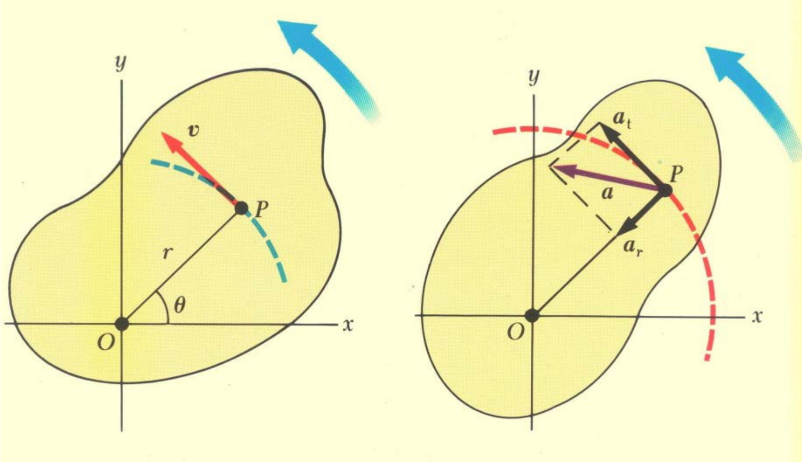
Μηχανική Άκαμπτου Σώματος

Μηχανική Άκαμπτου Σώματος

Μηχανική Άκαμπτου Σώματος

Μηχανική Άκαμπτου Σώματος

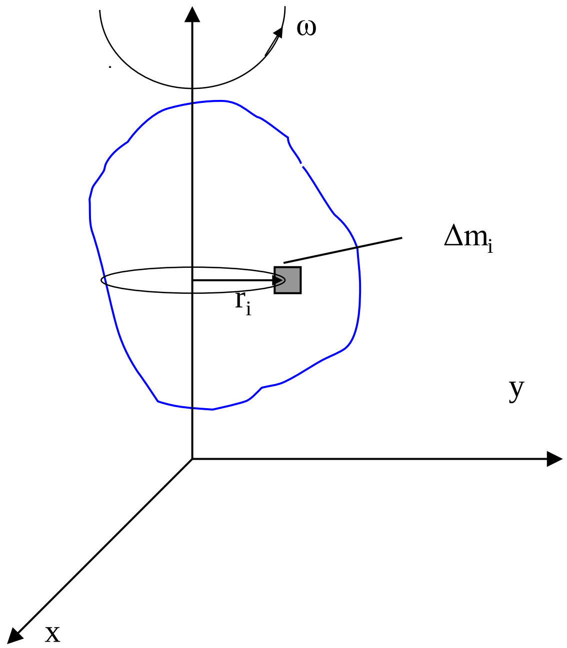
Περιστροφή Άκαμπτου Σώματος



1) 2)

1. Κάθε σημείο Περιστρέφεται με την ίδια Γωνιακή Ταχύτητα.
2. Κάθε σημείο Περιστρέφεται με την ίδια Γωνιακή Επιτάχυνση

Κινητική Ενέργεια λόγω Περιστροφής



Αν το μικρό μέρος έχει μάζα :

Δm_i

Ταχύτητα $\upsilon_i = r_i \omega$

Κινητική Ενέργεια $K_i = \frac{1}{2}\Delta m_i \upsilon_i^2$

$$K_i = \frac{1}{2}\Delta m_i (r_i \omega)^2$$

$$K = \sum K_i = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$\Delta m_i \to dm_i$$

$$\sum \Delta m_i r_i^2 \to \int dm r^2$$

$$I = \int dm\, r^2$$

Την ποσότητα Ι, ονομάζομε Ροπή Αδράνειας.

Η Κινητική Ενέργεια γίνεται :

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Αν το Σώμα είναι Ομογενές τότε :

