Τι είναι η Κβαντική μηχανική;

ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Χρυσοβαλάντης Στεργίου

0.1. **Εισαγωγή.** Σε αυτό το πλαίσιο η κβαντική θεωρία αντιμετωπίζεται ως ένα σχήμα με τη βοήθεια του οποίου κάνουμε προβλέψεις για τις κατανομές πιθανοτήτων αποτελεσμάτων μετρήσεων οι οποίες εκτελούνται σε κατάλληλα προετοιμασμένα αντίγραφα ενός συστήματος. Γι αυτό αντί του όρου «φυσικό μέγεθος» χρησιμοποιούμε τον όρο «παρατηρήσιμο». Χωρίς να δεσμευόμαστε σε οποιαδήποτε ερμηνεία της θεωρίας των πιθανοτήτων, οι πιθανότητες κατανοούνται ως σχετικές συχνότητες εμφάνισης αποτελεσμάτων μετρήσεων, για μετρήσεις που επαναλαμβάνονται επαρκώς πολλές φορές.

0.2. **Τα βασικά αιτήματα.**

- **1ο Αίτημα:** Οι προβλέψεις των αποτελεσμάτων μετρήσεων οι οποίες μπορούν να διεξαχθούν σε ένα απομονωμένο σύστημα είναι πιθανοκρατικές. Όταν είναι διαθέσιμη η μέγιστη ποσότητα πληροφορίας, η πιθανοκρατική πληροφορία κωδικοποιείται μαθηματικά από ένα διάνυσμα σε κάποιο μιγαδικό χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ ο οποίος αποτελεί τον **χώρο των καταστάσεων** στην κβαντική θεωρία. Το διάνυσμα αυτό αναπαριστά την φυσική έννοια «κατάσταση» του συστήματος εφόσον δίνει τις ακριβέστερες δυνατές προβλέψεις.
- **2ο Αίτημα:** Τα είδη των μετρήσεων που μπορούν να διεξαχθούν σε ένα απομονωμένο σύστημα ονομάζονται **παρατηρήσιμα** του συστήματος και αναπαρίστανται μαθηματικά από αυτοσυζυγείς τελεστές που δρουν στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Σε κάθε παρατηρήσιμο του συστήματος αντιστοιχεί ακριβώς ένας αυτοσυζυγής τελεστής.
- **3ο Αίτημα (Κανόνας του Born) :** Οι μόνες τιμές που μπορούν να προκύψουν από τη μέτρηση ενός παρατηρήσιμου είναι ιδιοτιμές του τελεστή που το αναπαριστά. Για ένα σύστημα που βρίσκεται σε κατάσταση που αναπαρίσταται από ένα διάνυσμα $|\psi\rangle$ και για τη μέτρηση ενός παρατηρήσιμου A, η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή a_n είναι

  $$Prob(A = a_n; |\psi\rangle) = \langle\psi| \hat{P}_n |\psi\rangle$$

  όπου $\hat{P}_n := \sum_{j=1}^{d(n)} |a_n, j\rangle \langle a_n, j|$ είναι ο προβολικός τελεστή στον υπόχωρο του $\mathcal{H}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή a_n.
- **4ο Αίτημα (Η εξίσωση Schrödinger):** Σε απουσία εξωτερικών επιδράσεων (δηλαδή, για ένα κλειστό σύστημα), το διάνυσμα κατάστασης $|\psi\rangle$ μεταβάλλεται ομαλά με το χρόνο t σύμφωνα μέ τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger

  $$i\hbar \frac{d\,|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}\,|\psi\rangle$$

  όπου $\hat{H}$ ο χαμιλτονιανός τελεστής του συστήματος.

