# Τι είναι ένα Κλασικό Φυσικό Σύστημα;

Χρυσοβαλάντης Στεργίου

0.1. **Εισαγωγή.** Στην κλασική φυσική συναντάμε δύο είδη φυσικών θεωριών: τις σωματιδιακές θεωρίες και τις θεωρίες πεδίου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα θεωρίας του πρώτου είδους είναι η νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας και η κινητική θεωρία των αερίων ενώ στο δεύτερο είδος κατατάσσεται η ηλεκτρομαγνητική θεωρία και η θεωρία της σχετικότητας. Η διάκριση μεταξύ των δύο ειδών έχει να κάνει με τη θεμελιώδη οντολογία που υιοθετούν και, συνακόλουθα, με τη μεταφυσική εικόνα του κόσμου που περιγράφουν. Οι θεμελιώδεις οντότητες στις σωματιδιακές θεωρίες είναι τα σωματίδια, τα οποία αλληλεπιδρούν είτε εξ αποστάσεως είτε εξ επαφής με άλλα σωματίδια, ενώ, αντίστοιχα, οι θεμελιώδεις οντότητες στις κλασικές θεωρίες πεδίου είναι τα πεδία.

Μια βασική διαφορά των δύο ειδών θεωριών είναι ότι οι μεν σωματιδιακές θεωρίες περιγράφουν συστήματα με πεπεραμένο πλήθος βαθμών ελευθερίας στην περατωμένη (και κλειστή) περιοχή του χώρου που καταλαμβάνουν, ενώ οι θεωρίες πεδίου περιγράφουν συστήματα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας στην περατωμένη (και κλειστή) περιοχή του χώρου που καταλαμβάνουν. Έτσι, για ένα σύστημα $N$ σωματιδίων το οποίο καταλαμβάνει όγκο $V$, το πλήθος των παραμέτρων που απαιτούνται για να καθορίσουμε τη θέση των σωματιδίων σε κάθε χρονική στιγμή είναι το πολύ $3N$, δηλαδή το σύστημα έχει το πολύ $3N$ βαθμούς ελευθερίας, ενώ για να καθορίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε δεδομένη χρονική στιγμή, απαιτείται να καθορίσουμε τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος της έντασης του πεδίου σε όλα τα σημεία του χωρίου $V \subset \mathbb{R}^3$, δηλαδή, απαιτείται να καθορίσουμε υπεραριθμήσιμο πλήθος παραμέτρων. Άρα, το σύστημα έχει υπεραριθμήσιμα άπειρους βαθμούς ελευθερίας.[1] Για λόγους απλότητας και σαφήνειας σε ό,τι ακολουθεί θα αναφερόμαστε σε συστήματα με πεπερασμένο πλήθος βαθμών ελευθερίας και σε θεωρίες σωματιδίων.

0.2. **Δύο θεμελιώδη αιτήματα.**

(1) Ο καθορισμός της κατάστασης του συστήματος, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, επαρκεί για να προσδιοριστούν οι τιμές όλων των φυσικών μεγεθών που περιγράφουν το σύστημα.
(2) Η κατάσταση του φυσικού συστήματος σε τυχούσα χρονική στιγμή $t_2$ καθορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από την κατάσταση του συστήματος σε κάποια παρελθούσα χρονική στιγμή $t_1$.

Το πρώτο αίτημα μας λέει ότι αν $\mathcal{S}$ είναι το σύνολο των καταστάσεων του συστήματος, σε κάθε φυσικό μέγεθος $A$ αντιστοιχεί μια συνάρτηση $f_A : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, όπου $f_A(s)$ είναι η τιμή του φυσικού μεγέθους όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $s$.

Επίσης, για ένα φυσικό μέγεθος $A$ και ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$, ορίζουμε το σύνολο των καταστάσεων$\mathcal{S}_{A\in\Sigma}$ για τις οποίες το φυσικό μέγεθος

[1] Για μια κριτική αυτής της διάκρισης, δείτε Wayne 1997

λαμβάνει τιμές που ανήκουν στο σύνολο $\Sigma$,

$$\mathcal{S}_{A\in\Sigma} := f_A^{-1}(\Sigma) = \{s \in \mathcal{S} | f_A(s) \in \Sigma\}\,.$$