$$I = \rho \int_V r^2\, dV$$

Ροπή Αδράνειας για διάφορα Συμμετρικά Σώματα

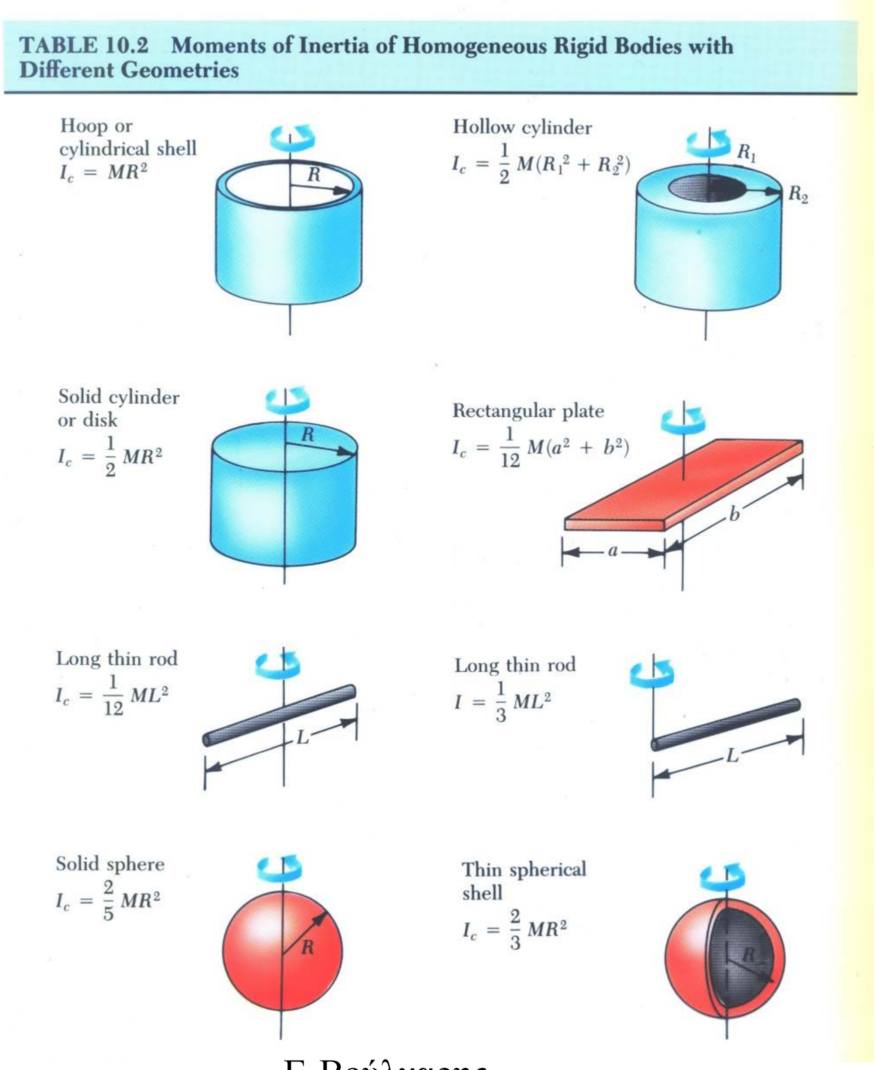


TABLE 10.2 Moments of Inertia of Homogeneous Rigid Bodies with Different Geometries

