Τι είναι η Ταυτόχρονη Μετρησιμότητα και οι Σχέσεις Απροσδιοριστίας;

Χρυσοβαλάντης Στεργίου

0.1. **Η οπερασιοναλιστική άποψη του von Neumann για τα ταυτόχρονα μετρήσιμα παρατηρήσιμα.** Θα λέμε ότι δύο παρατηρήσιμα A και B είναι **ταυτόχρονα μετρήσιμα** αν και μόνο αν υπάρχει μια μετρητική διάταξη με την οποία να μπορούμε να μετρήσουμε και τα δύο ταυτόχρονα στο ίδιο σύστημα – μολονότι οι τιμές των A και B υπολογίζονται με διαφορετικό τρόπο από τις ενδείξεις της συσκευής.

«Ας ξεχάσουμε το σύνολο της κβαντικής μηχανικής κρατώντας την ακόλουθη ιδέα. Θεωρείστε δεδομένο ένα σύστημα S για τον πειραματιστή χαρακτηρίζεται από την απαρίθμηση όλων των αποτελεσματικά μετρήσιμων ποσοτήτων του και τις μεταξύ τους συναρτησιακές σχέσεις. Σε κάθε ποσότητα περιλαμβάνουμε και τις οδηγίες για το πώς αυτή θα πρέπει να μετρηθεί – και το πώς θα διαβάσουμε ή θα υπολογίσουμε την τιμή της από τη θέση του δείκτη στα όργανα μέτρησης. Αν $\mathcal{R}$ είναι μια ποσότητα και $f(x)$ κάποια συνάρτηση, τότε η ποσότητα $f(\mathcal{R})$ ορίζεται ως εξής: Για να μετρήσουμε την $f(\mathcal{R})$, μετράμε την $\mathcal{R}$ και βρίσκουμε την τιμή a (για την $\mathcal{R}$). Τότε η $f(\mathcal{R})$ έχει την τιμή $f(a)$. Όπως βλέπουμε όλες οι ποσότητες $f(\mathcal{R})$ (όπου το $\mathcal{R}$ είναι δεδομένο και f είναι μια τυχούσα συνάρτηση) μετριούνται ταυτόχρονα με την $\mathcal{R}$. Αυτό είναι το πρώτο παράδειγμα ταυτόχρονα μετρήσιμων ποσοτήτων. ... Για τέτοιες ποσότητες και μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$, μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα $f(\mathcal{R}, \mathcal{G})$ η οποία μετριέται αν μετρήσουμε ταυτόχρονα τα $\mathcal{R}, \mathcal{G}$ – αν, γι αυτά, βρούμε τις τιμές a, b, τότε η τιμή της $f(\mathcal{R}, \mathcal{G})$ είναι η $f(a, b)$. Αλλά θα πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι αν τα $\mathcal{R}, \mathcal{G}$ δεν είναι ταυτόχρονα μετρήσιμα, τότε το να σχηματίζουμε τον τύπο $f(\mathcal{R}, \mathcal{G})$ δεν έχει καμία απολύτως σημασία: δεν είναι δυνατόν να δοθεί η αντίστοιχη μετρητική διάταξη.» (1955: 297-298)

Ορισμός. Δύο παρατηρήσιμα A και B είναι **ταυτόχρονα μετρήσιμα** αν και μόνο αν υπάρχει παρατηρήσιμο C και υπάρχουν συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A = f(C)$ και $B = g(C)$.

Για τη μαθηματική αναπαράσταση των συναρτήσεων παρατηρήσιμων από αυτοσυζυγής τελεστές σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$υποθέτουμε ότι ισχύει η ακόλουθη συνθήκη για τη **διατήρηση των συναρτησιακών σχέσεων**:

Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και για κάθε παρατηρήσιμο C, ορίζουμε το παρατηρήσιμο $f(C)$ ως το παρατηρήσιμο που λαμβάνει την τιμή $f(c)$, αν το αποτέλεσμα της μέτρησης του C είναι c. Αντίστοιχα, με δεδομένο ότι το παρατηρήσιμο C αντιστοιχεί στον αυτοσυζυγή τελεστή $\hat{C}$, ορίζουμε τον τελεστή $f(\hat{C})$ ως τον τελεστή που οι ιδιοτιμές του είναι εικόνες των ιδιοτιμών του $\hat{C}$ με τη συνάρτηση f. Τότε, ο τελεστής που αντιστοιχεί στο παρατηρήσιμο $f(C)$, $\widehat{f(C)}$, ταυτίζεται με τον $f(\hat{C})$. Δηλαδή,

$$\widehat{f(C)} = f(\hat{C}).$$

Πρόταση. *Έστω δύο αυτοσυζυγείς τελεστές* $\hat{A}$*και* $\hat{B}$ *που δρουν επί ενός χώρου Hilbert* $\mathcal{H}$*.Τότε,* $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$ *αν και μόνο αν υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής* C *και υπάρχουν συναρτήσεις* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $\hat{A} = f(\hat{C})$ *και* $\hat{B} = g(\hat{C})$*.*

Για δύο τελεστές $\hat{A}$και $\hat{B}$ που δρουν επί ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$, ο τελεστής $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ ονομάζεται **μεταθέτης.** Αν ο μεταθέτης δύο τελεστών είναι μηδέν τότε οι τελεστές καλούνται **μετατιθέμενοι.**

0.2. **Πλήρες Σύνολο Μετατιθέμενων Τελεστών.** Έστω $\hat{A}, \hat{B}$ δύο μετατιθέμενοι αυτοσυζυγείς τελεστές, $[\hat{A},\hat{B}] = 0$, σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ πεπερασμένης διάστασης, με φασματική ανάλυση $\hat{A} = \sum_{i=1}^{M_A} a_i \hat{P}_i$ και $\hat{B} = \sum_{j=1}^{M_B} b_j \hat{Q}_j$ αντίστοιχα. Τα διανύσματα $\hat{P}_i \hat{Q}_j \psi \in \mathcal{H}$, για κάθε $i = 1, ..., M_A$ και $j = 1, ..., M_B$, είναι **κοινά ιδιοδιανύσματα** του $\hat{A}$ και του $\hat{B}$ με ιδιοτιμές a_i και b_j αντίστοιχα.

Πρόταση. *Για κάθε χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *υπάρχει πεπερασμένο σύνολο αυτοσυζυγών τελεστών,* $\hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_r$*,* οι οποίοι *μετατίθενται ανά ζεύγη,* $\left[\hat{A}_i, \hat{A}_j\right] = 0$ *για κάθε* $i, j = 1, .., r$ *, και τα κοινά ιδιοδιανύσματά τους αποτελούν ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{H}$*. Επιπλέον, σε κάθε r-άδα ιδιοτιμών* $a_1, a_2, ..., a_r$ *των τελεστών αντιστοιχεί ένα ακριβώς διάνυσμα της βάσης, δηλαδή, δεν υπάρχει εκφυλισμός.*

Αν ένας τελεστής $\hat{A}$ έχει εκφυλισμένες ιδιοτιμές, τότε σε κάθε ιδιοτιμή a_n αντιστοιχεί ένας υπόχωρος του $\mathcal{H}$ με διάσταση ίση με τον εκφυλισμό $d(n)$ της ιδιοτιμής. Για να διακρίνουμε ανάμεσα στα διανύσματα του υπόχωρου που είναι ιδιοδιανύσματα του $\hat{A}$ θεωρούμε ένα δεύτερο τελεστή $\hat{B}$ ο οποίος μετατίθεται με τον $\hat{A}$. Τώρα μπορούμε να ταξινομήσουμε τα ιδιοδιανύσματα του $\hat{A}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή a_n ως προς τις ιδιοτιμές b_j του Bτου έτσι ώστε να λάβουμε τα κοινά ιδιοδιανύσματα και των δύο τελεστών. Η παραπάνω πρόταση μας λέει ότι αυτή η διαδικασία περατώνεται με ολική άρση του εκφυλισμού.

Ορισμός. Ένα σύνολο τελεστών $\hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_r$, θα ονομάζεται **πλήρες σύνολο μετατιθέμενων τελεστών** σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ αν και μόνο αν (α) οι τελεστές μετατίθενται ανά ζεύγη, $\left[\hat{A}_i, \hat{A}_j\right] = 0$ για κάθε $i, j = 1, .., r$, και, (β) οι ιδιοτιμές των τελεστών του συνόλου καθορίζουν τα διανύσματα μιας ορθοκανονικής βάσης του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ ως κοινά ιδιοδιανύσματά τους.