Θα λέμε ότι μια συλλογή φυσικών μεγεθών $A_1, A_2, ..., A_n$ **καθορίζει κατά μοναδικό τρόπο** την κατάσταση $s \in \mathcal{S}$ του συστήματος αν και μόνο αν για κάθε $n$ πραγματικούς αριθμούς, $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, για καθένα εκ των οποίων υπάρχει $s_i \in \mathcal{S}$ τέτοιο ώστε $f_{A_i}(s_i) = a_i, \qquad i = 1, 2, ..., n$, ισχύει:

$$f_{A_1}^{-1}(\{a_1\}) \cap f_{A_2}^{-1}(\{a_2\}) \cap ... \cap f_{A_n}^{-1}(\{a_n\}) = \{s\}\,.$$

Στην περίπτωση ενός συστήματος $N$ ελεύθερων σωματιδίων οι $3N$ συντεταγμένες θέσης και οι $3N$ συντεταγμένες της ορμής είναι τα φυσικά μεγέθη που καθορίζουν πλήρως τη θέση του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή. Ωστόσο, όπως θα δούμε στη συνέχεια, για μακροσκοπικά συστήματα υιοθετούμε μη πλήρεις περιγραφές των φυσικών συστημάτων.

Το δεύτερο αίτημα συνεπάγεται την ύπαρξη μιας διπαραμετρικής οικογένειας δυναμικών απεικονίσεων $T_{t_2t_1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ τέτοια ώστε αν η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_1$ είναι $s \in \mathcal{S}$, η κατάσταση του συστήματος σε κάποια (επόμενη) χρονική στιγμή $t_2$ θα είναι $T_{t_2t_1}(s)$ . Οι απεικονίσεις $T_{t_2t_1}$ ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

$$T_{tt} = id \qquad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

και

$$T_{t_3t_2}T_{t_2t_1} = T_{t_3t_1} \qquad \text{αν } t_1 \leq t_2 \leq t_3\,.$$

0.3. **Ντετερμινισμός.** Σύμφωνα με τον Montague, μια θεωρία θα λέμε ότι είναι **ντετερμινιστική** αν για κάθε ζεύγος μοντέλων της ισχύει ότι αν τα μοντέλα αυτά συμφωνούν σε μία χρονική στιγμή, τότε θα συμφωνούν και σε κάθε άλλη χρονική στιγμή (Εαρμαν 1986:21). Με την έννοια μοντέλο θα εννοήσουμε εδώ, κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του χώρου των καταστάσεων (Emch–Liu: 13) που περιέχει μία διακεκριμένη κατάσταση (αρχική κατάσταση) και διατάσσεται ως προς τη σχέση ολικής διάταξης που επάγεται από τη συνήθη διάταξη των πραγματικών αριθμών: αν η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_1$ είναι $s \in \mathcal{S}$ και $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ τότε $T_{t_2t_1}(s) \preccurlyeq T_{t_3t_1}(s)$. Λόγω του δεύτερου αιτήματος που διατυπώσαμε (δες παραπάνω), αν δύο μοντέλα του συστήματος συμφωνούν ως προς την κατάστασή τους σε δεδομένη χρονική στιγμή θα συμφωνούν και σε κάθε άλλη μελλοντική χρονική στιγμή. Επομένως, θα λέμε ότι η θεωρία είναι **ντετερμινιστική προς το μέλλον**.

0.4. **Διαχωρισιμότητα. Διαχωρισιμότητα καταστάσεων:** Η κατάσταση που αποδίδεται σε ένα σύνθετο φυσικό σύστημα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή επιγίγνεται στις καταστάσεις που αποδίδονται στα υποσυστήματα που το συνιστούν την ίδια χρονική στιγμή. (Healey 1999)

Επομένως, αν σε δύο δυνατούς κόσμους οι καταστάσεις των συνιστωσών του φυσικού συστήματος σε δεδομένη χρονική στιγμή ταυτίζονται, τότε και οι καταστάσεις του σύνθετου συστήματος ταυτίζονται. Η αρχή της διαχωρισιμότητας δεν ισχύει είτε (α) αν στα υποσυστήματα δεν μπορούμε να αποδώσουμε δικές τους καταστάσεις, είτε, (β) αν οι καταστάσεις των υποσυστημάτων δεν μπορούν να καθορίσουν την κατάσταση του συστήματος που συγκροτούν.