Hoop or cylindrical shell
$I_c = MR^2$

Hollow cylinder
$I_c = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$

Solid cylinder or disk
$I_c = \frac{1}{2} MR^2$

Rectangular plate
$I_c = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$

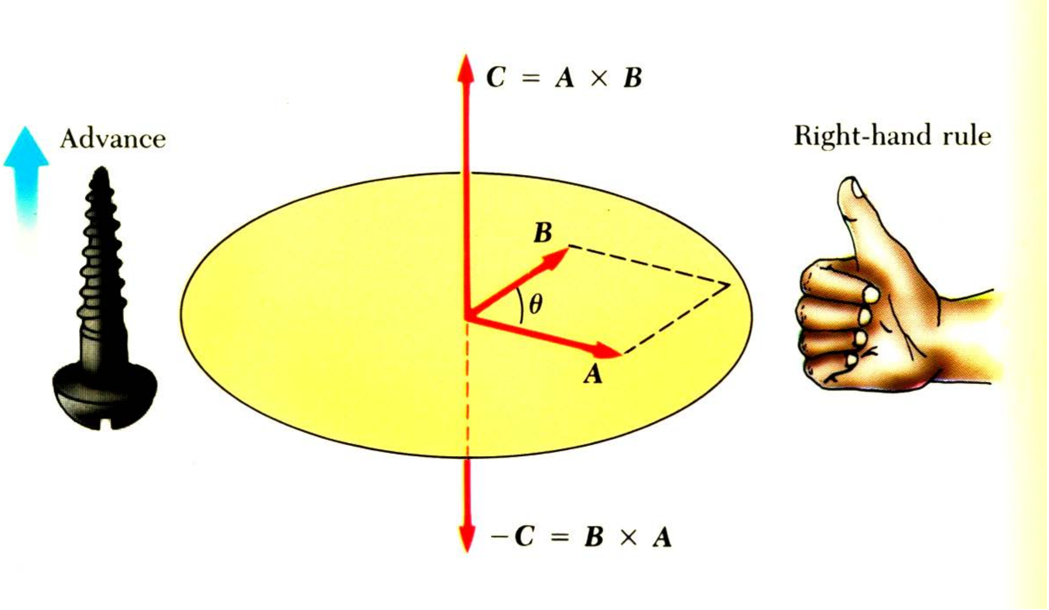
Long thin rod
$I_c = \frac{1}{12} ML^2$

Long thin rod
$I = \frac{1}{3} ML^2$

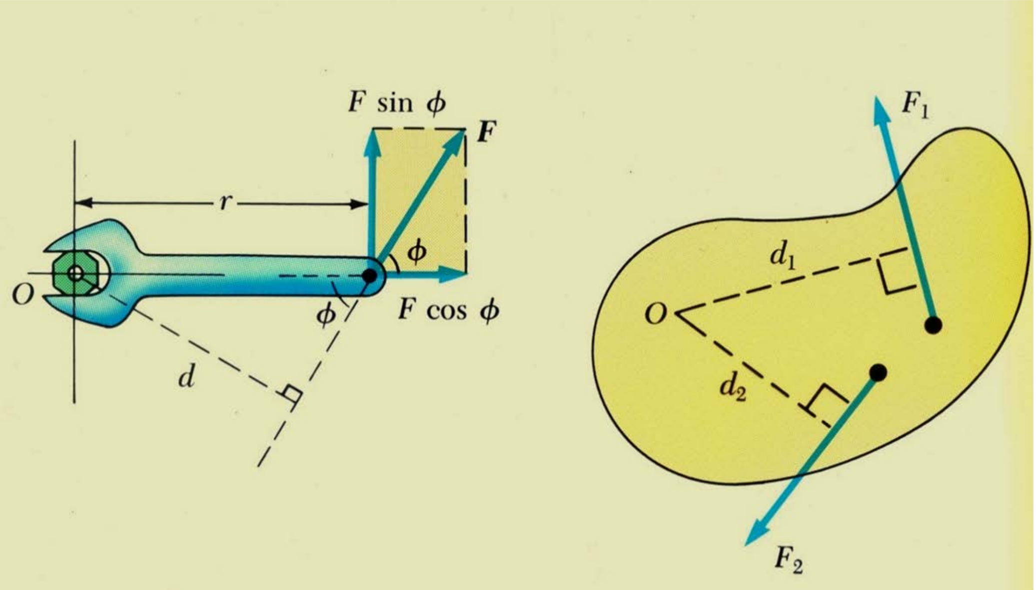
Solid sphere
$I_c = \frac{2}{5} MR^2$

Thin spherical shell
$I_c = \frac{2}{3} MR^2$

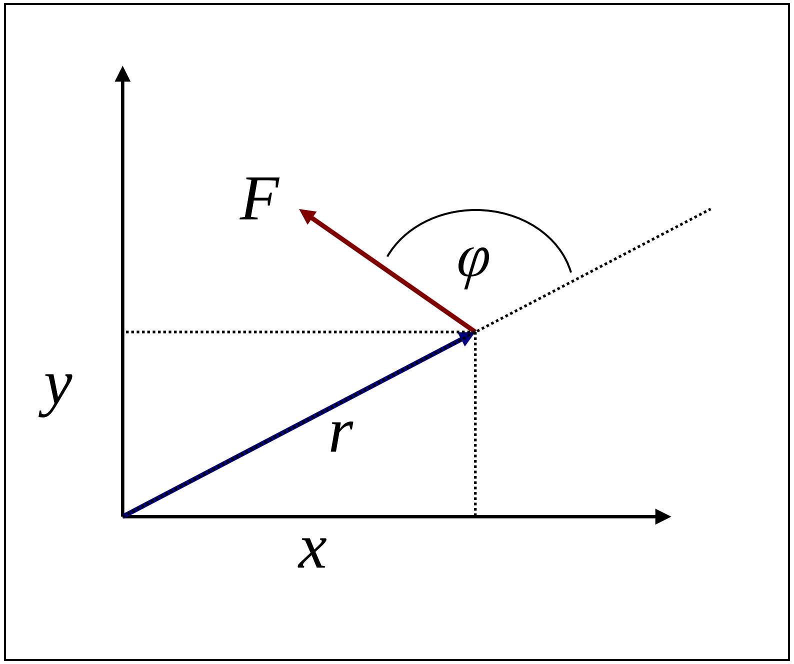
Διανυσματικό Γινόμενο.