0.3. **Οι σχέσεις απροσδιοριστίας (αβεβαιότητας) του Heisenberg.** Το 1927, ο Heisenberg υποστήριξε ότι μια πειραματική συνέπεια της μετρητικής διαδικασίας είναι ότι οι τιμές συγκεκριμένων ζευγών παρατηρήσιμων A και B δεν μπορούν να διαπιστωθούν με απόλυτη ακρίβεια.

Αν τα δυνατά αποτελέσματα της μέτρησης του A είναι $a_1, a_2, ..., a_n$ τότε η μέση τιμή του A, $\langle A \rangle$, προσδιορίζεται σε N επαναλήψεις τις μέτρησης από τη σχέση,

$$\langle A\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{N(a_j)}{N} = \sum_{j=1}^{n} a_j p_j$$

όπου $N(a_j)$ το πλήθος εμφανίσεων της τιμής a_j και p_j η αντίστοιχη σχετική συχνότητα εμφάνισης. Η στατιστική διασπορά των μετρούμενων τιμών γύρω από τη μέση τιμή, ΔA, είναι

$$(\Delta A)^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{(a_j - \langle A\rangle)^2}{N} = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A\rangle^2$$

Παρατηρείστε αν η τιμή που μετράμε σε όλες τις επαναλήψεις τις μέτρησης του A είναι η a_k, τότε

$$\langle A\rangle = a_k$$

και

$$\Delta A = 0$$

Ο Heisenberg υποστήριξε ότι η αλληλεπίδραση του συστήματος με τη μετρητική διάταξη που μετράει το παρατηρήσιμο A διαταράσσει την τιμή που θα λάμβανε το παρατηρήσιμο B κατά τη μέτρησή του έτσι ώστε το γινόμενο των στατιστικών διασπορών των παρατηρήσιμων να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από΄μια μη μηδενική θετική ποσότητα. Συγκεκριμένα αν τα παρατηρήσιμα είναι η x-συντεταγμένη της θέσης ενός σωματιδίου και η αντίστοιχη ορμή, p_x, τότε ισχύει,

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Μια άλλη σχέση απροσδιοριστίας είναι αυτή του χρόνου–ενέργειας:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Κατά τη μέτρηση της ενέργειας ενός συστήματος παράγεται μια μη ελεγχόμενη και μη προβλέψιμη διαφορά ΔE της ενέργειας του συστήματος από τη μετρούμενη τιμή της η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρόνου που διαρκεί η μέτρηση (Landau – Peierls 1931).

Η σταθερά του Πλανςκ $\hbar$ αποτελεί ένα μέτρο του μεγέθους της μη ελεγχόμενης διαταραχής.

Αν τα παρατηρήσιμα A και B αναπαρίστανται από αυτοσυζυγείς τελεστές $\hat{A}$ και $\hat{B}$, αντίστοιχα, και το κβαντικό σύστημα είναι στην κατάσταση ψ, τότε, σύμφωνα με τον κανόνα του Born. έχουμε,

$$\langle A\rangle_{\psi} = \langle\psi| \hat{A} |\psi\rangle$$

$$\Delta_{\psi} A = \langle\psi| \hat{A}^2 |\psi\rangle - \Big(\langle\psi| \hat{A} |\psi\rangle\Big)^2$$

$$\langle B\rangle_{\psi} = \langle\psi| \hat{B} |\psi\rangle$$

$$\Delta_\psi B = \langle\psi|\, \hat{B}^2 \,|\psi\rangle - \Big(\langle\psi|\, \hat{B} \,|\psi\rangle\Big)^2$$

Πρόταση. *Ισχύει $\Delta_\psi A = 0$ αν και μόνο αν το ψ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\hat{A}$.*

Παρατήρηση. Θεωρείστε μια κατάσταση του κβαντικού συστήματος που έχει τη μορφή,

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2,$$

με $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ και $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, όπου $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$ ιδιοδιανύσματα του $\hat{A}$. Η κατάσταση αυτή είναι **υπέρθεση δύο ιδιοκαταστάσεων του παρατηρήσιμου** του A. Με βάση την παραπάνω πρόταση ισχύει ότι $\Delta_\psi A \neq 0$

Στο αυτό το πλαίσιο οι σχέσεις απροσδιοριστίας λαμβάνουν την εξής μορφή:

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2}\,|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|$$

Στην περίπτωση των τελεστών θέσης και ορμής ισχύει, $[\hat{x}, \hat{p_x}] = i\hbar$ οπότε $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$.