**Χωροχρονική διαχωρισιμότητα:** Τα περιεχόμενα δύο περιοχών του χωροχρόνου που απέχουν κατά ένα μη μηδενικό χωροχρονικό διάστημα αποτελούν **διαχωρίσιμα** φυσικά συστήματα υπό την έννοια (1) ότι καθένα από αυτά έχει τη δική του, διακριτή, φυσική κατάσταση, και (2) η σύνθετη κατάσταση των δύο συστημάτων καθορίζεται πλήρως από τις επιμέρους καταστάσεις αυτών. (Howard, 1989)

Η ύπαρξη μη μηδενικού χωροχρονικού διαστήματος είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη διάκριση των δύο συστημάτων και των καταστάσεων τους. Το φυσικό όλον είναι το «άθροισμα» των μερών του.

Όπως επισημαίνει ο Howard, ο τρόπος με τον οποίο η σύνθετη κατάσταση καθορίζεται από τις επιμέρους καταστάσεις εξαρτάται από τη μαθηματική διατύπωση της θεωρίας. Για παράδειγμα, σε ένα κλασικό σύστημα $N$ σωματιδίων που ο χώρος των καταστάσεων είναι ο χώρος φάσεων θέσεων–ορμών, η κατάσταση του σύνθετου συστήματος περιγράφεται από ένα σημείο του χώρου $\mathbb{R}^{6N}$, $(x_1, ..., x_{3N}, p_1, ..., p_{3N})$. Αν θεωρήσουμε δύο υποσυστήματα $A, B$ τα οποία αποτελούνται από $K$ και $L$ σωματίδια αντίστοιχα, με $K + L = N$, τότε η κατάσταση του υποσυστήματος $A$ περιγράφεται από ένα σημείο του χώρου $\mathbb{R}^{6K}$, $(x_1, ..., x_{3K}, p_1, ..., p_{3K})$ ενώ η κατάσταση του υποσυστήματος $B$ περιγράφεται από ένα σημείο του χώρου $\mathbb{R}^{6L}$, $(x_1, ..., x_{3L}, p_1, ..., p_{3L})$. Οι χώροι φάσεων των επιμέρους υποσυστημάτων μπορούν να εμφυτευθούν στον χώρο φάσεων του σύνθετου συστήματος μέσω των εξής απεικονίσεων (ισομορφισμοί):

$$(x_1, ..., x_{3K}, p_1, ..., p_{3K}) \mapsto$$
$$(x_1, ..., x_{3N}, p_1, ..., p_{3N}) = (x_1, ..., x_{3K}, 0, ..., 0, p_1, ..., p_{3K}, 0, ..., 0)$$

και

$$(x_1, ..., x_{3L}, p_1, ..., p_{3L}) \mapsto$$
$$(x_1, ..., x_{3N}, p_1, ..., p_{3N}) = (0, ..., 0, x_1, ..., x_{3L}, 0, ..., 0, p_1, ..., p_{3L}).$$

Με αυτόν τον τρόπο, η τυχούσα κατάσταση του σύνθετου συστήματος αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα των καταστάσεων των υποσυστημάτων:

$$(x_1, ..., x_{3N}, p_1, ..., p_{3N}) =$$
$$(x_1, ..., x_{3K}, 0, ..., 0, p_1, ..., p_{3K}, 0, ..., 0) + (0, ..., 0, x_{3K+1}, ..., x_{3N}, 0, ..., 0, p_{3K+1}, ..., p_{3N})$$

0.5. **Η λογική δομή της κλασικής φυσικής.** Οι χαρακτηριστικές προτάσεις που περιγράφουν τις ιδιότητες που κατέχει ένα φυσικό σύστημα έχουν την εξής μορφή: «Η τιμή της φυσικής ποσότητας $A$ βρίσκεται σε ένα διάστημα $\Delta$ των πραγματικών αριθμών» και είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς ενώ μπορούν να συνδυασθούν ώστε να παραχθούν σύνθετες προτάσεις, π.χ. «Η τιμή της φυσικής ποσότητας $A_1$ βρίσκεται σε ένα διάστημα $\Delta_1$ των πραγματικών αριθμών και η τιμή της φυσικής ποσότητας $A_2$ βρίσκεται σε ένα διάστημα $\Delta_2$»

Αν $\mathcal{S}$ είναι το σύνολο των καταστάσεων του συστήματος και $f_A : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που αναπαριστά τη φυσική ποσότητα, τότε η πρόταση «Η τιμή της φυσικής ποσότητας $A$ βρίσκεται σε ένα διάστημα $\Delta$ των πραγματικών αριθμών» αντιστοιχεί στο υποσύνολο του συνόλου των καταστάσεων,

$$\mathcal{S}_{A\in\Delta} := f_A^{-1}(\Delta) = \{s \in \mathcal{S} | f_A(s) \in \Delta\}$$