Ροπή Δύναμης προς Άξονα



Ροπή 2 Δ

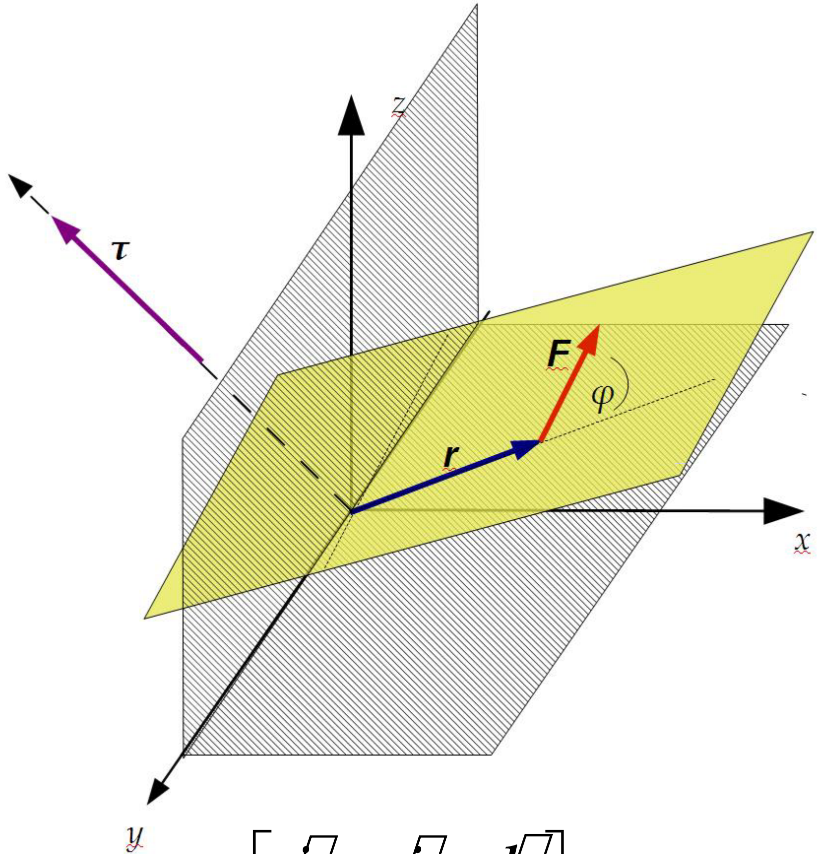


$$\tau = \begin{pmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{pmatrix} k$$

ή

$$\tau = |r||F| \sin\varphi k$$

Ροπή 3-Δ



$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{pmatrix} \vec{i} + \begin{pmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{pmatrix} \vec{j} + \begin{pmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{pmatrix} \vec{k}$$

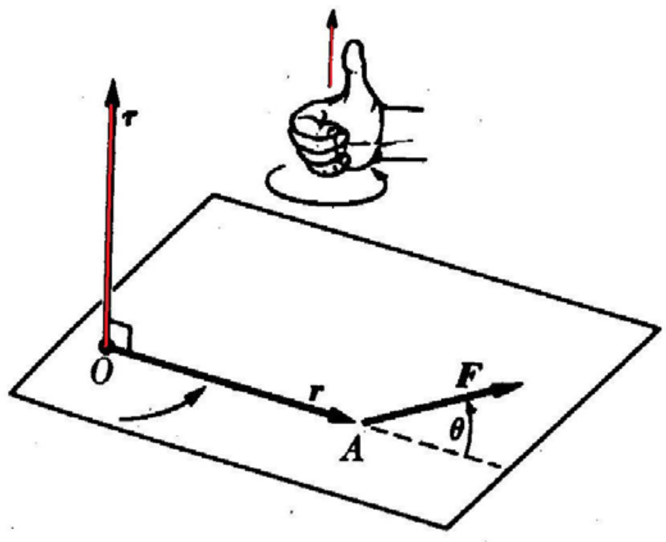
Σύνθεση Ροπών

- Δυνάμεις Συντρέχουσες.
- Δυνάμεις Ομοεπίπεδες.

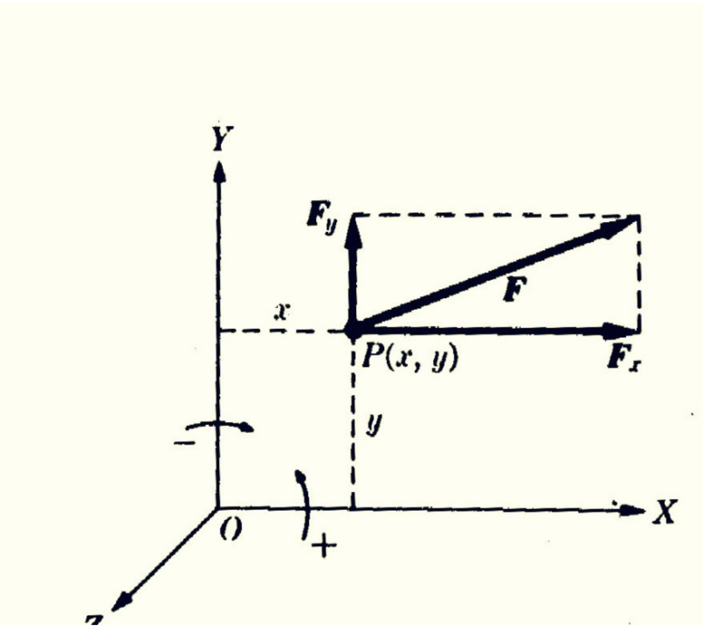
    Ζεύγος Δυνάμεων.