0.3. **Παρατηρήσεις.**

0.3.1. *Παρατηρήσιμα και καταστάσεις.* Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε μια συλλογή πανομοιότυπων απομονωμένων φυσικών συστημάτων – τα συστήματα αυτά είναι πανομοιότυπα διότι έχουν προετοιμαστεί με την ίδια πειραματική μεθοδολογία. Τα συστήματα της συλλογής μπορούν να αλληλεπιδράσουν με διαφορετικές μετρητικές διατάξεις· κάθε τέτοια μετρητική αλληλεπίδραση των συστημάτων μιας συλλογής αντιστοιχεί σε ένα **παρατηρήσιμο**, το οποίο σύμφωνα με το αίτημα (2) αναπαρίσταται μαθηματικά από κάποιον αυτοσυζυγή τελεστή που δρα σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Κατά τη μέτρηση ενός παρατηρήσιμου λαμβάνουμε διαφορετικά μετρητικά αποτελέσματα. Η πληροφορία που έχουμε για το σύστημα ή τη συλλογή προκύπτει από τη στατιστική επί των μετρητικών αποτελεσμάτων, δηλαδή, από τις σχετικές συχνότητες εμφάνισης του κάθε αποτελέσματος μέτρησης του συγκεκριμένου παρατηρήσιμου ή από τις αναμενόμενες τιμές των αποτελεσμάτων μέτρησης του συγκεκριμένου παρατηρήσιμου. Η μέγιστη δυνατή πληροφορία για το σύστημα προκύπτει από το σύνολο των σχετικών συχνοτήτων ή των αναμενόμενων τιμών που διαθέτουμε για κάθε παρατηρήσιμο, για το σύνολο των δυνατών παρατηρήσιμων εφόσον ικανοποιείται η εξής συνθήκη:

> (Σ) Δεν γνωρίζουμε οιονδήποτε τρόπο (ή/και δεν υπάρχει τέτοιος τρόπος) να διαμερίσουμε τη συλλογή σε δύο ή περισσότερες υποσυλλογές έτσι ώστε οι σχετικές συχνότητες των αποτελεσμάτων για κάθε παρατηρήσιμο στην αρχική συλλογή να μπορεί να γραφεί ως κυρτό άθροισμα των αντίστοιχων σχετικών συχνοτήτων που υπολογίζονται στις υποσυλλογές οι οποίες προκύπτουν από τη διαμέριση. (Αντίστοιχα, θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε τη (Σ) για τις αναμενόμενες τιμές.)

Αν η συνθήκη (Σ) δεν ικανοποιείται, τότε η μέγιστη πληροφορία που διαθέτουμε για ένα σύστημα της συλλογής προκύπτει από τις σχετικές συχνότητες εμφάνισης των αποτελεσμάτων μέτρησης των παρατηρήσιμων ή από τις αναμενόμενες τιμές των παρατηρήσιμων όπως αυτές υπολογίζονται στην υποσυλλογή της διαμέρισης που ανήκει το σύστημα εφόσον, πλέον, η (Σ) για ικανοποιείται για τη συγκεκριμένη υποσυλλογή. Η μέγιστη πληροφορία που διαθέτουμε για ένα σύστημα αποτελεί την **κατάσταση** του συστήματος, η οποία σύμφωνα με το αίτημα (1) αναπαρίσταται μαθηματικά από ένα διάνυσμα σε κάποιο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$.

0.3.2. *Ο κανόνας του Born.* Μια ισοδύναμη διατύπωση του κανόνα του Born είναι η εξής:

> Αν ένα παρατηρήσιμο A και η κατάσταση του συστήματος αναπαρίστανται, αντίστοιχα από τον αυτοσυζυγή τελεστή $\hat{A}$ και το κανονικοποιημένο διάνυσμα $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, τότε η αναμενόμενη τιμή $\langle A\rangle_{\psi}$ των αποτελεσμάτων των μετρήσεων του παρατηρήσιμου A, είναι
>
> $$\langle A\rangle_{\psi} = \langle\psi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle$$

Ο κανόνας του Born συνδέει τη μαθηματική περιγραφή της κατάστασης του συστήματος από το διάνυσμα $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ και του παρατηρήσιμου από τον αυτοσυζυγή τελεστή $\hat{A}$ με πιθανότητες αποτελεσμάτων και με αναμενόμενες τιμές παρατηρήσιμων οι οποίες μπορούν να συγκριθούν με τις πειραματικές σχετικές συχνότητες των αποτελεσμάτων μετρήσεων και με τις αναμενόμενες τιμές παρατηρήσιμων.

