14/12/2021

Τι μας πληροφορεί η παράγωγος μιας συνάρτησης.

Ορισ. Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in A$

- Θα λέμε ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο $\alpha \in A$ αν $f(\alpha) \geq f(x)$ $x \in A$
- Θα λέμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο $\alpha \in A$ αν $f(\alpha) \leq f(x)$ $x \in A$
- Ονομάζουμε ολικά ακρότατα το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο.

Π.χ. 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

Παρατηρούμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{matrix} x^2 \geq 0 \\ \text{και } f(0) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) \geq f(0)$

Επομένως η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$.

Έχει η f ολικό μέγιστο? Όχι, διότι

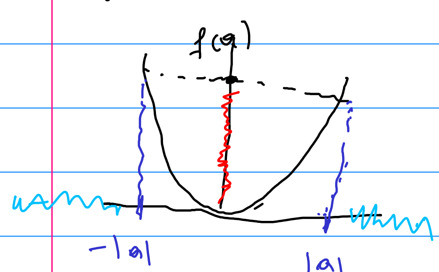
Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(\alpha) \geq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

τότε $\alpha^2 \geq x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$|\alpha| \geq |x|$

$-|\alpha| \leq x \leq |\alpha|$ άτοπο

γιατί το $x \in \mathbb{R}$ άρα ενδέχεται να είναι $x \geq |\alpha|$ ή $x \leq -|\alpha|$



Αν όμως $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ τότε

αυτό η συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο για $x=0$ (δες προηγούμενη παρατήρηση), έχει όμως και ολικό μέγιστο για $x=2$

$$0 \le x \le 2 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 4 \Rightarrow 0 \le f(x) \le f(2)$$
$$\forall x \in [0,2].$$

~ . ~

(a,b)
$I=[a,b]$
$(a,b]$
$[a,b)$

Ορ. 2 Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και I ένα διάστημα τ.ω. $I \subseteq A$ και έστω $c \in I$ εσωτερικό σημείο του I (αν I είναι κάποιο διάστημα με άκρα $a, b \in \mathbb{R}$ τότε $c \in (a,b)$)

- Η f έχει <u>τοπικό μέγιστο</u> στο $x=c$ ανν $f(c) \ge f(x)$ $\forall x \in I$
- Η f έχει <u>τοπικό ελάχιστο</u> στο $x=c$ ανν $f(c) \le f(x)$

<u>Θεώρημα 1</u> Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο $c \in I$ του $I \subseteq A$ και υπάρχει η $f'(c)$ τότε $f'(c)=0$

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Θεώρ. 2 (Ικανή συνθήκη ύπαρξης τοπικού ακρότατου)

Αν $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I διάστημα $I \subseteq A$, η f έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο $c \in I$, c εσωτερικό σημείο του I αν η f είναι παραγωγίσιμη στο I $\forall \varepsilon > 0$ και $x_1 \in (c-\varepsilon, c)$ και $x_2 \in (c, c+\varepsilon)$ τότε
$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ) Για τυχόν $\varepsilon > 0$

α) Η f έχει τοπικό μέγιστο στο c αν

$f'(x_1) > 0 \quad x_1 \in (c-\varepsilon, c)$

$f'(x_2) < 0 \quad x_2 \in (c, c+\varepsilon)$

β) Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο c αν

$f'(x_1) < 0 \quad x_1 \in (c-\varepsilon, c)$

$f'(x_2) > 0 \quad x_2 \in (c, c+\varepsilon)$

γ) Δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε ελάχιστο

αν

$f'(x_1) \cdot f'(x_2) > 0.$

Ορσ.3 Ένα εσωτερικό σημείο a του Π.Ο. της f στο οποίο είτε $f'(a) = 0$ είτε η f' δεν ορίζεται καλείται κρίσιμο σημείο

Ασκήσεις

1) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$$

Λύση

$Π.Ο._f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1)' = (3x^4)' - (4x^3)' - (6x^2)' + (12x)' + (1)' = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 =$$

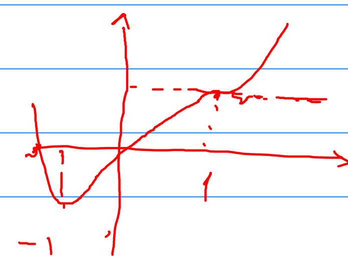
$$= 12(x^3 - x^2 - x + 1) = 12\left[x^2(x-1) - (x-1)\right] =$$

$$= 12(x^2 - 1)(x - 1)$$

Αναζητώ τα σημεία μηδενισμού της f' δηλ.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12(x^2-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \text{ ή } x = 1 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

x		-1		1		$\mathbb{R}$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$	
		Τοπ. ελ.				



Για $x = 1$ έχω μηδενισμό της $1^{ης}$ παραγώγου αλλά δεν έχω τοπικό ακρότατο

$$f'(-2) = 12(4-1)(-2-1) < 0$$

$$f'(0) = 12 > 0$$

$$f'(2) = 36 > 0$$

2) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της

$$g(x) = x^{2/3}(2-x)$$

ΛΥΣΗ

$x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$

$\Pi.O._g = [0, +\infty)$

$$g'(x) = \left(x^{2/3}(2-x)\right)' = \left(x^{2/3}\right)'(2-x) + x^{2/3}(2-x)' =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3}(2-x) + x^{2/3} \cdot (-1)$$

$$= \frac{4}{3}x^{-1/3} - \frac{2}{3} \cdot x^{2/3} - x^{2/3} = \frac{4}{3}x^{-1/3} - \frac{5}{3}x^{2/3}$$

$x \neq 0$
$$= \frac{3 \cdot x^{1/3}}{3 \cdot x^{1/3}}\left(\frac{4}{3}x^{-1/3} - \frac{5}{3} \cdot x^{2/3}\right) =$$

$$= \frac{4-5x}{3x^{1/3}}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4-5x}{3x^{1/3}} = 0 \Rightarrow 4-5x = 0 \Rightarrow x = 4/5$$

$g' : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

x	0		$4/5$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	

$(0, 4/5) \cup [4/5, +\infty)$

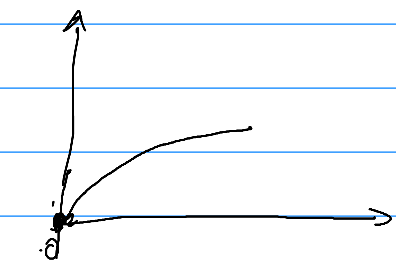
$$g'(1/5) = \frac{4-1}{3(1/5)^{1/3}} > 0$$

$$g'(1) = \frac{4-5}{(\;\;)} < 0$$

Για $x = 4/5$ η g έχει τοπικό μέγιστο.

Το $g(0) = 0$

$g'(x)$ δεν ορίζεται για $x = 0$.



$$\lim_{x\to 0} g(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^{2/3}(2-x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^{2/3} \cdot \lim_{x\to 0}(2-x) =$$

$$= 0 \cdot 2 = 0 = g(0)$$

Παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ Συνεχής

3) Να σχεδιάσετε το γράφημα μιας συνάρτησης f για την οποία ισχύουν τα εξής:

1) Η f έχει τοπικό ελάχιστο για $x = a$

2) Η f' δεν ορίζεται στο $x = a$.