- Το Αποτέλεσμα της Σύνθεσης είναι μια Δύναμη και ένα Ζεύγος

Διάνυσμα, ροπή.

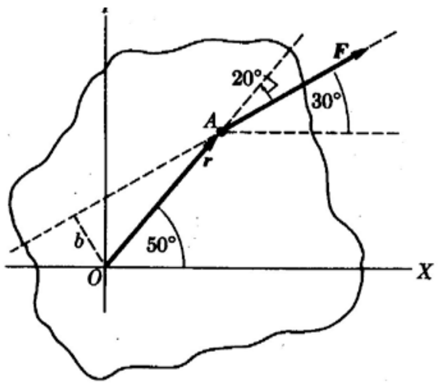


Μέτρο και φορά Ροπής.

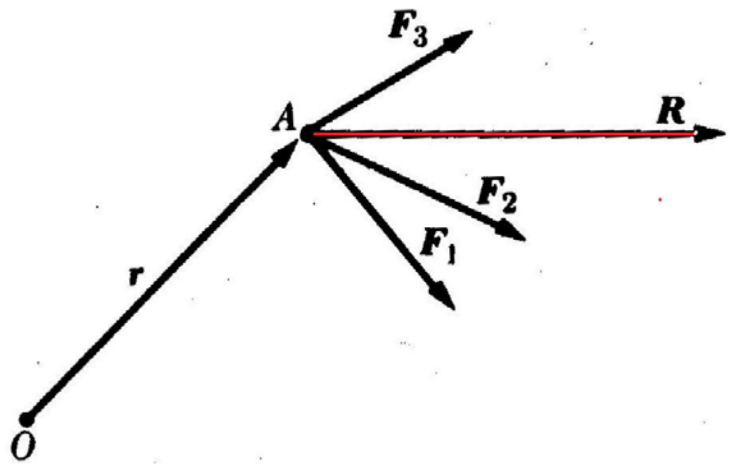


Υπολογισμός από τις συνιστώσες.

Συντρέχουσες Δυνάμεις.



Απλό παράδειγμα υπολογισμού.



Σχῆμα 4-6. Ὅταν οἱ δυνάμεις εἶναι συντρέχουσες ἡ ροπή τῆς συνισταμένης ἰσοῦται μέ τό διανυσματικό ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν.

Δυνάμεις σε Άκαμπτο Σώμα.

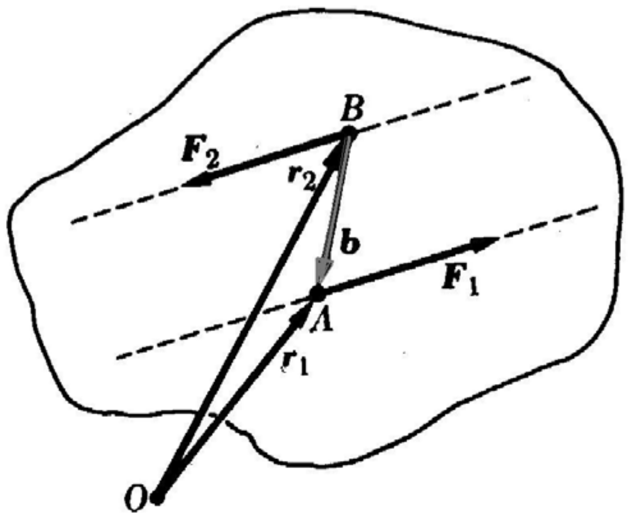
Αποτέλεσμα της δράσης των δυνάμεων στο σώμα είναι:
α) Μετατόπιση
β) Περιστροφή

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη δράση των δυνάμεων με τη συνισταμένη τους;

Γενικά όχι. Το άθροισμα των ροπών δεν είναι πάντοτε κάθετο στη συνισταμένη δύναμη.

Η προϋπόθεση ισχύει όταν οι δυνάμεις, είναι συνεπίπεδες.

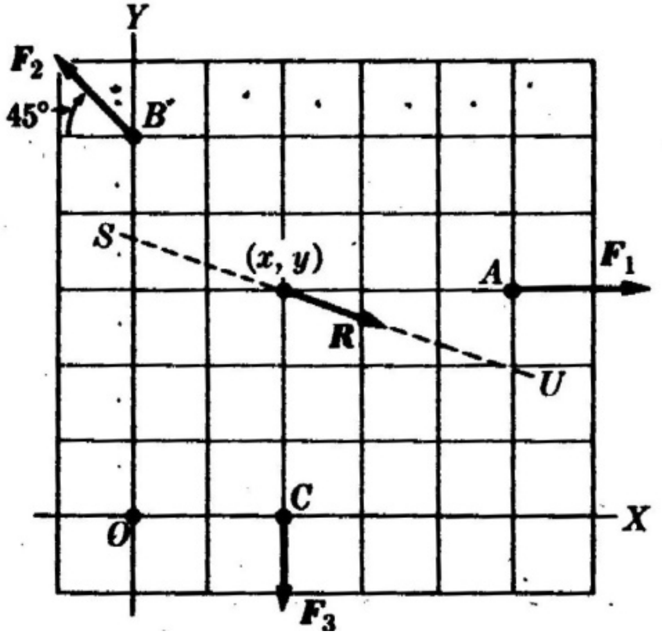
Ζεύγος δυνάμεων.