Γενικεύοντας, **κάθε πρόταση για τις ιδιότητες του φυσικού συστήματος αντιστοιχεί σε ένα υποσύνολο του συνόλου των καταστάσεων.**

(1) **Το συντακτικό της κλασικής προτασιακής λογικής**

Έστω μία τυπική γλώσσα $L$ η οποία περιλαμβάνει τα ακόλουθα σύμβολα:

(α′) Άπειρο πλήθος προτασιακών συμβόλων: $A_1, A_2, ...$

(β′) Τους προτασιακούς συνδέσμους: $\sim\ \wedge \vee$

(γ′) Αριστερή και δεξιά παρένθεση: ( )

Το σύνολο των προτάσεων της $L$, $Sent(L)$ ορίζεται επαγωγικά:

(α′) Κάθε προτασιακό σύμβολο $A_i$ είναι μια πρόταση της $L$

(β′) Αν $\varphi, \psi$ είναι προτάσεις της $L$, τότε οι ακόλουθες εκφράσεις είναι επίσης προτάσεις:

$$(\sim \varphi)$$
$$(\varphi \wedge \psi)$$
$$(\varphi \vee \psi)$$

(2) **Σημασιολογία της κλασικής προτασιακής λογικής και κλασική φυσική**

**Ορισμός.** Θα λέμε ότι $\mathcal{B}$ είναι μια **άλγεβρα Boole** αν και μόνο αν $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ^{\perp}, 0, 1\rangle$, όπου το $B$ είναι ένα σύνολο που έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, το 0 και το 1 είναι συγκεκριμένα στοιχεία του $B$, οι $\vee, \wedge$ είναι διμελείς πράξεις και η $^{\perp}$ είναι μονομελής πράξη στο $B$, και για κάθε $a, b, c \in B$,

$$\begin{array}{cc}
a \vee b = b \vee a & a \wedge b = b \wedge a \\
a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c & a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \\
a \vee (a \wedge b) = a & a \wedge (a \vee b) = a \\
a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) & a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
a \vee (b \wedge b^{\perp}) = a & a \wedge (b \vee b^{\perp}) = a
\end{array}$$

Από τα παραπάνω αξιώματα προκύπτει ότι για κάθε $a, b \in B$, $a \wedge a^{\perp} = b \wedge b^{\perp}$, οπότε ορίζουμε $0 := a \wedge a^{\perp}$. Ομοίως, για κάθε $a, b \in B$, $a \vee a^{\perp} = b \vee b^{\perp}$, οπότε ορίζουμε $1 = a \vee a^{\perp}$.

Ενα χαρακτηριστικό παράδειγμα άλγεβρας Boole αποτελεί το σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου $X$, το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$, εφοδιασμένο με τις πράξεις της συνολοθεωρητικής ένωσης, της συνολοθεωρητικής τομής, του συνολοθεωρητικού συμπληρώματος και διακεκριμένα στοιχεία το κενό σύνολο $\emptyset$ και το ίδιο το $X$, δηλαδή, η δομή $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, X \rangle$ είναι άλγεβρα Boole.

Για τον καθορισμό της σημασιολογία της κλασικής λογικής χρησιμοποιούμε μια **αποτίμηση-CL**, η οποία ορίζεται ως το ζεύγος $(\mathcal{P}(X), v)$ που αποτελείται από το δυναμοσύνολο, $\mathcal{P}(X)$, ενός συνόλου $X$ και από μια απεικόνιση $v : Sent(L) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ από το σύνολο των προτάσεων της $L$, $Sent(L)$, στο σύνολο των υποσυνόλων του $X$, τέτοια ώστε
(α′) $v(\sim \varphi) = v(\varphi)^c$,
(β′) $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \cap v(\psi)$
(γ′) $v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) \cup v(\psi)$
για όλες τις προτάσεις $\varphi, \psi \in Sent(L)$.