0.4. Άλλες ερμηνείες των σχέσεων απροσδιοριστίας.

(1) **Η στατιστική ερμηνεία (Ποππερ 1934):** « Οι σχέσεις [του Heisenberg] είναι, αναμφίβολα, στατιστικές σχέσεις που συνάγονται από την κβαντική θεωρία. Αλλά, από συνήθεια, κάποιοι θεωρητικοί της κβαντικής μηχανικής τις ερμηνεύουν εσφαλμένα ως ορίζουσες ενός ανώτερου ορίου ακρίβειας των μετρήσεων μας»

(2) **Η οντική ερμηνεία:** Η αβεβαιότητα δεν έχει να κάνει με την προσπάθειά μας να πραγματοποιήσουμε μετρήσεις. Η αβεβαιότητα είναι ενδογενής σε ένα κβαντικό σύστημα και είναι ανεξάρτητη από το αν εκτελούμε μετρήσεις στο κβαντικό σύστημα.

0.5. **Ταυτόχρονη μετρησιμότητα και χωροχρόνος.** Η μέτρηση ενός παρατηρήσιμου λαμβάνει χώρα σε μία χρονική στιγμή t σε ένα σημείο του χώρου. Δύο παρατηρήσιμα A και B είναι **ταυτόχρονα μετρήσιμα** αν οι μετρήσεις των A και B αν λαμβάνουν χώρα την ίδια χρονική στιγμή t.

Η ταυτόχρονη μετρησιμότητα καθίσταται προβληματική έννοια λόγω της **σχετικότητας της ταυτοχρονίας** την οποία προβλέπει η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας: δύο συμβάντα (μετρήσεις) A και B τα οποία βρίσκονται στην ίδια επιφάνεια σταθερού χρόνου $t = \sigma\tau\alpha\theta.$ ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ, δηλαδή είναι ταυτόχρονα ως προς το Σ, δεν είναι κατ᾽ ανάγκην ταυτόχρονα και ως προς οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ'. Σε ένα χωρόχρονο $1{+}1$, αν η χωρική απόσταση των δύο συμβάντων (μετρήσεων) ως προς το σύστημα Σ είναι $\Delta x = x_A - x_B \neq 0$ ενώ $\Delta t = t_A - t_B = 0$, τότε ως προς κάποιο κάποιο άλλο αδρανειακό σύστημα Σ', που κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα $\overrightarrow{v}$, η χρονική διαφορά των δύο συμβάντων είναι $\Delta t' = t'_A - t'_B = \gamma(-\frac{v}{c^2}\Delta x)$. Αν η ταχύτητα του Σ' είναι προς τη θετική κατεύθυνση του Σ τότε $v > 0$ και $\Delta t' < 0 \Rightarrow t'_A < t'_B$ ενώ αν η ταχύτητα του Σ' είναι προς την αρνητική κατεύθυνση του Σ τότε $v < 0$ και $\Delta t' > 0 \Rightarrow t'_A > t'_B$. Δηλαδή, υπάρχουν αδρανειακά συστήματα στα οποία το συμβάν (μέτρηση) A είναι χρονικά πρότερο του B και άλλα αδρανειακά συστήματα στα οποία το συμβάν (μέτρηση) A είναι χρονικά ύστερο του B.

Δύο παρατηρήσιμα A και B είναι **ταυτόχρονα μετρήσιμα** αν οι μετρήσεις των A και B δίνουν τα ίδια αποτελέσματα είτε εφόσον η μέτρηση του A διεξάγεται πρώτη και ακολουθείται από μια μέτρηση του B είτε η μέτρηση του B διεξάγεται πρώτη και ακολουθείται από μια μέτρηση του A.