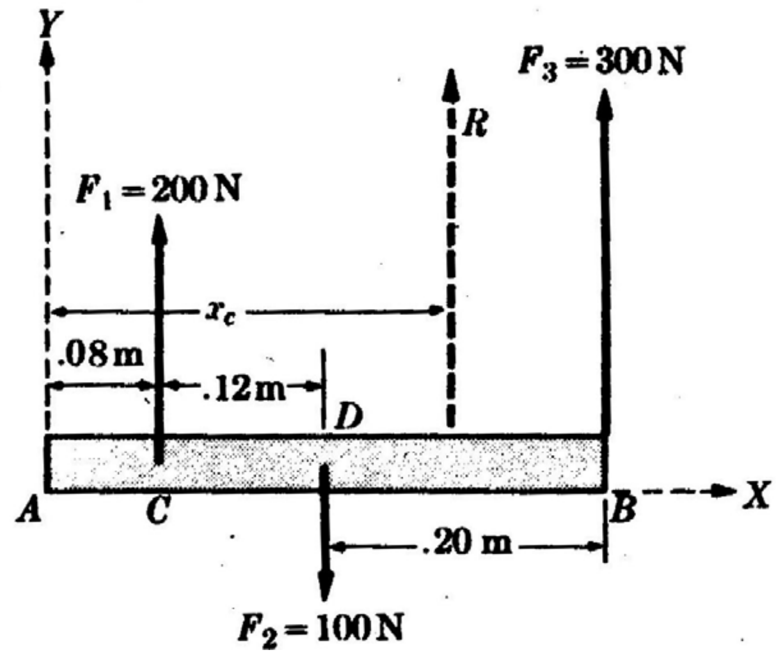
Ένα Σύστημα Δυνάμεων, μπορεί να αντικατασταθεί:
 Από τη συνισταμένη R έτσι ώστε να προκαλεί την ίδια μετατόπιση. Εφαρμόζεται στο σημείο όπου μηδενίζεται το άθρισμα των ροπών.
Από ένα ζεύγος που να προκαλεί την ίδια περιστροφή με το άθροισμα των ροπών.

Ζεύγος: Σύστημα δύο Δυνάμεων με ίσα μέτρα και αντίθετες φορές.
Η Ροπή του Ζεύγους είναι ανεξάρτητη από το σημείο υπολογισμού. Το ζεύγος δεν μπορεί να αντικατασταθεί από μία μόνον δύναμη.

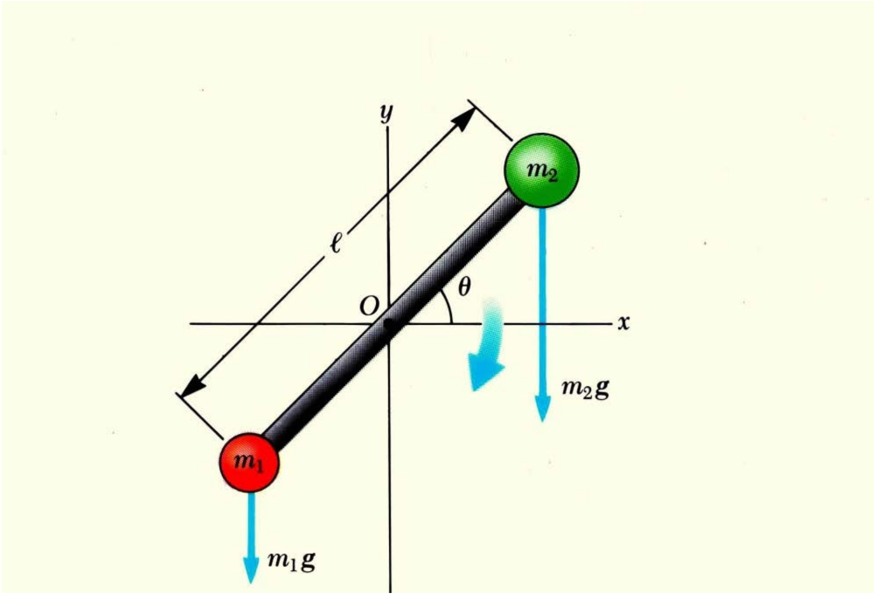
Ασκήσεις.