Για ένα υποσύνολο $\Gamma$ του $Sent(L)$ θα λέμε ότι το $\Gamma$ **έπεται-CL** $\psi$, $\Gamma \models_{\Lambda} \psi$, αν και μόνο αν, για όλες τις αποτιμήσεις-**CL** $(\mathcal{P}(X), v)$,

$$\cap \{v(\varphi) : \varphi \in \Gamma\} \subseteq v(\psi).$$

**Μια θεωρία $T$ διατυπωμένη στη γλώσσα του προτασιακού λογισμού περιγράφει τις ιδιότητες ενός φυσικού συστήματος αν η άλγεβρα Boole της αποτίμησης-CL ορίζεται από το δυναμοσύνολο του συνόλου των καταστάσεων.**

0.6. **Οι πιθανότητες στην κλασική φυσική.** Σύμφωνα με τον Huang (128), για ένα μακροσκοπικό σύστημα, ούτε διαθέτουμε τα μέσα, ούτε και το επιθυμούμε, να προσδιορίσουμε την κατάσταση του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή. **Μας ενδιαφέρουν μόνο λίγες μακροσκοπικές ιδιότητες του συστήματος που δεν επαρκούν για τον καθορισμό της κατάστασής του.** Συγκεκριμένα, απαιτούμε το σύστημα να αποτελείται από $N$ σωματίδια, να καταλαμβάνει χωρικό όγκο $V$ και να έχει ενέργεια που λαμβάνει τιμές μεταξύ $E$ και $E+\Delta E$. Άπειρο πλήθος καταστάσεων ικανοποιούν αυτές τις προϋποθέσεις και αντίστοιχα μπορούμε να σκεφτούμε άπειρα πανομοιότυπα συστήματα που πραγματώνουν αυτές τις καταστάσεις.

Η έννοια της πιθανότητας στην κλασική φυσική μπορεί να κατανοηθεί με βάση μια γενικευμένη έννοια «όγκου» χωρίου στο χώρο των καταστάσεων. Συγκεκριμένα, η πιθανότητα η τιμή μιας φυσικής ποσότητας $A$ να βρίσκεται σε ένα διάστημα $\Delta$ των πραγματικών αριθμών εκφράζει τον «όγκο» του χωρίου $\mathcal{S}_{A\in\Delta}$ στο χώρο των καταστάσεων. Έτσι, για ένα χώρο καταστάσεων $N$-διαστάσεων,

$$Prob(A \in \Delta; \rho) = \int_{\mathcal{S}_{A\in\Delta}} \rho(x_1, x_2, ..., x_N) dx_1 dx_2, ..., dx_N$$

όπου η συνάρτηση $\rho(x_1, x_2, ..., x_N)$ εκφράζει την πυκνότητα των καταστάσεων στο χώρο $\mathcal{S}$. Γενικότερα, ένα μέτρο πιθανότητας $\mu$ στο χώρο των καταστάσεων ορίζεται ως μία συνάρτηση από τα (Borel) υποσύνολα του $\mathcal{S}$ στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$0 \leq \mu(W) \leq 1 \quad \text{για κάθε υποσύνολο } W$$

$$\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(\mathcal{S}) = 1$$
$$\mu(W_1 \cup W_2 \cup ...) = \mu(W_1) + \mu(W_2) + ...$$

όπου $W_1, W_2, ...$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά ζεύγη υποσυνόλων. Η τιμή $\mu(W)$ ερμηνεύεται ως η πιθανότητα η κατάσταση του συστήματος να βρίσκεται στο υποσύνολο $W$ του χώρου των καταστάσεων $\mathcal{S}$.

0.7. **Η μέτρηση στην κλασική φυσική.** Η γνώση των ιδιοτήτων των φυσικών συστημάτων προκύπτει από τη μέτρηση, η οποία συνίσταται σε μια διαδικασία αλληλεπίδρασης του προς μέτρηση συστήματος με μια μετρητική διάταξη. Στην κλασική φυσική η διαδικασία της μέτρησης δεν μεταβάλλει την κατάσταση του συστήματος. Έτσι, η τιμή του φυσικού μεγέθους που μετράται είναι η ίδια πριν και μετά τη διαδικασία της μέτρησης και δεν προκύπτει από την πράξη της μέτρησης. Επομένως, η μέτρηση αποκαλύπτει προϋπάρχουσες ιδιότητες του συστήματος. Επίσης, καταρχήν, η μέτρηση ενός κλασικού μεγέθους είναι ακριβής και η μόνη «αβεβαιότητα» όσον αφορά την τιμή του μετρούμενου μεγέθους προκύπτει από το πειραματικό σφάλμα.