac{4}{3}}$$

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{4}{3} V_A \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x_A^{\frac{4}{3}}}$$

## Υπολογισμός Πυκνότητας Φορτίου

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} V_A \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}_A}$$
$$\Rightarrow \rho(x) = -\frac{4}{9} \epsilon_0 V_A \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}_A}$$

## Υπολογισμός Ταχύτητας

$$J(x) = \rho \cdot v$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = eV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2e}{m} V}^{\frac{1}{2}}$$

## Υπολογισμός Πυκνότητας Ρεύματος

$$\Rightarrow J(x) = -\frac{4}{9} \varepsilon_0 V_A \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{x_A^{\frac{4}{3}}} \sqrt{\frac{2e}{m}} V_A^{\frac{1}{3}} \left( \frac{x}{x_A} \right)^{\frac{2}{3}}$$

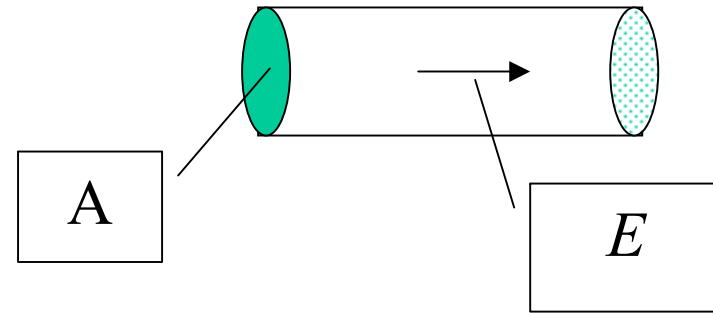
$$J(x) = -\frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} V_A^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x_A^2}$$

$$J(x) = -2,33 \cdot 10^{-6} \frac{V_A^{3/2}}{x_A^2}$$



# Ηλεκτρικό Πεδίο κατά Μήκος Χάλκινου Αγωγού

Διατομή	$A = 1 \text{ mm}^2$
Ρεύμα	$I = 10 \text{ A}$
Ειδική αντίσταση	$s = 18 \cdot 10^{-9} \Omega \text{ m}$



Από το νόμο του Ohm για ένα σημείο:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$J = \frac{10}{10^{-6}} = 10^7 \text{ A/m}^2$$

$$\sigma = \frac{1}{s} = \frac{1}{18 \cdot 10^{-9}} = 55 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{10^7}{5,5 \cdot 10^7} = 0,18 \text{ V/m}$$

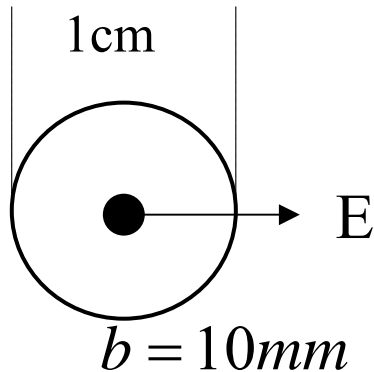
---

# **Ηλεκτρικό Πεδίο σε Ομοαξονικό Αγωγό**

**Σύγκριση με Ηλεκτροστατικό  
Πεδίο**

Ο αγωγός στο προηγούμενο πρόβλημα, αποτελεί τον κεντρικό αγωγό ομοαξονικού καλωδίου, με διάμετρο εξωτερικού αγωγού 1cm και αέρα στο διάκενο των αγωγών. Η τάση που εφαρμόζουμε στο ένα άκρο, ανάμεσα στους αγωγούς, είναι 100 V.

•Υπολογίζω τη χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους.



$$\frac{C}{L} = \frac{55,55}{\ln \frac{b}{a}} \quad pF / m$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{1}{3,14}} = 0,56 \quad mm$$

$$\ln \frac{10}{0,56} = 3,06$$

$$\Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{55,6}{3,06} = 18,2 \quad pF / m$$

•Υπολογίζω το φορτίο ανά μονάδα μήκους :

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = CV$$

$$l=1 \text{ m} \quad Q = 18,2 \cdot 100 \cdot 10^{-12} = 1,82 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

•Το ηλεκτρικό πεδίο: (από Gauss)

$$r = a \quad E 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad l = 1 \text{ m}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi a \epsilon_0} = \frac{1,82 \cdot 10^{-9}}{6,28 \cdot 0,56 \cdot 10^{-3} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} =$$
$$= \underline{\underline{58 \cdot 10^3 \text{ V / m}}}$$

# Σύγκριση

- Τα πεδία στο εσωτερικό των αγωγών που διαρρέονται από ρεύμα είναι συνήθως μικρά. Η τιμή τους εξαρτάται από την αντίσταση ανά μονάδα μήκους του υλικού.
- Τα ηλεκτροστατικά πεδία είναι ισχυρότερα κατά τάξεις μεγέθους.

# Αγωγιμότητα Ημιαγωγού

Ημιαγωγός έχει:

Πυκνότητα Ηλεκτρονίων, Οπών:  $n_h = n_e = 3,1 \cdot 10^{19} / \text{m}^3$

Κινητικότητα Ηλεκτρονίων, Οπών:  $\mu_e = 0,5 \quad \mu_h = 0,04 \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_h = \mu_e \rho_e + \mu_h \rho_h$$

$$\sigma_e = \mu_e n_e e \quad \sigma_h = \mu_h n_h e$$

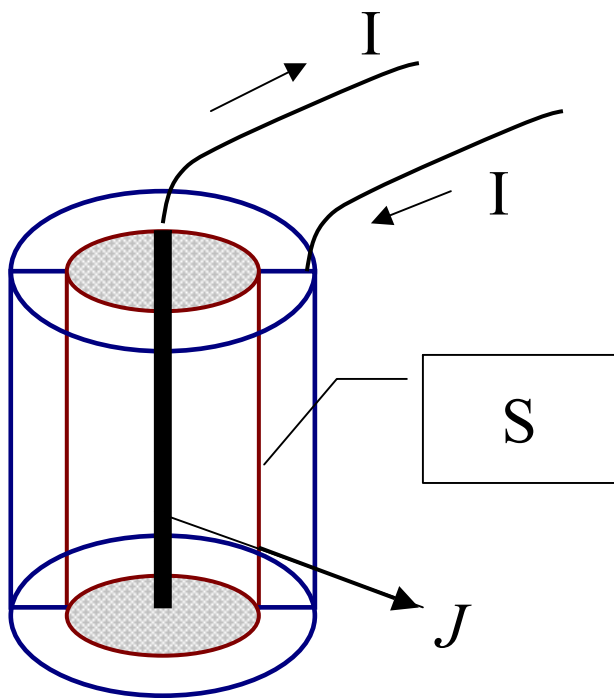
$$\sigma_e = 0,5 \cdot 3,1 \cdot 10^{19} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,48 \quad \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$$

$$\sigma_h = 0,04 \cdot 3,1 \cdot 10^{19} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 0,2 \quad \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$$

$$\sigma = 2,68 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$$

# Πυκνότητα ρεύματος

Ηλεκτρική Στήλη



- Έστω ότι το κύκλωμα λειτουργεί σε σταθερή κατάσταση.
- Θεωρώ ότι το ρεύμα που περνά από τις βάσεις είναι μικρό.

Ισχύει  $\sum I = 0$

Για την κυλινδρική επιφάνεια  $S$ :

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$$

$$J = \frac{I}{2\pi r} \quad \vec{J} = \frac{I}{2\pi r} \hat{r}$$

Το  $J$  είναι κάθετο στην επιφάνεια  $S$  (ακτινικό)