Υπολογισμός συνισταμένης

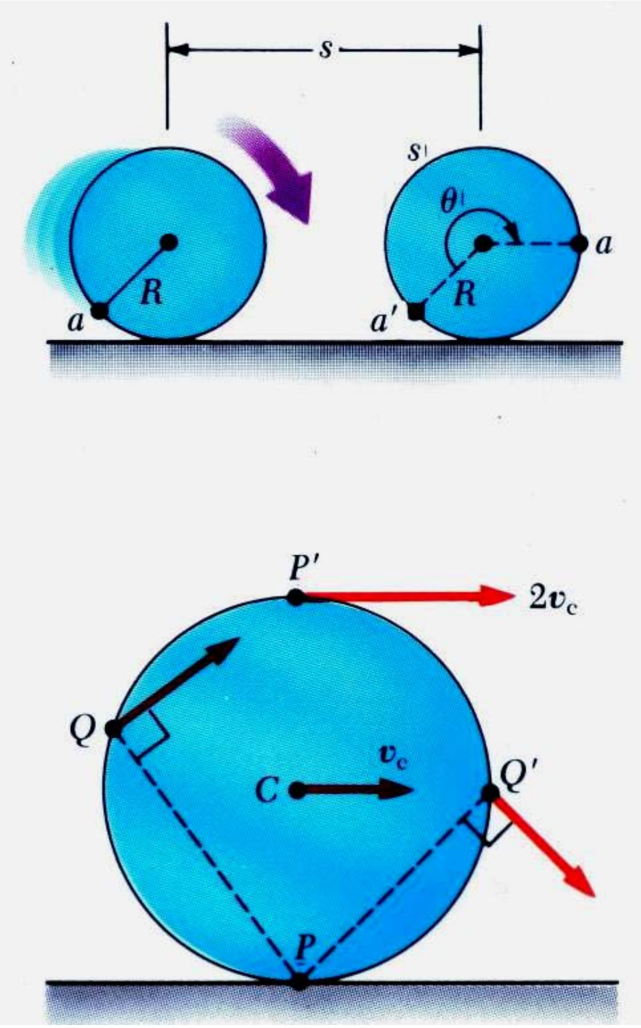


Δυνάμεις παράλληλες κέντρο δυνάμεων.



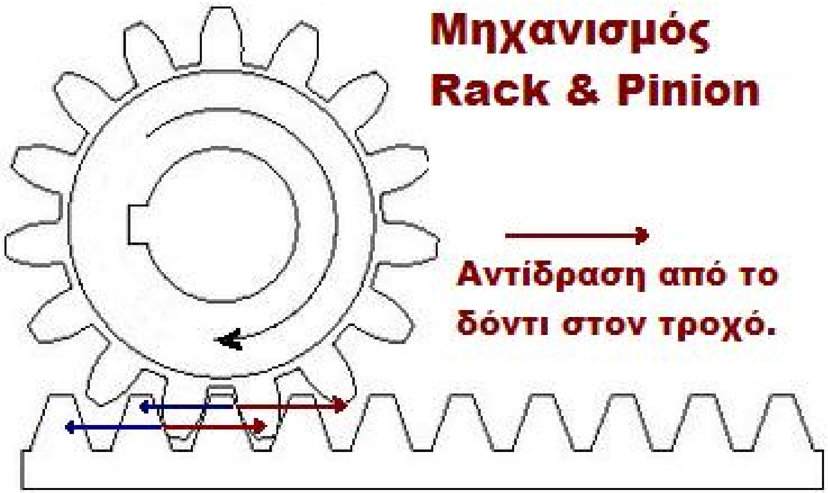
y
m_2
ℓ
θ
O
x
m_2g
m_1
m_1g

Κύλιση

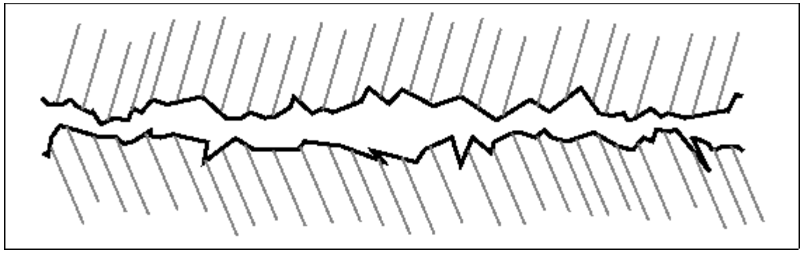


Σχήμα 11.3 Όλα τα σημεία ενός κυλιόμενου σώματος κινούνται σε κατεύθυνση κάθετη προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής P. Το κέντρο τού σώματος κινείται με ταχύτητα v_c, ενώ το σημείο P' κινείται με ταχύτητα $2v_c$.

Ερμηνεία



Ο μηχανισμός μοιάζει με τον μηχανισμό της κύλισης. Η αντίδραση της τροχιάς σπρώχνει το γρανάζι προς τα εμπρός.