Αν υποθέσουμε ότι το διάνυσμα κατάστασης είναι ένα ιδιοδιάνυσμα $|a_m\rangle$ του τελεστή $\hat{A}$ και μετράμε το παρατηρήσιμο A. Τότε, επειδή $\langle a_n|\, a_m\rangle = \delta_{nm}$, έπεται ότι η πιθανότητα να λάβουμε το αποτέλεσμα a_m είναι 1 ενώ η πιθανότητα οποιουδήποτε άλλου αποτελέσματος είναι 0.

0.3.3. *Η εξίσωση Schrödinger.* Το αίτημα (4) περιγράφει πώς μια κβαντική κατάσταση εξελίσσεται με το χρόνο.

(1) Η σημασία της διανυσματικής διαφορικής εξίσωσης είναι η εξής:

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\phi \in \mathcal{H}$,ικανοποιείται η συνήθης διαφορική εξίσωση,

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\phi|\psi\rangle = \left\langle\phi|\hat{H}|\psi\right\rangle$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο χαμιλτονιανός τελεστής $\hat{H}$ έχει διακριτό φάσμα ιδιοτιμών $\{E_1, E_2, ..., E_M\}$ και με φασματική ανάλυση $\hat{H} = \sum\limits_{m=1}^{M} E_m\hat{P}_m$, για τυχόν διανυσμα $\chi \in \mathcal{H}$, αποδεικνύεται ότι

$$\langle\chi|\psi_t\rangle = \sum_{m=1}^{M} e^{-\frac{i}{\hbar}E_m(t-t_0)}\left\langle\chi|\hat{P}_m|\psi_{t_0}\right\rangle$$

ή σε διανυσματική μορφή,

$$|\psi_t\rangle = \sum_{m=1}^{M} e^{-\frac{i}{\hbar}E_m(t-t_0)}\hat{P}_m\,|\psi_{t_0}\rangle$$

Ο τελεστής $\sum\limits_{m=1}^{M} e^{-\frac{i}{\hbar}E_m(t-t_0)}\hat{P}_m$ είναι **μοναδιακός τελεστής**,

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} = \sum_{m=1}^{M} e^{-\frac{i}{\hbar}E_m(t-t_0)}\hat{P}_m.$$

Η εξίσωση Schrödinger ορίζει μία **μοναδιακή εξέλιξη** της κατάστασης του φυσικού συστήματος.

(2) Η εξίσωση Schrödinger είναι ***γραμμική***. Άρα, αν η ψ_{t_0} και η ϕ_{t_0} εξελίσονται στις ψ_t και στις ϕ_t, αντίστοιχα, στο χρονικό διάστημα $t - t_0$, τότε η κατάσταση $\lambda\psi_{t_0} + \mu\phi_{t_0}$ εξελίσεται στην $\lambda\psi_t + \mu\phi_t$, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(3) Η εξίσωση Schrödinger είναι διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς το χρόνο. Άρα, ο καθορισμός της κατάστασης του συστήματος σε μία χρονική στιγμή t_0 αποτελεί επαρκή αρχική συνθήκη για την εύρεση της γενικής λύσης της εξίσωσης για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Υπό αυτήν τη σημασία, η κβαντική μηχανική είναι ***ντετερμινιστική θεωρία.***

(4) Η εξίσωση Schrödinger περιγράφει μια **χρονικά αντιστρεπτή** δυναμική εξέλιξη.