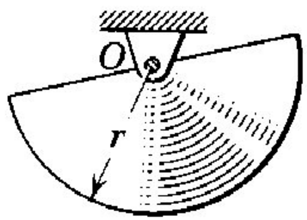


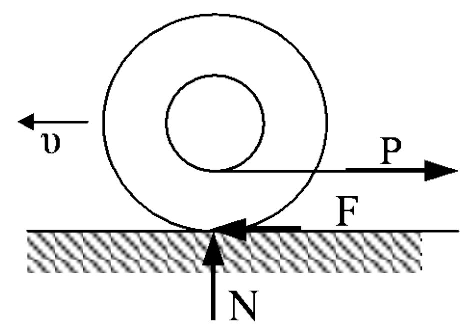
Οι μικρές ανωμαλίες των επιφανειών λειτουργούν όπως τα δόντια των γραναζιών!

Ασκήσεις

Ένα ομογενές ημικύκλιο, ακτίνας R και μάζας M. Υπολογίστε α) το κέντρο μάζας β) τη ροπή αδράνειας για άξονα που περνά από το κέντρο του. γ)Αν το κρεμάσουμε κατακόρυφα από άξονα που περνά από το κέντρο του, ποια είναι η περίοδος ταλάντωσης για μικρές γωνίες απόκλισης από την κατακόρυφο. Αποδείξτε τους τύπους που χρησιμοποιείτε.

- Ο τροχός του σχήματος κινείται χωρίς να ολισθαίνει με την επίδραση της δύναμης P=1,5 t N. Η μάζα του είναι 60 kg και η ακτίνα αδράνειας k=25 cm. ($I=mk^2$). Η εσωτερική ακτίνα είναι 20 cm και η εξωτερική 40 cm. Η αρχική του ταχύτητα είναι 1 m/s προς τα αριστερά. Ποια είναι η ταχύτητα του μετά από 10 s.



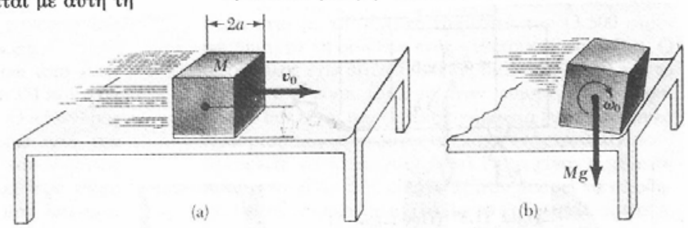


Ασκήσεις

ρόβλημα 57).

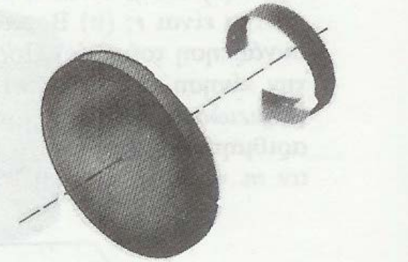
ς δίσκος τίθεται σε περι-
ξονα που διέρχεται από το
αχύτητα ω_0. Ο περιστρεφό-
ι και αφήνεται με αυτή τη

61. Ένας στερεός κύβος ακμής $2a$ και μάζας M γλιστράει σε μια λεία επιφάνεια με σταθερή ταχύτητα v_0, όπως στο Σχήμα 11.42a. Στη συνέχεια χτυπά σε ένα μικρό εμπόδιο στην άκρη τού τραπεζιού, που κάνει τον κύβο να γείρει, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.42b. Βρείτε την ελάχιστη τιμή τής v_0 έτσι ώστε ο κύβος να πέσει κάτω από το τραπέζι. Σημειώστε ότι η ροπή αδράνειας τού κύβου ως προς έναν άξονα κατά μήκος μιας ακμής του είναι $8Ma^2/3$. (*Υπόδειξη:* ο κύβος υφίσταται μια *μη ελαστική κρούση* στο άκρο).



βλημα 61).

8. Ένας ομογενής συμπαγής δίσκος τίθεται σε περιστροφή γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα ω_0. Ο περιστρεφόμενος δίσκος χαμηλώνεται και αφήνεται με αυτή τη γωνιακή ταχύτητα πάνω σε μια *τραχιά* οριζόντια επιφάνεια (βλ. Σχήμα 11.41). (a) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα τού δίσκου όταν συντελείται αμιγής κύληση; (b) Βρείτε το κλάσμα τής κινητικής ενέργειας που χάθηκε από τη χρονική στιγμή που ο δίσκος αφέθηκε ελεύθερος μέχρι τη στιγμή που άρχισε η αμιγής κύληση (*Υπόδειξη:* η στροφορμή ως προς έναν άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής διατηρείται).



χήμα 11.41 (Προβλήματα 58 και 59).